Révisions 2026
jeudi 4 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

1. Donner la fonction génératrice de X.
2. (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:
   $$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i)$$
   (b) En déduire la loi de $X+Y$.
3. (a) Sans s'aider de la question 2b, déterminer la fonction génératrice de $X+Y$.
   (b) Développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$?
   En déduire la loi de $X+Y$.
   (c) Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la même loi géométrique de paramètre p.
   Quelle est la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$?
4. On considère une pièce truquée avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ de donner pile.
   On note Z_n la variable aléatoire égale au numéro du lancer où on obtient pile pour la n-ième fois.
   Quelle est la loi de Z_n ?
   Indication
   Considérer les variables aléatoires $X_1 = Z_1$, $X_i = Z_i - Z_{i-1}$ pour $i \geq 2$.

Exercice 2 *(Ens 2025)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$X_n = \mathrm{Card}\left(\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1;0;1\}^n \text{ tq } \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \frac{\sqrt{3n}}{2}\right\}\right)$$

Estimer X_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soit $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![-1;1]\!]$.
Montrer :
$\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\forall \epsilon > 0$ $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}+\epsilon_k\right)-l\right|\geq \epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Exercice 4 *(Ens 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble S_n des permutations de $\{1,2,\dots,n\}$ de la probabilité uniforme.
Soit $k \in \{1,\dots,n\}$.
Pour $\sigma \in S_n$, on note
$P_k(\sigma) = \Big\{(i_1,\dots,i_k) \in \{1,\dots,n\}^k\ ,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)\Big\}$ l'ensemble des sous-suites croissantes de longueur k de la permutation σ.
Déterminer l'espérance de $\mathrm{Card}(P_k)$.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

i $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(Y=n) > 0$

ii $X \leq Y$

iii Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X conditionnellement à l'évènement $(Y=n)$ est la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

1. Montrer que X et $Y - X + 1$ suivent la même loi.
2. On suppose que X suit une loi géométrique.
   Montrer que X et $Y - X + 1$ sont indépendantes.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit f une fonction convexe avec $f'' \geq 2a$ et X une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer :

$$E(f(X)) - f(E(X)) \geq aVar(X)$$

Remarque
L'énoncé, et le corrigé des examinateurs, ne parlent pas de l'existence de ces espérances et de la variance. On supposera qu'elles existent.

Exercice 7 *(Mines 2023)*

1. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ non presque sûrement constantes, indépendantes, de même loi possédant une espérance.
   Soit $R\begin{cases}\Omega \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\\ \omega \mapsto R_{CV}\left(\sum\limits_{n\geq 0} X_n(\omega)z^n\right)\end{cases}$.
   Montrer que $(R>1) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X_n(\omega) = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}$.
   En déduire $P(R>1) = 0$.
3. Soit $c < 1$.
   Montrer que $P(R \leq c) = 0$.

4. En déduire que $P(R=1)=1$.

Exercice 8 *(Lemmes de Borel-Cantelli)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements.
On note $B=\{\omega\in\Omega \text{ tq } \omega\in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

1. Montrer : $B=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\right)$
2. **Premier lemme de Borel-Cantelli**
   On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge.
   Montrer que $P(B)=0$.
3. **Second lemme de Borel-Cantelli**
   On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $P(A_n)$ diverge.
   Montrer que $P(B)=1$.
   Indication :
   On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité :
   $\forall x\in\mathbb{R}\ 1-x\leq \mathrm{e}^{-x}$