

Révisions 2026
jeudi 4 juin 2026

941

Exercice 1 (CCP 2024)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p .

1. Donner la fonction génératrice de X .

2. (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$:

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i)$$

(b) En déduire la loi de $X + Y$.

3. (a) Sans s'aider de la question 2b, déterminer la fonction génératrice de $X + Y$.

(b) Développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1 + x)^\alpha$?

En déduire la loi de $X + Y$.

(c) Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la même loi géométrique de paramètre p .

Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$?

4. On considère une pièce truquée avec la probabilité $\frac{1}{3}$ de donner pile.

On note Z_n la variable aléatoire égale au numéro du lancer où on obtient pile pour la n -ième fois.

Quelle est la loi de Z_n ?

Indication

Considérer les variables aléatoires $X_1 = Z_1$, $X_i = Z_i - Z_{i-1}$ pour $i \geq 2$.

Correction

1. C'est un résultat de cours, facile à retrouver :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E(t^X) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{pt}{1-qt} \text{ avec } q = 1-p \end{aligned}$$

sur $\left] -\frac{1}{q}; \frac{1}{q} \right[$

2. (a) Les évènements $(X = i)$, $i \in \mathbb{N}^*$, forment un système quasi-complet d'évènements donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket P(X + Y = k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((X + Y = k) \cap (X = i)) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P((Y = k - i) \cap (X = i)) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = k - i)P(X = i) \text{ par indépendance} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i)P(Y = k - i) \text{ car } P(Y = l) \text{ si } l < 1
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \forall k \in \llbracket 2; +\infty \llbracket P(X + Y = k) &= \sum_{i=1}^{k-1} pq^{i-1}pq^{k-i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} p^2q^{k-2} \\
 &= (k-1)p^2q^{k-2}
 \end{aligned}$$

3. (a) X et Y étant indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$ et :

$$G_X(t) = \frac{p^2 t^2}{(1 - qt)^2}$$

$$(b) (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

le rayon de convergence étant égal à 1.

En particulier avec $\alpha = -2$:

$$\forall x \in]-1; 1[\frac{1}{(1+x)^2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (k+1)!}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) x^k$$

On en déduit :

$$G_{X+Y}(t) = p^2 t^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) (-qt)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) p^2 q^k t^{k+2} = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1) p^2 q^{k-2} t^k$$

$P(X + Y = k)$ est le coefficient de t^k donc on retrouve le résultat précédent.

4.

$$\begin{aligned}
G_{S_n}(t) &= \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) \text{ par indépendance} \\
&= G_{X_1}(t)^n = \frac{p^n t^n}{(1-qt)^n} = p^n t^n (1-qt)^{-n} \\
&= p^n t^n \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (n+k-1)!}{(n-1)! k!} (-qt)^k \right) \\
&= p^n t^n \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n-1} q^k t^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n-1} p^n q^k t^{k+n} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} t^k
\end{aligned}$$

On en déduit $S_n(\Omega) = \llbracket n; +\infty \llbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket n; +\infty \llbracket P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

5. $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$

Les X_i sont mutuellement indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$, ce qui permet d'utiliser les résultats de la question précédente. Faut-il justifier ce résultat ?

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$.

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) &= P(F_1 \cap \dots \cap P_{x_1} \cap F_{x_1+1} \cap P_{x_2} \cap \dots) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1 + \dots + x_n - n} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_i - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_i = x_i) &= \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}} P\left(\bigcap_{j=1}^n (X_j = x_j)\right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_i-1} \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_j-1} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\sum_{x_j=1}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_j-1}\right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n 1 \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{x_i-1}
\end{aligned}$$

et on conclut facilement.

Exercice 2 (Ens 2025)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note

$$X_n = \text{Card} \left(\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \{-1; 0; 1\}^n \text{ tq } \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{\sqrt{3n}}{2} \right\} \right)$$

Estimer X_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$.

$$X_n = 3^n P\left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 \leq \frac{3n}{4}\right)$$

Y_i^2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$ donc $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{2}{3}$.

