Révisions 2026
lundi 8 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -3 \end{pmatrix}$
A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Exercice 2 *(Mines 2024)*

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.
2. On considère l'équation
$$(E)\ X^2 - 3X = A$$
en la matrice inconnue X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que toute solution de (E) commute avec A.
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E).
3. Calculer A^n où $n \geq 2$.

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $M^2 + M^T = I_n$.
1. Montrer que $M^3 - 2M + I_n = 0$.
2. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit un entier $n \geq 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.
1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe une famille $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de vecteurs propres de u telle que toute sous-famille de n vecteurs est libre.
Montrer que u est une homothétie.

Exercice 6 *(Centrale 2024)*

Soient $n \geq 3$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A^3 = B$ et $\operatorname{rg}(B) = 1$.

1. Déterminer $\operatorname{tr}(A)^3$.
2. On suppose que $\operatorname{tr}(B) = 0$.
   Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose que $\operatorname{tr}(B) \neq 0$.
   Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^2)$.

Exercice 7 *(Centrale 2024)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et u un endpmorphisme de E.
   On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
   Montrer :
   u diagonalisable $\Longleftrightarrow$ u possède n valeurs propres distinctes
2. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes
   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.