Révisions 2026
mercredi 10 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} x^n$.

Correction
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} > 0$.
$a_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2n}$.
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n r^n > 0$
$\dfrac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} r \sim \dfrac{e^{n+1}}{2(n+1)} \dfrac{2n}{\mathrm{e}^n} r \xrightarrow[n\to+\infty]{} r\,\mathrm{e}$
Donc si $r < \mathrm{e}^{-1}$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n r^n$ converge et si $r > \mathrm{e}^{-1}$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n r^n$ diverge.
Donc $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R;R[\ S(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{n} x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\mathrm{e}x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x\,\mathrm{e}^{-1})^n}{n}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln(1-\mathrm{e}x) + \ln\left(1-\mathrm{e}^{-1}x\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2x\operatorname{ch}(1) + x^2\right)
\end{aligned}$$

L'énoncé ne semble pas demander d'étudier la série pour $x = \pm\,\mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 2 *(TPE 2024)*

Rayon de convergence et somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$.

Correction
Soit $r > 0$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ \dfrac{x^{4n+3}}{4n+3} > 0$
$\dfrac{\dfrac{r^{4n+7}}{4n+7}}{\dfrac{r^{4n+3}}{4n+3}} = \dfrac{4n+3}{4n+7} r^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} r^4$
Par la règle de d'Alembert :

si $r<1$ la série de terme général $\dfrac{r^{4n+3}}{4n+3}$ converge
si $r>1$ la série de terme général $\dfrac{r^{4n+3}}{4n+3}$ converge
Donc le rayon de convergence et somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^{4n+3}}{4n+3}$ vaut 1.
Pour $x=1$, on a $\dfrac{1}{4n+3}\sim\dfrac{1}{4n}$ et tout est positif. La série de terme général $\dfrac{1}{4n}$ diverge donc la série de terme général $\dfrac{1}{4n+3}$ diverge.
$\forall n\in\mathbb{N}\ \dfrac{(-1)^{4n+3}}{4n+3}=-\dfrac{1}{4n+3}$
Donc pour $x=-1$, la série diverge.

Par propriété des séries entière :

$$\forall x\in]-1;1[\ S'(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n+2}=\frac{x^2}{1-x^4}$$

$S(0)=0$ donc pour tout $x\in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x\frac{t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}\left(\frac{1}{2}\left(1+t^2-\left(1-t^2\right)\right)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}-\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\arctan(x)\right)\end{aligned}$$

Si on ne voit pas l'astuce pour intégrer $\dfrac{t^2}{1-t^4}$:
On décompose en éléments simples sur $\mathbb{C}$, la fraction $\dfrac{X^2}{1-X^4}=\dfrac{-X^2}{(X-1)(X-i)(X+1)(X+i)}$.
On passe dans $\mathbb{C}$ car a été vue en Sup la décomposition en éléments simples d'une fraction dont le dénominateur est scindé à racines simples.
$\dfrac{-X^2}{1-X^4}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X-i}+\dfrac{c}{X+1}+\dfrac{d}{X+i}$
On multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $a=-\dfrac{1}{2(1-i)(1+i)}=-\dfrac{1}{2\left|1+i\right|^2}=-\dfrac{1}{4}$
On multiplie par $X-i$ et on évalue en i : $b=\dfrac{1}{(i-1)(i+1)2i}=\dfrac{i}{4}$
On multiplie par $X+1$ et on évalue en -1 : $c=-\dfrac{1}{-2(-1-i)(-1+i)}=\dfrac{1}{2\left|-1+i\right|^2}=\dfrac{1}{4}$
On multiplie par $X+i$ et on évalue en $-i$: $d=\dfrac{1}{(-i-1)(-i+1)(-2i)}=-\dfrac{i}{4}$
Donc :

$$\begin{aligned}\frac{-X^2}{1-X^4} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-X}+\frac{1}{1+X}+\frac{i}{X-i}-\frac{i}{X+i}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-X}+\frac{1}{1+X}+\frac{-2}{X^2+1}\right)\end{aligned}$$

$S(0)=0$ donc pour tout $x\in]-1;1[$:

$$\begin{aligned}S(x) &= \int_0^x \frac{t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{-2}{t^2+1}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\left(-\ln(1-x)+\ln(1+x)-2\arctan(x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\arctan(x)\right)\end{aligned}$$

Exercice 3 *(Centrale 2024)*

Soit $z=\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $\theta\in]0;2\pi[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $S_n=\sum_{k=1}^{n} z^k$