Son espérance est donc $\frac{2n}{3}$, sa variance $\frac{2n}{9}$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$$\begin{aligned}
P\left(S_n > \frac{3n}{4}\right) &= P\left(S_n - \frac{2n}{3} > \frac{3n}{4} - \frac{2n}{3}\right) = P\left(S_n - E(S_n) > \frac{n}{12}\right) \\
&\leq \frac{2n}{9} \frac{12^2}{n^2} = \frac{32}{n}
\end{aligned}$$

On en déduit : $P\left(S_n > \frac{3n}{4}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $P\left(S_n \leq \frac{3n}{4}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et finalement :

$$X_n \sim 3^n$$

Exercice 3 (*Mines 2024*)

Soit $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

Montrer :

$$\exists l \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \epsilon > 0 \ P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} + \epsilon_k \right) - l \right| \geq \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit $Y_{n,k} = \cos \left(\frac{k}{n} + \epsilon_k \right)$.

A n fixé, les variables aléatoires $Y_{n,k}$ sont indépendantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ E(Y_{k,n}) = \frac{1}{3} \left(\cos \left(-1 + \frac{k}{n} \right) + \cos \left(\frac{k}{n} \right) + \cos \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ E(X_n) = \frac{1}{3} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\cos \left(-1 + \frac{k}{n} \right) + \cos \left(\frac{k}{n} \right) + \cos \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$$

est à un facteur près une somme de Riemann donc :

$$E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L = \frac{1}{3} \int_0^1 (\cos(1+x) + \cos x + \cos(x-1)) \, dx$$

$$L = \frac{1}{3} \int_0^1 (2 \cos(1) + 1) \cos(x) \, dx = \frac{\sin(1) (2 \cos(1) + 1)}{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \ V(Y_{n,k}) = E(Y_{n,k}^2) - E(Y_{n,k})^2 \leq E(Y_{n,k}^2) \leq E(1) = 1$$

Par indépendance :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ V(X_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Y_{n,k}) \leq \frac{1}{n}$$

Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \forall n \geq n_0 \ \frac{1}{n} \leq \frac{\epsilon^3}{4} \text{ et } |E(X_n) - L| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Soit $n \geq n_0$.

Supposons l'évènement $|X_n - L| \geq \epsilon$ réalisé.

$$\epsilon \leq |X_n - E(X_n)| + |E(X_n) - L| \leq |X_n - E(X_n)| + \frac{\epsilon}{2}$$

Donc l'évènement $|X_n - E(X_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ est réalisé. Donc par Bienaymé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} P(|X_n - L| \geq \epsilon) &\leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\leq \frac{4V(X_n)}{\epsilon^2} \leq \frac{4}{n\epsilon^2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Exercice 4 (*Ens 2024*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble S_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

Pour $\sigma \in S_n$, on note

$P_k(\sigma) = \left\{ (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k, \ i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \dots < \sigma(i_k) \right\}$ l'ensemble

des sous-suites croissantes de longueur k de la permutation σ .
Déterminer l'espérance de $\text{Card}(P_k)$.

Correction

$$\text{Card}(P_k(\sigma)) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} 1_{\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)}.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(\text{Card}(P_k)) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} P(\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)) = \frac{1}{n!} \sum_{i_1 < \dots < i_k} N_{i_1, \dots, i_k}$

où N_{i_1, \dots, i_k} est le nombre de permutations σ telles que $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_k)$.

Pour construire une telle permutation, on choisit les images de i_1, \dots, i_k qu'on attribue par ordre croissant aux i_l puis on choisit une permutation quelconque des $n - k$ autres éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Donc :

$$\begin{aligned} E(\text{Card}(P_k)) &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \binom{n}{k} (n-k)! = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Exercice 5 (Mines 2024)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* telles que :

i $\forall n \in \mathbb{N}^* P(Y = n) > 0$

ii $X \leq Y$

iii Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X conditionnellement à l'évènement $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Montrer que X et $Y - X + 1$ suivent la même loi.
2. On suppose que X suit une loi géométrique.
Montrer que X et $Y - X + 1$ sont indépendantes.

Correction

1. Par la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'évènements $((Y = n))_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k | Y = n) P(Y = n) \text{ car } P(X = k | Y = n) = 0 \text{ si } k > n \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} P(Y = n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^* P(Y - X + 1 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P((Y - X + 1 = k) \cap (Y = n)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P((n - X + 1 = k) \cap (Y = n)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = n + 1 - k) \cap (Y = n)) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P((X = n + 1 - k) \cap (Y = n)) \\
&\quad \text{car } (X = n + 1 - k) = \emptyset \text{ si } n + 1 - k \leq 0 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n + 1 - k \mid Y = n) P(Y = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} P(Y = n) \text{ car } 1 \leq n + 1 - k \leq n
\end{aligned}$$

2. Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
P((X = k) \cap (Y - X + 1 = l)) &= P((X = k) \cap (Y = k + l - 1)) \\
&= P(X = k \mid Y = k + l - 1) P(Y = k + l - 1) \\
&= \frac{1}{k + l - 1} P(Y = k + l - 1)
\end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} P(Y = n)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^* P(Y = k) &= k(P(X = k) - P(X = k + 1)) = k(pq^{k-1} - pq^k) \\
&= kpq^{k-1}(1 - q) = kp^2q^{k-1}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P((X = k) \cap (Y - X + 1 = l)) &= \frac{1}{k + l - 1} (k + l - 1) p^2 q^{k+l-2} \\
&= pq^{k-1} pq^{l-1} = P(X = k) P(Y - X + 1 = l)
\end{aligned}$$

Donc X et $Y - X + 1$ sont bien indépendantes.

Exercice 6 (Ens 2025)

Soit f une fonction convexe avec $f'' \geq 2a$ et X une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer :

$$E(f(X)) - f(E(X)) \geq a \text{Var}(X)$$

Remarque

L'énoncé, et le corrigé des examinateurs, ne parlent pas de l'existence de ces espérances et de la variance. On supposera qu'elles existent.

Correction

En voyant $f(E(X))$ comme une variable aléatoire constante, on a avec la linéarité de l'espérance :

$$E(f(X)) - f(E(X)) = E(f(X) - f(E(X)))$$

La formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(X) - f(E(X)) = f'(E(X))(X - E(X)) + \int_{E(X)}^X (X - t)f''(t) dt$$

Si $X \geq E(X)$ alors les bornes sont dans le bon sens et $X - t$ est positif donc :

$$\int_{E(X)}^X (X - t)f''(t) dt \geq \int_{E(X)}^X (X - t)2a dt = \left[a(X - t)^2 \right]_{E(X)}^X = a(X - E(X))^2$$

Si $X < E(X)$ alors $\int_{E(X)}^X (X - t)f''(t) dt = \int_X^{E(X)} (t - X)f''(t) dt$.

Les bornes sont dans le bon sens et $t - X$ est positif donc :

$$\int_X^{E(X)} (t - X)f''(t) dt \geq \int_X^{E(X)} (t - X)2a dt = \left[\frac{a}{2}(t - X)^2 \right]_X^{E(X)} = a(E(X) - X)^2 = a(X - E(X))^2$$

Donc dans tous les cas :

$$f(X) - f(E(X)) \geq f'(E(X))(X - E(X)) + a(X - E(X))^2$$

En prenant l'espérance :

$$E(f(X)) - f(E(X)) \geq f'(E(X))E(X - E(X)) + aVar(X) = aVar(X)$$

Exercice 7 (Mines 2023)

- Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} non presque sûrement constantes, indépendantes, de même loi possédant une espérance.

$$\text{Soit } R \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \omega \mapsto R_{CV} \left(\sum_{n \geq 0} X_n(\omega) z^n \right) \end{cases} .$$

Montrer que $(R > 1) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X_n(\omega) = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}$.

En déduire $P(R > 1) = 0$.

- Soit $c < 1$.
Montrer que $P(R \leq c) = 0$.
- En déduire que $P(R = 1) = 1$.

Correction

- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est la borne supérieure, éventuellement infinie, de $\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée.}\}$
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$$R_{CV} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) > 1 \iff \exists r > 1 \text{ tq } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

ou encore :

$$R_{CV} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) > 1 \iff \exists (M, r) \in \mathbb{R}_+^* \times]1; +\infty[\text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \ |a_n| \leq M r^{-n}$$

On suppose l'évènement $(R > 1)$ réalisé. En d'autres termes on considère $\omega \in \Omega$ tq

$R(\omega) > 1$.

$\exists (M(\omega), r(\omega)) \in \mathbb{R}_+^* \times]1; +\infty[$ tq $\forall n \in \mathbb{N} |X_n(\omega)| \leq M(\omega)r(\omega)^{-n}$

$M(\omega)r(\omega)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc :

$\exists n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0(\omega) M(\omega)r(\omega)^{-n} < 1$

On a alors :

$\forall n \geq n_0(\omega) X_n(\omega) = 0$

La réciproque est triviale : si les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang alors la série entière est en fait un polynôme et son rayon de convergence est infini.

$(R > 1) = \{\omega \in \Omega \text{ tq } X_n(\omega) = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}$.

On a alors $(R > 1) = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=n_0}^{+\infty} (X_n = 0)$.

