Révisions 2026
mercredi 10 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \frac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^n$.

Exercice 2 *(TPE 2024)*

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$.

Exercice 3 *(Centrale 2024)*

Soit $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta \in]0; 2\pi[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^* \; |S_n| \leq M$
2. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{z^n}{n^s}$ avec $s \in]0; 1]$.
3. Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1 - rz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$

Exercice 4 *(Centrale 2024)*

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + nx^2)}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Déterminer un équivalent de f en 0.
   Indication
   Utiliser une comparaison série-intégrale.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f, f' et f'' sont bornées.

1. Montrer que $\frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon}$ converge uniformément vers $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\dfrac{f((1+\epsilon)x)-f(x)}{\epsilon}$ converge simplement vers une limite à déterminer.
3. Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (toujours sous la condition f, f' et f'' bornées).

Exercice 6 *(Ens 2024)*

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $\sup\limits_{x\in[0;1]}(|P_n(x)-\mathrm{e}^x|)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$
Montrer que $Deg(P_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

Exercice 7 *(X 2024)*

Soit $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série entière $\sum\limits_{k\geq 0}a_{k,n}z^k$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
On note B l'ensemble des nombres complexes de module ≤ 1.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit f_n la somme de la série entière $\sum\limits_{k\geq 0}a_{k,n}z^k$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall z\in B\ \ |f_n(z)|\leq M$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\{z\in\mathbb{C}\text{ tq }\ |z|\leq r\}$ pour tout $r<1$.

Exercice 8 *(Mines 2024)*

Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière en 0 et telle que :
$\forall x\ x\varphi'(x)=x+\varphi(x)^2$

Exercice 9 *(Centrale 2024)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=a$ et :
$\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}$.
On pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u_n}{n!}x^n$.

1. Trouver f.
2. Trouver l'expression des u_n.