

Révisions 2026  
jeudi 11 juin 2026

941

**Exercice 1** (CCP 2024)

Solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $2x^2y' + y = 1$

**Exercice 2**

Montrer :

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \text{ tq } x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad \sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8}$$

**Exercice 3** (Ens 2024)

Déterminer les fonctions  $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , bornées et vérifiant la propriété suivante :  
il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $h(x, y) = a \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$ .

**Exercice 4** (Ens 2025)

Le but de l'exercice est de construire une solution non nulle pour l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad f'(x) + f(x) = \frac{-f(x+1)}{1+x^2}$$

1. Pour  $S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  résoudre l'équation  $f' + f = S$ .
2. Soit  $x_0 > 0$ . On définit une suite de fonctions sur  $[x_0; +\infty[$  par :

$$f_0(x) = e^{-x} \text{ et } f_{n+1}(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{f(t+1)e^t}{1+t^2} dt$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Montrer que cette suite est bien définie sur  $[x_0; +\infty[$ .

(b) Montrer que si  $x_0$  est suffisamment grand,  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est définie et est solution de l'équation (E).

Préciser son comportement quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 5** (Ens 2025)

Soient  $A(t)$  et  $B(t)$  des matrices symétriques définies positives dont les coefficients sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Montrer que si  $\frac{d}{dt}A(t) = B(t)A(t)$  alors

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \operatorname{tr}(B(t))$$

2. Montrer que si  $\frac{d}{dt}A(t) = B(t)A(t) + A(t)B(t)$  alors

$$2 \min(\operatorname{Sp}(B)) \operatorname{tr}(A(t)) \leq \frac{d}{dt} \operatorname{tr}(A(t)) \leq 2 \max(\operatorname{Sp}(B)) \operatorname{tr}(A(t))$$

**Exercice 6** (*X 2024*)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique.

Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  fermée, bornée et contenant la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M(E) \subset E$ .

Montrer que  $|\det(M)| \leq 1$ .

**Exercice 7** (*Ens 2025*)

Soit  $\gamma \in ]0; 1]$ . Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs. On suppose que

$$\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}$$

Montrer qu'il existe  $D > 0$  tel que

$$\forall n \geq 1 \quad x_n \leq Dn^{\frac{1}{\gamma}}$$

Que se passe-t-il pour  $\gamma = 0$  ?

**Exercice 8** (*Ens 2025*)

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  avec  $f'' \geq 0$  et telle qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f''(x_0) > 0$ . On note

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y \geq f(x)\} \text{ et } C = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que pour tout  $X \in A$  et  $e \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ ,  $\{X + \lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C \neq \emptyset$

**Exercice 9** (*Ens 2025*)

Soit

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) \sin(yt)}{(1+t)^2} dt$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer qu'elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = \pm x\}$ .
3. Montrer que la fonction  $x \mapsto f(x, x)$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
4. (Bonus)  $f$  est-elle  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ?

**Exercice 10** (*Ens 2024*)

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Soit  $f_a$  la solution du problème de Cauchy  $\mathcal{P}_a \begin{cases} y' - y = g(x) \\ y(0) = a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$

Montrer qu'il existe un et seul réel  $a$  tel que  $f_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 11** (*Ens 2025*)

Soit  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; 1]$  qui satisfait l'équation différentielle  $y' = -\sin(y)$  et la condition initiale  $y(0) = 1$ .

Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) e^t$  existe et qu'elle est finie.

**Exercice 12** (*Ens 2025*)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur  $[-\pi; \pi]$  :

$$x''(t) - x(t) = \cos(2t)$$

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(t) = 0$  si  $|t| \geq C$ . Montrer qu'il existe une solution à l'équation

$$x''(t) - x(t) = f(t)$$

telle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ .