Révisions 2026
lundi 8 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -3 \end{pmatrix}$
A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Correction
$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 + 2X + a^2 - 3 = (X+1)^2 + a^2 - 4$
Si $|a| < 2$ alors χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a fortiori dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Si $|a| = 2$, $\chi_A = (X+1)^2$ et $A \neq -I_2$ donc A n'est diagonalisable ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ni dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Par contre A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a fortiori dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Si $|a| > 2$, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par contre, χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 2 *(Mines 2024)*

Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres.
2. On considère l'équation
$$(E)\ X^2 - 3X = A$$
   en la matrice inconnue X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que toute solution de (E) commute avec A.
   (b) Déterminer toutes les solutions de (E).
3. Calculer A^n où $n \geq 2$.

Correction

1.
$$\begin{aligned}
\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix}\lambda+2 & 0 & -1\\ 5 & \lambda-3 & 0\\ 4 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}\\
&= (\lambda+2)\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0\\ -4 & \lambda+2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5 & \lambda-3\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\
&= (\lambda+2)^2(\lambda-3)+4(\lambda+2)\\
&= (\lambda+2)(\lambda^2-\lambda-2)\\
&= (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de A sont $2,\ -1,\ -2$ (simples).
Les sous-espaces propres sont des droites dont un vecteur directeur est :

- Pour $\lambda = 2$: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$.
- Pour $\lambda = -1$: $v_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}$.
- Pour $\lambda = -2$: $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Finalement, $A = PDP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 1\\ 4 & 4 & 0\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

2. (a) Soit X solution : $X^2-3X=A$. En multipliant à gauche par X : $X^3-3X^2=XA$.
En multipliant à droite par X : $X^3-3X^2=AX$. Donc $XA=AX$.

(b) On suppose toujours X solution.
X et A commutent donc les sous-espaces propres de A sont stables par X.
La droite $\mathbb{R}v_1$ est donc stable par X. D'après le cours, v_1 est un vecteur propre de X.
Idem pour v_2 et v_3.
Donc $X = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale.
$A = X^2-3X$ donc $PDP^{-1} = P(\Delta_2 - 3\delta)P^{-1}$.
P étant inversible, $D = \Delta^2 - 3\Delta$.
Les solutions de l'équation $x^2-3x=2$ sont $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.
Les solutions de l'équation $x^2-3x=-1$ sont $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
Les solutions de l'équation $x^2-3x=-2$ sont 1 et 2.
Donc $X = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{Diag}(a,b,c)$ où $a = \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}, = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ et $c = 1$ ou 2.
Réciproquement, on vérifie que ces matrices sont solutions de (E).

3. Diverses méthodes sont possibles : $A^n = PD^nP^{-1}$ ou division euclidienne de X^n par χ_A.

Exercice 3 *(CCP 2024)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que $M^3 - 2M + I_n = 0$.
2. Montrer que M est diagonalisable.

Correction

1. $M^T = I_n - M^2$
   On transpose : $M = I_n - (M^2)^T = I_n - \left(M^T\right)^2 = I_n - (I_n - M^2)^2 = I_n - I_n + 2M^2 - M^4$
   On en déduit : $M^4 - 2M^2 + M = 0$.
   M étant inversible, $M^3 - 2M + I_n = 0$
2. Soit $P = X^3 - 2X + 1$.
   $P = (X-1)(X^2+X-1)$. $\Delta = 5 > 0$ donc le trinôme $X^2 + X - 1$ a deux racines réelles distinctes.
   1 n'est pas racine de $X^2 + X - 1$ donc les deux racines de ce trinôme sont différentes de 1.
   P est donc scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et M est diagonalisable.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit un entier $n \geq 2$. On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 0 et les autres coefficients valent 1.

1. Calculer A^2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les espaces propres correspondants.

Correction

Partie 1 : Calcul de A^2, inversion de A et expression de A^{-1}

1. Définition de la matrice A

La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par :

- $A_{i,i} = 0$ pour tout i (coefficients diagonaux nuls),
- $A_{i,j} = 1$ pour tout $i \neq j$ (tous les autres coefficients valent 1).

2. Calcul de A^2

Pour calculer A^2, nous utilisons la formule du produit matriciel :

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} A_{k,j}.$$

- **Cas $i = j$ (diagonale de A^2) :**

$$(A^2)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} A_{k,i} = \sum_{k \neq i} 1 \times 1 = n - 1.$$

- **Cas $i \neq j$ (hors-diagonale de A^2) :**

$$(A^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} A_{k,j} = A_{i,i} A_{i,j} + A_{i,j} A_{j,j} + \sum_{k \neq i,j} A_{i,k} A_{k,j} = 0 \times 1 + 1 \times 0 + \sum_{k \neq i,j} 1 \times 1 = n - 2.$$

Conclusion :

$$A^2 = (n-2)A + (n-1)I,$$

où I est la matrice identité.

3. Inversion de A

Nous cherchons A^{-1} telle que $AA^{-1} = I$. À partir de la relation $A^2 = (n-2)A + (n-1)I$, nous pouvons écrire :

$$A\left(A - (n-2)I\right) = (n-1)I.$$

En divisant par $(n-1)$, nous obtenons :

$$A\left(\frac{A-(n-2)I}{n-1}\right) = I.$$

Ainsi, l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \boxed{\frac{A-(n-2)I}{n-1}}.$$

Partie 2 : Valeurs propres et espaces propres de A

1. Valeurs propres de A

Nous cherchons les scalaires λ tels que $\det(A - \lambda I) = 0$.

- **Remarque préliminaire :** La matrice A est une matrice dont tous les coefficients hors-diagonaux valent 1. Elle est symétrique et donc diagonalisable.
- **Calcul du polynôme caractéristique :** Nous pouvons exploiter la structure particulière de A. Notons que :

  $$A = \mathbf{1}\mathbf{1}^T - I,$$

  où $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne rempli de 1.
  Les valeurs propres de $\mathbf{1}\mathbf{1}^T$ sont :
  — n (associée au vecteur propre $\mathbf{1}$),
  — 0 (de multiplicité $n-1$, associée à l'hyperplan orthogonal à $\mathbf{1}$).
  Ainsi, les valeurs propres de $A = \mathbf{1}\mathbf{1}^T - I$ sont :
  — $n-1$ (associée à $\mathbf{1}$),
  — -1 (de multiplicité $n-1$, associée à l'hyperplan orthogonal à $\mathbf{1}$).

Conclusion : Les valeurs propres de A sont :

$$\boxed{n-1} \quad \text{(simple)},$$

et

$$\boxed{-1} \quad \text{(de multiplicité } n-1\text{)}.$$

Remarque

On peut aussi dire que le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme $X^2 - (n-2)X - (n-1) = (X+1)(X-(n-1))$

Les valeurs propres de A sont donc -1 de multiplicité α et $n-1$ de multiplicité $n-\alpha$.
La trace de A étant nulle, $-\alpha + (n-1)(n-\alpha) = 0$
On en déduit $n(n-1) = n\alpha$ puis $\alpha = n-1$

2. Espaces propres associés

- **Espace propre pour** $\lambda = n-1$ **:** Nous cherchons X tel que $AX = (n-1)X$. Comme $A\mathbf{1} = (n-1)\mathbf{1}$, (il faudrait ajouter que $n-1$ étant valeur propre simple, le sous-espace propre associé est de dimension 1) l'espace propre associé est :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\mathbf{1})}, \quad \text{où } \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Espace propre pour** $\lambda = -1$ **:** Nous cherchons X tel que $AX = -X$. Cela équivaut à $(\mathbf{1}\mathbf{1}^T - I)X = -X$, soit $\mathbf{1}\mathbf{1}^T X = 0$. Ainsi, X doit vérifier $\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$. L'espace propre associé est donc l'hyperplan orthogonal à $\mathbf{1}$:

$$\boxed{\left\{ X \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \right\}}.$$

Sa dimension est $n-1$, ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre -1.
Remarque
La méthode proposée ici revient à résoudre le système $AX = X$.
Mais A est symétrique réelle, donc on aurait pu écrire sans calcul que $E_{-1}(A) = (E_{n-1}(A))^{\perp}$.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ de vecteurs propres de u telle que toute sous-famille de n vecteurs est libre.
Montrer que u est une homothétie.

Correction
Pour tout i compris entre 1 et $n+1$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre e_i.

- **Première méthode**
$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $n = \dim(E)$ vecteurs donc c'est une base de E et la matrice de u dans cette base est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Soit $k \in [\![1; n]\!]$.
$(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_{n+1})$ est une famille libre de $n = \dim(E)$ vecteurs donc c'est une base de E et la matrice de u dans cette base est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{n+1})$.
En calculant le polynôme caractéristique de u dans ces deux bases, on montre

$$(X - \lambda_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} (X - \lambda_l) = (X - \lambda_{n+1}) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} (X - \lambda_l)$$

On en déduit $X - \lambda_k = X - \lambda_{n+1}$, puis $\lambda_k = \lambda_{n+1}$.
On en déduit que la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est $\lambda_{n+1} I_n$.
On en déduit que u est une homothétie.
- **Deuxième méthode**
$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de $n = \dim(E)$ vecteurs donc c'est une base de E et :
$\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

Si il existe $k_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $x_{k_0} = 0$ alors e_{n+1} est ombinaison linéaire des vecteurs e_k avec $k \in [\![1;n]\!] \setminus \{k_0\}$ et la famille $(e_1, \dots, e_{k_0-1}, e_{k_0+1}, \dots, e_{n+1})$ est liée. C'est absurde donc :
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ x_k \neq 0$
$u(e_{n+1}) = \lambda_{n+1}e_{n+1}$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+1}x_k e_k$
$(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc :
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ \lambda_k x_k = \lambda_{n+1}x_k$
ce qui entraîne (x_k étant non nul) :
$\forall k \in [\![1;n]\!]\ \lambda_k = \lambda_{n+1}$
u coïncide donc avec l'homothétie $\lambda_{n+1}id_E$ sur une base de E. On en déduit que u est l'homothétie de rapport λ_{n+1}.

Exercice 6 *(Centrale 2024)*

Soient $n \geq 3$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A^3 = B$ et $\text{rg}(B) = 1$.

1. Déterminer $\text{tr}\,(A)^3$.
2. On suppose que $\text{tr}\,(B) = 0$.
   Montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose que $\text{tr}\,(B) \neq 0$.
   Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{Ker}\,(A) = \text{Ker}\,(A^2)$.

Correction

1. On a évidemment $\text{tr}\,(A^3) = \text{tr}\,(B)$ mais en général $\text{tr}\,(A^3) \neq \text{tr}\,(A)^3$.
   $\text{rg}(B) = 1$ donc $\text{Im}\,(B) = \mathbb{R}e_1$ avec e_1 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.
   La famille libre (e_1) peut se compléter en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.
   Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$ alors $B = PCP^{-1}$
   avec $C = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$
   Les valeurs propres de B sont les mêmes que celles de C à savoir $c_1, 0, \dots, 0$, c_1 pouvant être nul.
   On remarque que $c_1 = \text{tr}\,(C) = \text{tr}\,(B)$.

   Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la liste des valeurs propres complexes de la matrice A alors il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QTQ^{-1}$ avec T triangulaire supérieure ayant comme coefficients diagonaux les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   $B = A^3 = QT^3Q^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure ayant comme coefficients diagonaux les nombres $\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3$.
   Quitte à renuméroter les λ_i, on a $\lambda_1^3 = c_1, \lambda_2^3 = \cdots = \lambda_n^3 = 0$.
   On en déduit $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   On a donc $\text{tr}\,(A)^3 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^3 = \lambda_1^3 = c_1 = \text{tr}\,(B)$.
   Remarque
   $\text{tr}\,(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \lambda_1$ donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
   On en déduit que $\lambda_1 = \sqrt[3]{\text{tr}\,(B)}$.

2. $c_1 = 0$ donc $\lambda_1 = 0$ et 0 est valeur propre de multiplicité n de A.
   Mais $A^3 = B$ est de rang 1 donc $A^3 \neq 0$ et $A \neq 0$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(A)$ est de dimension strictement inférieure à n la multiplicité de 0 donc A n'est pas diagonalisable.

3. On commence par supposer A diagonalisable.
   Il existe une matrice inversible R tel que $A = RDR^{-1}$ avec D diagonale.
   Le rang d'une matrice diagonale est le nombre de coefficients non nuls situés sur sa diagonale.
   Donc D et D^2 ont le même rang. On en déduit que A et A^2 ont le même rang.
   Donc $\mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A^2)$ ont la même dimension.
   Mais $\mathrm{Ker}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(A^2)$ donc $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^2)$.
   On observera qu'il s'agit d'une propriété de toute matrice diagonalisable.

   Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(A^2)$.
   $C^2 = c_1 C$ (calcul élémentaire) donc $B^2 = PC^2P^{-1} = c_1 PCP^{-1} = \mathrm{tr}\,(B)B$.
   On en déduit $A^6 = \mathrm{tr}\,(B)A^3$ ou encore $A^2\left(A^4 - \mathrm{tr}\,(B)A\right) = 0$.
   Donc $\mathrm{Im}\,\left(A^4 - \mathrm{tr}\,(B)A\right) \subset \mathrm{Ker}\,(A^2) = \mathrm{Ker}\,(A)$ et $A\left(A^4 - \mathrm{tr}\,(B)A\right) = 0$ ie $A^5 = \mathrm{tr}\,(B)A^2$.
   On recommence et on obtient $A^4 = \mathrm{tr}\,(B)A$.
   Le polynôme $X(X^3 - \mathrm{tr}\,(B))$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Mais on voudrait montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $X(X^3 - \mathrm{tr}\,(B)) = X(X - \lambda_1)(X - \lambda_1 j)(X - \lambda_1 j^2)$
   Les valeurs propres de A sont 0 et λ_1 donc $\lambda_1 j$ et $\lambda_1 j^2$ ne sont pas valeurs propres de A (λ_1 est non nul car dans cette question, $\mathrm{tr}\,(B)$ est non nul).
   On en déduit que les matrices $A - \lambda_1 j I_n$ et $A - \lambda_1 j^2 I_n$ sont inversibles.
   Mais $A(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_1 j I_n)(A - \lambda_1 j^2 I_n) = 0$ donc $A(A - \lambda_1 I_n) = 0$.
   Le polynôme $X(X - \lambda_1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et annule A donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 *(Centrale 2024)*

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et u un endpmorphisme de E.
   On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
   Montrer :
   u diagonalisable $\iff$ u possède n valeurs propres distinctes

2. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes
   Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Correction

1. On suppose que u est diagonalisable.
   Soit $P = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.
   On a vu dans le cours que $P(u) = 0$.
   En particulier $P(u)(x)$ est nul : cela donne une combinaison linéaire des vecteurs $(x, u(x), \ldots, u^{\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u))})$ à coefficents non tous nuls qui est nulle. Or par hypothèse, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) \geq n$.
   Mais on a toujours $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) \leq \dim(E)$ qui vaut n en vertu des hypothèses.
   Donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) = n$ ie u a n valeurs propres deux à deux distinctes.

Réciproquement si u a n valeurs propres deux à deux distinctes alors u est diagonalisable car, comme remarqué ci-dessus, n est la dimension de E.

2. u possède n valeurs propres deux à deux distinctes donc d'après le cours, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E telle que :
   $\forall i \in [\![1; n]\!]\ u(e_i) = \lambda_i e_i$
   les λ_i étant deux à deux distincts.
   Soit $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
   Le déterminant de la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ dans la base $\mathcal{B}$ est :
   $$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
   Il est non nul donc x convient.