1. Montrer qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que :
   $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ |S_n|\leq M$
2. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{z^n}{n^s}$ avec $s\in]0;1]$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{1-rz}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$

Correction

1. $z\neq 1$ donc :
   $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \ |S_n|=\left|z\dfrac{z^n-1}{z-1}\right|\leq\dfrac{2}{|z-1|}$
2. $$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*\ \sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k^s} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k-S_{k-1}}{k^s}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k^s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{S_{k-1}}{k^s}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k^s}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{S_k}{(k+1)^s}\\ &= \frac{S_n}{n^s}+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{(k+1)^s}\right)\end{aligned}$$

   $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \left|\dfrac{S_n}{n^s}\right|\leq\dfrac{M}{n^s}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ car $s>0$

   Donc $\dfrac{S_n}{n^s}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

   La suite $\left(\dfrac{1}{k^s}\right)$ converge (vers 0) car $s>0$ donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq1}\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{(k+1)^s}\right)$ converge.

   $\forall k\in\mathbb{N}^*\ \left|S_k\left(\dfrac{1}{k^s}-\dfrac{1}{(k+1)^s}\right)\right|=|S_k|\left(\dfrac{1}{k^s}-\dfrac{1}{(k+1)^s}\right)\leq M\left(\dfrac{1}{k^s}-\dfrac{1}{(k+1)^s}\right)$

   donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq1}S_k\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{(k+1)^s}\right)$ converge.

   Si on note A sa somme :

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k^s}\xrightarrow[n\to+\infty]{}A\in C$ donc la série de terme général $\dfrac{z^n}{n^s}$ converge.

3. $\forall r \in [0;1[\ |rz| = r < 1$ donc $1 - rz \neq 0$
   Pour $r = 1$, $1 - rz = 1 - z \neq 1$.
   La fonction $r \mapsto \dfrac{1}{1-rz}$ est donc continue sur $[0;1]$: l'intégrale ne pose pas de problème de définition.
   D'après la question précédente, la série de droite est bien convergente.
   $\forall r \in [0;1[\ \dfrac{1}{1-rz} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n z^n$ car $|rz| = r < 1$
   Dans la mesure où il n'y pas convergence simple sur le segment, on ne peut pas utiliser le premier théorème d'intégration terme à terme.
   Le théorème N_1 ne s'applique pas non plus :
   $\displaystyle\int_0^1 |r^n z^n|\,\mathrm{d}r = \frac{|z|^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ terme général d'une série divergente.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k z^k = \frac{1 - r^{n+1} z^{n+1}}{1 - rz}$ car $rz \neq 1$
   On intègre entre 0 et 1 :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1-rz} - \int_0^1 \frac{r^{n+1} z^{n+1}}{1-rz}\mathrm{d}r$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \begin{cases} [0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{r^{n+1} z^{n+1}}{1-rz} \end{cases}$
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1[$.
   - La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0;1[$.
   - La fonction nulle est continue sur $[0;1[$.
   - **Domination**
     La fonction $r \mapsto |1 - rz|$ est continue sur $[0;1]$ donc :
     $\exists r_0 \in [0,1]$ tq $\forall r \in [0;1]\ \ |1 - rz| \geq |1 - r_0 z| > 0$
     $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall r \in [0;1[\ |f_n(r)| = \dfrac{r^{n+1}}{|1-rz|} \leq \phi(r) = \dfrac{1}{|1 - r_0 z|}$
     avec ϕ continue, positive et intégrable sur $[0;1[$.

   D'après le théorème de convergence dominée :
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^{n+1} z^{n+1}}{1-rz}\mathrm{d}r \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
   D'où :
   $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1-rz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{k-1}}{k}$

Exercice 4 *(Centrale 2024)*

$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Déterminer un équivalent de f en 0.
   Indication
   Utiliser une comparaison série-intégrale.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^* \; n(1+nx^2) > 0$: les termes de la somme sont tous définis.
Si $x > 0$, $\dfrac{1}{n(1+nx^2)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^2n^2}$, tout est positif et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2n^2}$ converge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(1+nx^2)}$ converge.
Si x est nul, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(1+nx^2)} = \dfrac{1}{n}$ terme général d'une série divergente.
Enfin, le cas $x < 0$ se traite par parité.
Finalement f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{n(1+nx^2)} \end{cases}$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ avec :
$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [a;b] \; f_n'(x) = \dfrac{-2nx}{n(1+nx^2)^2} = \dfrac{-2x}{(1+nx^2)^2}$
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[a;b]$.
- La a série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a;b]$.
En effet :
$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [a;b] \; |f_n'(x)| = \dfrac{2x}{(1+nx^2)^2} \leq \dfrac{2b}{(1+na^2)^2}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente :
$\dfrac{2b}{(1+na^2)^2} \sim \dfrac{2b}{n^2a^2}$
Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a;b]$.
Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a;b]$.

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (caractère local de la classe $\mathcal{C}^1$) puis sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité.

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; f'(x) = -2x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+nx^2)^2} < 0$
donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et :
$\forall x > 0 \; f(x) \leq l$.
$\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \; \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{n(1+nx^2)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{n(1+nx^2)}$
Donc :
$\forall (N,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^* \; \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{n(1+nx^2)} \leq l$
On fixe N et on fait tendre x vers 0 :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq l$$

On fait tendre N vers $+\infty$: $+\infty \leq l$

Donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} +\infty$.

Par parité : $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x<0}]{} -\infty$.

3. On fixe $x > 0$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(1+tx^2)}$ est décroissante donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+tx^2)}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx^2}\right)\right]_1^{+\infty} \\ &= -2\ln(x) + \ln(1+x^2)\end{aligned}$$

On en déduit $f(x) \sim_{0^+} -2\ln(x)$.

Par parité, $f(x) \sim_0^- 2\ln(|x|)$.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f, f' et f'' sont bornées.

1. Montrer que $\dfrac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$ converge uniformément vers $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\dfrac{f((1+\epsilon)x)-f(x)}{\epsilon}$ converge simplement vers une limite à déterminer.
3. Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? (toujours sous la condition f, f' et f'' bornées).

Correction

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} - f'(x)\right| &= \frac{1}{|\epsilon|}\left|f(x+\epsilon)-f(x)-\epsilon f'(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{|\epsilon|}\ \epsilon^2 \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(|f''(t)|\right) \text{ par l'inégalité de Taylor-Lagrange)} \\ &\leq |\epsilon| \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(|f''(t)|\right) \text{ indépendant de } x \text{ et } \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} 0\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. A x fixé :

$f((1+\epsilon)x) = f(x+\epsilon x) = f(x) + \epsilon x f'(x) + o(\epsilon)$ par Taylor-Young

Donc $\dfrac{f((1+\epsilon)x)-f(x)}{\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} xf'(x)$

3. On prend $f = sin$ qui vérifie bien les hypothèses de l'énoncé.

On prend $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $\epsilon_n = \dfrac{\pi}{2x_n}$

$$\begin{aligned}&\frac{f((1+\epsilon_n)x_n)-f(x_n)}{\epsilon_n} - x_n f'(x_n) \\ =\ & \frac{2x_n}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right) - x_n\cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) \\ =\ & (4n+1)(0-1) - 0 = -(4n+1)\end{aligned}$$

Si il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, cette quantité devrait tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ce n'est pas le cas donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *(Ens 2024)*

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $\sup\limits_{x\in[0;1]} (|P_n(x) - \mathrm{e}^x|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Montrer que $Deg(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction

On raisonne par l'absurde.

La définition de $Deg(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ est :

$\forall A > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ Deg(P_n) \geq A$

La négation est :

$\exists A > 0$ tq $\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0$ tq $Deg(P_n) < A$

On peut ainsi construire une suite extraite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}\ Deg(Q_n) \leq d$ un entier fixé.

On a toujours $\sup\limits_{x\in[0;1]} (|Q_n(x) - \mathrm{e}^x|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- **Première méthode**

  On se donne alors $N+1$ points deux à deux distincts dans $[0;1]$: $x_0, \ldots, x_N$.

  Pour tout i compris entre 0 et N, soit $L_i = \dfrac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} (X - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N} (x_i - x_j)}$

  On a vu en cours :

  $\forall Q \in \mathbb{R}_N[X]\ Q(X) = \sum\limits_{i=0}^{N} Q(x_i) L_i(X)$

  On en déduit :

  $\forall x \in [0;1]\ \forall n \in \mathbb{N}\ Q_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} Q_n(x_i) L_i(x)$

  En faisant tendre n vers $+\infty$ à x fixé, on obtient :

  $\forall x \in [0;1]\ \ \mathrm{e}^x = \sum\limits_{i=0}^{N} \mathrm{e}^{x_i} L_i(x)$

  et la fonction exponentielle est polynômiale sur $[0;1]$.

  C'est impossible : les dérivées successives d'une fonction polynomiale finissent par être nulles contrairement au cas de la fonction exponentielle.

- **Deuxième méthode**

  On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_d[X] \oplus \mathbb{R}\exp$ de $\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.

  F est un sous-espace stable par la dérivation. Celle-ci étant linéaire et F étant de dimension finie, la dérivation est continue.

  Or ici la suite (Q_n) converge vers exp (pour la norme $\|.\|_\infty$) donc la suite (Q_n') converge vers $\exp' = \exp$.

  On peut évidemment recommencer et la suite $(Q_n^{(d+1)})$ converge uniformément vers la fonction exponentielle sur $[0;1]$.

  Les fonctions $Q_n^{(d+1)}$ étant toutes nulles, on aboutit à une contradiction.

Exercice 7 *(X 2024)*

Soit $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{k\geq 0} a_{k,n}z^k$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
On note B l'ensemble des nombres complexes de module ≤ 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la somme de la série entière $\sum_{k\geq 0} a_{k,n}z^k$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in B\ \ |f_n(z)| \leq M$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leq r\}$ pour tout $r < 1$.

Correction
On note ϕ la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in [0;1[$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-ik\theta}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}r^p\,\mathrm{e}^{ip\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}r^p\,\mathrm{e}^{i(p-k)\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $g_p \begin{cases}[0;2\pi] \to \mathbb{C}\\ \theta \mapsto a_{p,n}r^p\,\mathrm{e}^{i(p-k)\theta}\end{cases}$

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, g_p est continue sur $[0;2\pi]$.
- $\forall p \in \mathbb{N}\ \|g_p\|_\infty = |a_{p,n}|\,r^p$
  C'est le terme général d'une série convergente car $r < 1 \leq R_n$.
  Donc la série de fonctions de terme général g_p converge normalement sur $[0;2\pi]$.

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi} g_p(\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_{p,n}r^p\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(p-k)\theta}\mathrm{d}\theta\right)\\ &= a_{k,n}r^k \text{ en détaillant}\end{aligned}$$

On en déduit :
$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2\ \forall r \in [0;1[\ |a_{n,k}|\,r^k \leq M$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n \begin{cases}[0;2\pi] \to \mathbb{C}\\ \theta \mapsto f_n\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-ik\theta}\end{cases}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est continue et intégrable sur $[0;2\pi]$.
- La suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $[0;2\pi]$ vers la fonction $h \begin{cases}[0;2\pi] \to \mathbb{C}\\ \theta \mapsto \phi\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\mathrm{e}^{-ik\theta}\end{cases}$
- Conformément au programme, on laisse de côté la question de la continuité de h.
- **Domination**
  $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in [0;2\pi]\ \ |h_n(\theta)| \leq M$ avec $\theta \mapsto M$ continue, positive et intégrable sur $[0;2\pi]$.

D'après le théorème de convergence dominée, $a_{k,n}r^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \phi\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$
Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note b_k sa limite et on a :
$\forall r \in [0;1[\ b_k r^k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \phi\left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\,\mathrm{e}^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$
$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2\ \forall r \in [0;1[\ |a_{n,k}|\, r^k \leq M$
Donc en passant à la limite :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall r \in [0;1[\ |b_k|\, r^k \leq M$
et le rayon de convergence de la série entière $\sum b_k z^k$ est supérieur ou égal à 1.
On note Φ sa somme.
Soit $r \in [0;1[$.
Soit $\rho \in]0;r[$

$$\begin{aligned}
\forall z \in D_f(0,r)\ \forall n \in \mathbb{N}\ |f_n(z)-\Phi(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k,n}-b_k)\,z^k\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N}|a_{k,n}-b_k|\,|z|^k + \sum_{k=N+1}^{+\infty}|a_{n,k}|\,|z|^k + \sum_{k=N+1}^{+\infty}|b_k|\,|z|^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{N}|a_{k,n}-b_k| + 2M\sum_{k=N+1}^{+\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{N}|a_{k,n}-b_k| + \frac{2M}{1-\frac{r}{\rho}}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{N+1}
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.
$\dfrac{2M}{1-\frac{r}{\rho}}\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\dfrac{2M}{1-\frac{r}{\rho}}\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^{N+1} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$
Pour tout k compris entre 0 et N, $|a_{k,n}-b_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :
$\forall k \in [\![0;N]\!]\ \exists n_k \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_k\ \ |a_{k,n}-b_k| \leq \dfrac{\epsilon}{2(N+1)}$
On en déduit pour tout $n \geq \max(N, n_0, \ldots, n_N)$ et tout z de module inférieur ou égal à r : $|f_n(z)-\Phi(z)| \leq \epsilon$
Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers Φ sur $D(0,r)$.
Par unicité de la limite, ϕ et Φ coïncident sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 8 *(Mines 2024)*

Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière en 0 et telle que :
$\forall x\ x\varphi'(x) = x + \varphi(x)^2$

Correction

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et S sa somme.

$$\begin{aligned}
& \forall x \in]-R;R[\ xS'(x) = x + S(x)^2 \\
\iff\ & \forall x \in]-R;R[\ x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = x + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n \\
\iff\ & \forall x \in]-R;R[\ \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n} = x + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n \\
\iff\ & \begin{cases} 0 = a_0^2 \\ a_1 = 1 + 2a_0a_1 \\ \forall n \geq 2\ n a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \end{cases} \\
\iff\ & \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2\ a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \end{cases}
\end{aligned}$$

Réciproquement, il faut démontrer que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :
$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2\ a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \end{cases}$
alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est strictement positif.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![0;n]\!]\ \ |a_k| \leq 1$
$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie ($n\geq 1$).

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k}\right| \text{ car } n+1 \geq 2 \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|a_{n+1-k}| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&\leq \frac{n}{n+1} \leq 1
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc prouvé :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n| \leq 1$
On en déduit :
$R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) \geq R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = 1$

Exercice 9 *(Centrale 2024)*

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.
On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

1. Trouver f.
2. Trouver l'expression des u_n.

Correction

1. On commence par montrer que le rayon de convergence de la série entière est strictement positif.
   La technique classique consiste à majorer $\left|\dfrac{u_n}{n!}\right|$ par $c\rho^n$ avec c et ρ bien choisis.
   On va donc considérer ici l'hypothèse de récurrence :
   $\mathcal{P}(n) : \forall k \in [\![0; n]\!]\ |u_k| \leq |a|\,\rho^k k!$
   avec ρ choisi pour que la propriété soit héréditaire.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{array}{rcl} |u_{n+1}| & \leq & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |u_k|\,|u_{n-k}| \\ & \leq & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} |a|\,\rho^k k!\,|a|\,\rho^{n-k}(n-k)! \\ & \leq & |a|^2\,\rho^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} n! = |a|^2\,\rho^n (n+1)n! \\ & \leq & \dfrac{|a|}{\rho}\,|a|\,\rho^{n+1}(n+1)! \end{array}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si on prend $\rho = |a|$, ce qui pose le problème de $a = 0$.
   Le cas $a = 0$ est de peu d'intérêt car on montre facilement par récurrence que tous les a_n sont nuls.
   On supposera donc dans la suite $a \neq 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}\ \left|\dfrac{u_n}{n!}\right| \leq |a|^{n+1}$
   Donc $R = R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n\right) \geq R_{CV}\left(\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a|^{n+1}\, x^n\right) = \dfrac{1}{|a|}$ (par d'Alembert par exemple)

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in]-R; R[\ f'(x) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{u_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \frac{u_{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ & = & f(x)^2 \end{array}$$

   Il s'agit ensuite de diviser par $f(x)$.
   $f(0) \neq 0$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta; \eta[$, $f(x) \neq 0$.

Donc :
$\forall x \in]-\eta;\eta[\ \dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$
En intégrant et compte tenu de $f(0) = a$, on obtient :
$\forall x \in]-\eta;\eta[\ -\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{a} = x$
On en déduit facilement :
$\forall x \in]-\eta;\eta[\ f(x) = \dfrac{a}{1-ax}$
Mais la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{1-ax}$ est développable en sérien entière sur $\left]-\dfrac{1}{|a|};\dfrac{1}{|a|}\right[$ avec :
$\forall x \in \left]-\dfrac{1}{|a|};\dfrac{1}{|a|}\right[\ \dfrac{a}{1-ax} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1}x^n$
Par propriété des séries entières, on en déduit :

- $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{|a|};\dfrac{1}{|a|}\right[\ f(x) = \dfrac{a}{1-ax}$
- $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = a^{n+1}n!$

Remarque
L'expression de u_n est facile à justifier par récurrence au moyen de la relation initiale :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![0;n]\!] \ u_k = a^{k+1}k!$
$\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}ka^{n-k+1}!(n-k)! = a^{n+2}\sum_{k=0}^{n} n! = a^{n+2}(n+1)n! \\
&= a^{n+1+1}(n+1)!
\end{aligned}$$