On note $p = P(X_n = 0) < 1$.

$\forall N \geq n_0 P\left(\bigcap_{n=n_0}^N (X_n = 0)\right) = p^{N-n_0+1}$ par indépendance et équidistribution.

On en déduit par continuité décroissante :

$$P\left(\bigcap_{n=n_0}^{+\infty} (X_n = 0)\right) = 0$$

Par sous-additivité, $P(R > 1) = 0$.

Remarque

On peut montrer $P(R > 1) = 0$ sous des hypothèses beaucoup plus faibles.

Il suffit qu'il existe $a \neq 0$ tel que $P(X = a) > 0$ (où X désigne une variable aléatoire de même loi que les X_n).

Les événements $(X_n = a)$ sont mutuellement indépendants et la série de terme général $P(X_n = a)$ diverge (grossièrement) donc d'après le second lemme de Borel-Cantelli, l'évènement $(X_n = a)$ est réalisé presque sûrement une infinité de fois. Donc la suite $(X_n 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 avec probabilité 1.

Donc $P(R \leq 1) = 1$.

3. Soit $d \in]c; 1[$.

$$(R \leq c) \subset ((X_n d^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|X_n d^n| \geq k)$$

Si on note $M = E(|X_n|) = E(X_n)$ (indépendant de n) alors avec l'inégalité de Markov :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} P(|X_n d^n| \geq k) \leq \frac{m d^n}{k}$$

Par sous-additivité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|X_n d^n| \geq k)\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m d^n}{k} = \frac{m}{k(1-d)}$$

$$\text{Par continuité décroissante : } P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (|X_n d^n| \geq k)\right) = 0$$

Par croissance de P , $P(R \leq c) = 0$.

Remarque

On peut ici aussi utiliser Borel-Cantelli.

On suppose que la série de terme général $P(|X_n d^n| \geq 1)$ converge.

C'est le cas en particulier si X a une espérance, via l'inégalité de Markov.

D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, on peut affirmer avec probabilité 1 qu'il n'y

a qu'un nombre fini d'entiers tels que $|X_n d^n| \geq 1$.

Donc la suite $(X_n d^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée avec probabilité 1.

Donc $P(R \geq d) = 1$ et $P(R \leq c) \leq P(R < d) = 0$.

4. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* P\left(1 - \frac{1}{n} < R \leq 1\right) = 1$$

Par continuité décroissante, $P(R = 1) = 1$.

Exercice 8 (Lemmes de Borel-Cantelli)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements.

On note $B = \{\omega \in \Omega \text{ tq } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}$.

$$1. \text{ Montrer : } B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$$

2. Premier lemme de Borel-Cantelli

On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge.

Montrer que $P(B) = 0$.

3. Second lemme de Borel-Cantelli

On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $P(A_n)$ diverge.

Montrer que $P(B) = 1$.

Indication :

On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$$

Correction

$$1. \omega \in \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \iff \exists k \geq n \text{ tq } \omega \in A_k$$

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right) &\iff \forall n \in \mathbb{N} \exists k \geq n \text{ tq } \omega \in A_k \\ &\iff \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \omega \in A_k\} \text{ n'est pas majoré} \\ &\iff \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } \omega \in A_k\} \text{ est infini} \\ &\iff \omega \in B \end{aligned}$$

$$2. \text{ On note } C_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} \subset C_n : C_n = C_{n+1} \cup A_n$$

Par continuité décroissante :

$$P(B) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n)$$

Par sous-additivité :

$$0 \leq P(C_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 : \text{reste d'une série convergente}$$

$$\text{Donc } P(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } P(B) = 0.$$

$$3. \bar{B} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \bar{A}_k \right)$$

Par sous-additivité :

$$P(\bar{B}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \bar{A}_k \right)$$

Il suffit donc de prouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \bar{A}_k \right) = 0$$

Fixons donc $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P \left(\bigcap_{k=n}^{+\infty} \bar{A}_k \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P \left(\bigcap_{k=n}^N \bar{A}_k \right) \text{ (justifié en cours).}$$

$$\begin{aligned} P \left(\bigcap_{k=n}^N \bar{A}_k \right) &= \prod_{k=n}^N P(\bar{A}_k) \text{ par indépendance} \\ &= \prod_{k=n}^N (1 - P(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^N e^{-P(A_k)} \text{ tout est positif} \\ &\leq e^{-\sum_{k=n}^N P(A_k)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat.