

Révisions 2026
jeudi 11 juin 2026

941

Exercice 1 (CCP 2024)

Solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $2x^2y' + y = 1$

Correction

On commence par résoudre l'équation sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou \mathbb{R}_-^* .

L'équation sans second membre $2x^2y' + y = 0$ s'écrit $y' = -\frac{1}{2x^2}y$.

$\int \frac{-dx}{2x^2} = \frac{1}{2x}$ donc la solution générale de l'ESSM est $y = C e^{1/(2x)}$.

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante ou remarquer que la fonction constante égale à 1 est solution.

La solution générale de l'équation complète sur I est donc $y = 1 + C e^{1/(2x)}$.

Soit y une solution définie sur \mathbb{R} .

$\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tq :

$$\forall x < 0 \quad y(x) = 1 + C_1 e^{1/(2x)}$$

$$\forall x > 0 \quad y(x) = 1 + C_2 e^{1/(2x)}$$

y est dérivable en 0 donc y est continue en 0. Mais $e^{1/(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc $C_2 = 0$.

Réciproquement, soit $\phi \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + C e^{1/(2x)} \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

ϕ est continue sur \mathbb{R} , \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

$\forall x < 0 \quad \phi'(x) = -\frac{C}{2x^2} e^{1/(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ donc avec le théorème de la limite de la dérivée, ϕ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2x^2\phi'(x) + \phi(x) = 1$$

donc par continuité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2x^2\phi'(x) + \phi(x) = 1$$

Les solutions définies sur \mathbb{R} sont donc les fonctions $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + C e^{1/(2x)} \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ avec C une constante réelle arbitraire.

Exercice 2

Montrer :

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \text{ tq } x + y + z = \frac{\pi}{2} \quad \sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8}$$

Correction

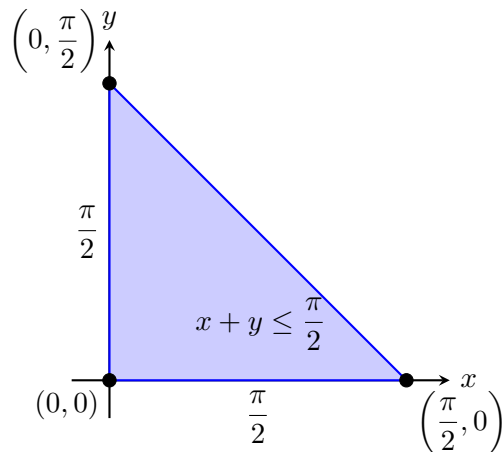
- **Une solution proche du cours**

Il s'agit de montrer :

$$\forall (x, y) \in \Delta \quad f(x, y) \leq \frac{1}{8}$$

Avec $\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ et

$$f \begin{cases} \Delta \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \sin(x) \sin(y) \cos(x + y) \end{cases}$$



Δ est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 et f est continue donc l'existence du maximum est assurée.

Examinons la fonction f sur les trois côtés du triangle :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x, 0) = 0$$

$$\forall y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f(0, y) = 0$$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f\left(x, \frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

La fonction f prenant des valeurs strictement positives sur Δ , le maximum est atteint en un point intérieur. C'est donc aussi un maximum local et par suite un point critique.

Recherchons les points critiques de f :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sin(y) (\cos(x) \cos(x+y) - \sin(x) \sin(x+y)) = 0 \\ \sin(x) (\cos(y) \cos(x+y) - \sin(y) \sin(x+y)) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos(2x+y) = 0 \\ \cos(x+2y) = 0 \end{cases} \\ &\quad \text{car à l'intérieur de } \Delta, \sin(x) \text{ et } \sin(y) \text{ sont non nuls} \\ &\iff \begin{cases} 2x+y = \frac{\pi}{2} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\quad \text{car à l'intérieur de } \Delta, 0 < 2x+y < \frac{3\pi}{2} \text{ et } 0 < x+2y < \frac{3\pi}{2} \\ &\iff \begin{cases} x-y = 0 \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\iff x = y = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall (x, y) \in \Delta \quad f(x, y) \leq f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$$

• **La solution de Deepseek**

Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$ tels que $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Montrons que :

$$\sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8}.$$

1. Concavité de $\ln \circ \sin$

La fonction $\ln \circ \sin$ est concave sur $]0, \pi[$ car sa dérivée seconde est négative :

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln(\sin x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

2. Application de l'inégalité de Jensen

Par concavité et l'inégalité de Jensen :

$$\frac{\ln(\sin x) + \ln(\sin y) + \ln(\sin z)}{3} \leq \ln\left(\sin\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right).$$

Avec $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\frac{\ln(\sin x) + \ln(\sin y) + \ln(\sin z)}{3} \leq \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

En prenant l'exponentielle :

$$\sqrt[3]{\sin x \sin y \sin z} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x \sin y \sin z \leq \frac{1}{8}.$$

3. Cas d'égalité

L'égalité a lieu si et seulement si $x = y = z = \frac{\pi}{6}$, ce qui donne :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Conclusion

Nous avons donc démontré que pour tous $x, y, z \geq 0$ avec $x + y + z = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8},$$

avec égalité si et seulement si $x = y = z = \frac{\pi}{6}$.

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \text{ tels que } x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad \sin(x) \sin(y) \sin(z) \leq \frac{1}{8}$$

Exercice 3 (Ens 2024)

Déterminer les fonctions $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, bornées et vérifiant la propriété suivante :
il existe deux réels a et b tels que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = a \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.

Correction

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, bornée telle qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = a \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + b \frac{\partial h}{\partial y}(x, y).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\phi \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto h(x + at, y + bt) \end{cases}$

h est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi'(t) = a \frac{\partial h}{\partial x}(x + at, y + bt) + b \frac{\partial h}{\partial y}(x + at, y + bt) = h(x + at, y + bt) = \phi(t)$$

Donc :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in \mathbb{R} \quad \phi(t) = C e^t$$

Mais h est bornée donc ϕ aussi ce qui entraîne $C = 0$

D'où $h(x, y) = \phi(0) = 0$.

h est donc la fonction nulle.

La réciproque est triviale.

Exercice 4 (Ens 2025)

Le but de l'exercice est de construire une solution non nulle pour l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad f'(x) + f(x) = \frac{-f(x+1)}{1+x^2}$$

1. Pour $S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ résoudre l'équation $f' + f = S$.
2. Soit $x_0 > 0$. On définit une suite de fonctions sur $[x_0; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \text{ et } f_{n+1}(x) = e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que cette suite est bien définie sur $[x_0; +\infty[$.
- (b) Montrer que si x_0 est suffisamment grand, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et est solution de l'équation (E).
Préciser son comportement quand x tend vers $+\infty$.

Correction

1. ESSM : $f' + f = 0$

Solution générale $f(x) = C e^{-x}$ Variation de la constante : on cherche une solution de l'équation complète sous la forme $f(x) = C(x) e^{-x}$.

$$f'(x) + f(x) = C'(x) e^x$$

On en déduit que la solution générale de l'équation complète est :

$$f(x) = e^{-x} \int_0^x e^t S(t) dt + C e^{-x}.$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(n)$: f_n est définie et continue sur $[x_0; +\infty[$ et il existe M_n dans \mathbb{R}_+ telle que :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[; 0 \leq f_n(x) \leq M_n e^{-x}$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie avec $M_0 = 1$

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\forall t \in [x_0; +\infty[\left| \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} \right| \leq \frac{M_n e^{-1}}{1+t^2}$$

Donc la fonction $t \mapsto \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2}$ est intégrable en $+\infty$, ce qui assure que f_{n+1} est bien définie.

La positivité de f_{n+1} se déduit immédiatement de celle de f_n .

$$\begin{aligned} \forall x \in [x_0; +\infty[f_{n+1}(x) &= e^{-x} \left(\int_x^{x_0} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt \right) \\ &= e^{-x} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt - e^{-x} \int_{x_0}^x \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Sous cette forme, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que f_{n+1} est continue (et même \mathcal{C}^1).

$$\begin{aligned} \forall x \in [x_0; +\infty[f_{n+1}(x) &\leq e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{M_n e^{-1}}{1+t^2} dt \\ &\leq M_n e^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) e^{-x} \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie avec $M_{n+1} = M_n e^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_0) \right)$

- (b) On choisit x_0 tel que $r = e^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x_0) \right) < 1$

Tout nombre $x_0 \in \mathbb{R}_+$ convient car $e > \frac{\pi}{2}$

Par contre, $e < \pi$ et on ne peut pas prendre pour x_0 n'importe quel réel.

D'après la question précédente :

$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [x_0; +\infty[0 \leq f_n(x) \leq r^n e^{-x} \leq r^n e^{-x_0}$ indépendant de x et terme général d'une série convergente.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[x_0; +\infty[$.

Les f_n étant toutes continues, leur somme l'est aussi.

$$\forall x \in [x_0; +\infty[\quad S(x) = e^{-x} + \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = e^{-x} + e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt$$

On fixe x et on applique le théorème N_1 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n \begin{cases} [x; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} \end{cases}$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[x; +\infty[$:

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [x; +\infty[, |g_n(t)| \leq \frac{M_n e^{-1}}{1+t^2}$$

avec $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ intégrable en $+\infty$.

- La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $[x; +\infty[$:

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [x; +\infty[, |g_n(t)| \leq \frac{M_n e^{-1}}{1+t^2} \leq r^n \text{ avec } r < 1$$

On a même convergence normale, ce qui permet d'affirmer :

- La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue.

- $\int_x^{+\infty} |g_n(t)| dt \leq M_n \int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq \pi r^n$

Donc la série de terme général $\int_x^{+\infty} |g_n(t)| dt$ converge

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall x \in [x_0; +\infty[\quad S(x) &= e^{-x} + e^{-x} \int_x^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt \\ &= e^{-x} + e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{S(t+1) e^t}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

S étant continue, on en déduit comme ci-dessus avec la relation de Chasles et le théorème fondamental de l'analyse que S est \mathcal{C}^1 et :

$$\begin{aligned} \forall x \in [x_0; +\infty[\quad S'(x) &= -e^{-x} - e^{-x} \int_x^{+\infty} \frac{S(t+1) e^t}{1+t^2} dt - \frac{S(x+1)}{1+x^2} \\ &= -S(x) - \frac{S(x+1)}{1+x^2} \end{aligned}$$

S est bien solution de (E).

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [x_0; +\infty[\quad 0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1) e^t}{1+t^2} dt \leq r^n e^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right)$$

Donc :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [x_0; +\infty[\quad 0 \leq f_{n+1}(x) \leq r^n e^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) e^{-x}$$

Donc :

$$\forall x \in [x_0; +\infty[\quad 0 \leq S(x) - e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) \leq e^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \right) e^{-x} \frac{1}{1-r}$$

$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $S(x) - e^{-x} = o_{+\infty}(e^{-x})$.
Finalement en $+\infty$ $S(x) \sim e^{-x}$

Exercice 5 (*Ens 2025*)

Soient $A(t)$ et $B(t)$ des matrices symétriques définies positives dont les coefficients sont de classe \mathcal{C}^1 .

1. Montrer que si $\frac{d}{dt}A(t) = B(t)A(t)$ alors

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \operatorname{tr}(B(t))$$

2. Montrer que si $\frac{d}{dt}A(t) = B(t)A(t) + A(t)B(t)$ alors

$$2 \min(\operatorname{Sp}(B)) \operatorname{tr}(A(t)) \leq \frac{d}{dt} \operatorname{tr}(A(t)) \leq 2 \max(\operatorname{Sp}(B)) \operatorname{tr}(A(t))$$

Correction

1. On note $A_j(t)$ la j -ème colonne de la matrice $A(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det(A(t)) &= \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{C}an}(A_1(t), \dots, A_{j-1}(t), A'_j(t), A_{j+1}(t), \dots, A_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{C}an}(A_1(t), \dots, A_{j-1}(t), B(t)A_j(t), A_{j+1}(t), \dots, A_n(t)) \end{aligned}$$

L'application $\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (X_1, \dots, X_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \det_{\mathcal{C}an}(X_1, \dots, X_{j-1}, BX_j, X_{j+1}, \dots, X_n) \end{cases}$ est une

forme n linéaire alternée donc elle est proportionnelle au déterminant dans la base canonique. L'image de la base canonique étant $\operatorname{tr}(B)$, on peut conclure mais ce résultat n'est pas au programme.

Toute tentative d'appel au théorème spectral est vouée à l'échec car les matrices A et B dépendent de t , il en est de même des matrices de passage.

On est donc ramené à la solution proposée par les examinateurs :

t est fixé et ϵ tend vers 0.

$$\begin{aligned} \det(A(t + \epsilon)) &= \det(A(t) + \epsilon A'(t) + o(\epsilon)) = \det(A(t) + \epsilon B(t)A(t) + o(\epsilon)) \\ &= \det\left(\left(\frac{1}{\epsilon} I_n + B(t) + o(1)\right) (\epsilon A(t))\right) \quad A(t) \text{ étant bien inversible} \\ &= \epsilon^n \det(A(t)) \chi_{-B(t)+o(1)}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \\ &= \epsilon^n \det(A(t)) \left(\frac{1}{\epsilon^n} + \operatorname{tr}(B(t) + o(1)) \frac{1}{\epsilon^{n-1}} + \dots\right) \\ &= \det(A(t)) + \operatorname{tr}(B(t)) \det(A(t)) \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

où on utilise la continuité des coefficients du polynôme caractéristique (par rapport à la matrice).

Les examinateurs ont contourné cette difficulté de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \det(A(t + \epsilon)) &= \det(A(t) + \epsilon A'(t) + o(\epsilon)) = \det(A(t) + \epsilon B(t)A(t) + o(\epsilon)) \\
 &= \det(A(t)) \det(I_n + \epsilon P(t)D(t)P(t)^{-1} + o(\epsilon)) \text{ en diagonalisant } B(t) \\
 &= \det(A(t)) \det(P(I_n + \epsilon D(t) + o(\epsilon))P^{-1}) \\
 &= \det(A(t)) \det_{Can}(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n)
 \end{aligned}$$

où les X_i sont les colonnes de la matrice $I_n + \epsilon D(t)$ et les Y_i des colonnes en $o(\epsilon)$.

Quand on développe le déterminant, on a une somme de 2^n termes. Dès qu'il y a un Y_i on est en $o(\epsilon)$.

$$\text{Donc : } \det(I_n + \epsilon D(t) + o(\epsilon)) = \prod_{i=1}^n (1 + d_{i,i}\epsilon) + o(\epsilon) = 1 + \epsilon \sum_{i=1}^n d_{i,i} + o(\epsilon)$$

et on conclut facilement.

$$2. \frac{d}{dt} \text{tr}(A(t)) = \text{tr}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right) \text{ car la trace est linéaire.}$$

Donc :

$\frac{d}{dt} \text{tr}(A(t)) = 2 \text{tr}(B(t)A(t)) = 2 \text{tr}(P(t)D(t)P(t)^T A(t))$ où $P(t)$ est une matrice orthogonale et $D(t)$ une matrice diagonale où les valeurs propres comptées avec leurs multiplicités de B sont rangées sur la diagonale de $D(t)$.

$$\text{Donc } \frac{d}{dt} \text{tr}(A(t)) = \text{tr}(D(t)P(t)^T A(t)P(t)) = \sum_{i=1}^n (D(t))_{i,i} (P(t)^T A(t)P(t))_{i,i}$$

$A(t)$ est symétrique définie positive donc $P(t)^T A(t)P(t)$ aussi et ses coefficients diagonaux sont positifs.

D'où :

$$2 \min(\text{Sp}(B)) \text{tr}(P(t)^T A(t)P(t)) \leq \frac{d}{dt} \text{tr}(A(t)) \leq 2 \max(\text{Sp}(B)) \text{tr}(P(t)^T A(t)P(t))$$

et on conclut facilement.

Exercice 6 (X 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique.

Soit E une partie de \mathbb{R}^n fermée, bornée et contenant la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(E) \subset E$.

Montrer que $|\det(M)| \leq 1$.

Correction

Le déterminant de M est le produit de ses valeurs propres complexes comptées avec leurs multiplicités. Il suffit donc de montrer :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(M) \quad |\lambda| \leq 1$$

On commence par le cas où λ est réelle.

$$\exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tq } MX = \lambda X$$

$$Y = \frac{X}{2\|X\|} \text{ appartient à } E \text{ car } \|Y\| = \frac{1}{2} \text{ donc } Y \in \mathcal{B}(0; 1) \subset E$$

Y est colinéaire à X donc $MY = \lambda Y$

E est stable par M donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k Y \in E$$

Mais :

$$\forall k \in \mathbb{N} M^k Y = \lambda^k Y$$

Donc la suite $(\lambda^k Y)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Comme Y est constant non nul, la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Donc $|\lambda| \leq 1$.

On traite ensuite le cas $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On note a la partie réelle de λ et b sa partie imaginaire.

Soit $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre (complexe) de M associé à la valeur propre λ .

M étant réelle, \bar{v} est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\bar{\lambda}$.

$\lambda \neq \bar{\lambda}$ donc (v, \bar{v}) est une famille libre de \mathbb{C}^n .

Soient $e_1 = \Re(v)$ et $e_2 = \Im(v)$.

e_1 et $e_2 \in \mathbb{R}^n$

La famille (e_1, e_2) est libre.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.

$$\lambda_1 \frac{v + \bar{v}}{2} + \lambda_2 \frac{v - \bar{v}}{2i} = 0$$

$$\lambda_1(v + \bar{v}) - i\lambda_2(v - \bar{v}) = 0$$

$$(\lambda_1 - i\lambda_2)v + (\lambda_1 + i\lambda_2)\bar{v} = 0$$

Donc $\lambda_1 + i\lambda_2 = 0$ avec λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

(e_1, e_2) est bien une famille libre de \mathbb{R}^n .

$$\begin{aligned} M e_1 &= M \frac{v + \bar{v}}{2} = \frac{1}{2}(Mv + M\bar{v}) = \frac{1}{2}((a + ib)v + (a - ib)\bar{v}) \\ &= a \frac{v + \bar{v}}{2} + ib \frac{v - \bar{v}}{2} = a e_1 + i b e_2 = a e_1 - b e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M e_2 &= M \frac{v - \bar{v}}{2i} = \frac{1}{2i}(Mv - M\bar{v}) = \frac{1}{2i}((a + ib)v - (a - ib)\bar{v}) \\ &= a \frac{v - \bar{v}}{2i} + b \frac{v + \bar{v}}{2} = a e_2 + b e_1 \end{aligned}$$

Le plan P engendré par la famille (e_1, e_2) est stable par M . On note u l'endomorphisme de P induit par M .

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

θ existe bien car $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$

Soit X un vecteur non nul de P .

$Y = \frac{X}{2\|X\|}$ appartient à P et à E .

$\exists (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Y = y_1 e_1 + y_2 e_2$.

$$\forall k \in \mathbb{N} M^k Y = u^k(Y) = \lambda^k ((\cos(k\theta)y_1 - \sin(k\theta)y_2) e_1 + (\sin(k\theta)y_1 + \cos(k\theta)y_2) e_2)$$

La suite $(Y^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R}^n mais aussi dans P donc ses coordonnées sont bornées dans \mathbb{R} .

Donc la suite $(|\lambda|^{2k} ((\cos(k\theta)y_1 - \sin(k\theta)y_2)^2 + (\sin(k\theta)y_1 + \cos(k\theta)y_2)^2))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Donc la suite $(|\lambda|^{2k} (y_1^2 + y_2^2))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Y est non nul donc $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$ et $y_1^2 + y_2^2$ est une constante non nulle.

Donc la suite $(|\lambda|^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 7 (Ens 2025)

Soit $\gamma \in]0; 1]$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose que

$$\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}$$

Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad x_n \leq Dn^{\frac{1}{\gamma}}$$

Que se passe-t-il pour $\gamma = 0$?

Correction

On raisonne par récurrence en notant toutes les conditions que doit vérifier D .

Pour pouvoir initialiser la récurrence, on a besoin de $D \geq x_1$.

Supposons la propriété vraie au rang n .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq x_n + x_n^{1-\gamma} \\ &\leq Dn^{\frac{1}{\gamma}} + D^{1-\gamma} n^{\frac{1}{\gamma}-1} = Dn^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{D^{-\gamma}}{n} \right) \end{aligned}$$

On a donc besoin de $n^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{D^{-\gamma}}{n} \right) \leq (n+1)^{\frac{1}{\gamma}}$ ou encore :

$$1 + \frac{D^{-\gamma}}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 1 + \frac{1}{\gamma n} + \dots$$

Soit $f : x \mapsto x^{\frac{1}{\gamma}}$.

f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{\gamma} x^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

$$\forall x > 0 \quad f''(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma^2} x^{\frac{1}{\gamma}-2} > 0$$

Donc f est convexe sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = f\left(\frac{1}{n}\right) \geq f(1) + \frac{f'(1)}{n} = 1 + \frac{1}{n\gamma}$$

Il suffit donc de prendre $D \geq x_1$ tel que $D^{-\gamma} \leq \frac{1}{\gamma}$ pour que la récurrence fonctionne.

$D^{-\gamma} \xrightarrow{D \rightarrow +\infty} 0$ donc un tel D existe.

Dans le cas $\gamma = 0$ on a $x_{n+1} \leq 2x_n$.

On en déduit la majoration $x_n \leq 2^n x_1$, qu'on ne peut pas améliorer. (x_n) n'est plus dominée par une puissance de n .

Exercice 8 (Ens 2025)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f'' \geq 0$ et telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x_0) > 0$. On note

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y \geq f(x) \right\} \text{ et } C = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que pour tout $X \in A$ et $e \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, $\{X + \lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C \neq \emptyset$

Correction

Si $X \in C$ alors pour tout $e \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, $X \in \{X + \lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C$

On suppose donc $X \in A \setminus C$ ie $X = (x, y)$ avec $y > f(x)$.

Soit $e = (e_x, e_y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si e_x est nul alors e_y est non nul et $X - (y - f(x))e \in \{X + \lambda e, \lambda \in \mathbb{R}\} \cap C$

On suppose donc $e_x \neq 0$.

On raisonne par l'absurde en supposant :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} X + \lambda e = (x + \lambda e_x, y + \lambda e_y) \notin C$

On a donc :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} y + \lambda e_y - f(x + \lambda e_x) \neq 0$

Mais la fonction $\lambda \mapsto y + \lambda e_y - f(x + \lambda e_x)$ est continue sur \mathbb{R} , strictement positive en donc avec le TVI :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda \mapsto y + \lambda e_y - f(x + \lambda e_x) > 0$

Mais, par convexité :

$\forall (\lambda, h) \in \mathbb{R}^2 f(x + \lambda e_x) = f(x + h + \lambda e_x - h) \geq f(x + h) + (\lambda e_x - h)f'(x + h)$

Donc :

$\forall (\lambda, h) \in \mathbb{R}^2 y + \lambda e_y > f(x + h) + (\lambda e_x - h)f'(x + h)$

Donc :

$\forall (\lambda, h) \in \mathbb{R}^2 (e_y - e_x f'(x + h))\lambda + y - f(x + h) + h f'(x + h) > 0$

Donc :

$\forall h \in \mathbb{R} e_y - e_x f'(x + h) = 0$

Comme e_x est non nul, on en déduit que f' est constante, en contradiction d'un x_0 tel que $f''(x_0) > 0$.

Exercice 9 (Ens 2025)

Soit

$$f(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) \sin(yt)}{(1+t)^2} dt$$

1. Montrer que cette fonction est bien définie et continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = \pm x\}$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x, x)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
4. (Bonus) f est-elle \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Correction

1. Le théorème de continuité sous le signe \int du programme ne concerne que les fonctions d'une seule variable.

On pourrait s'en servir pour montrer que f est continue par rapport à x et par rapport à y mais cela ne prouve pas la continuité de f .

Il faut donc avoir recours à un théorème hors-programme dont les hypothèses sont naturelles et qui se démontre en combinant caractérisation séquentielle et convergence dominée. Les examinateurs n'ont pas fait de difficulté sur ce point.

$$\text{Soit } g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) \mapsto \frac{\cos(xt) \sin(yt)}{(1+t)^2} \end{cases} .$$

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $t \mapsto g(x, y, t)$ est continue.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $(x, y) \mapsto g(x, y, t)$ est continue.
- **Domination**

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad |g(x, y, t)| \leq \frac{1}{(1+t)^2}$$

avec $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+

Donc f est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

2. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = \pm x\}$.

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y^2 - x^2 \neq 0\}$ avec $(x, y) \mapsto y^2 - x^2$ continue donc U est bien un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Formellement $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{-t \sin(xt) \sin(yt)}{(1+t)^2} dt$ et apparaît une intégrale qui ne converge pas absolument. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème de dérivation sous le signe \int .

Il faut donc commencer par faire une intégrations par parties en dérivant $\frac{1}{(1+t)^2}$ et en intégrant $\cos(xt) \sin(yt)$.

Sur le corrigé de l'Ens, il y a deux intégrations par parties successives mais on va plus vite avec de la trigonométrie.

On fixe (x, y) dans U .

$$u(t) = \frac{1}{(1+t)^2}, \quad u'(t) = -\frac{2}{(1+t)^3}$$

$$v'(t) = \cos(xt) \sin(yt) = \frac{1}{2} (\sin(yt + xt) + \sin(yt - xt)) = \frac{1}{2} (\sin((x+y)t) - \sin((x-y)t))$$

$$v(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos((x+y)t)}{x+y} + \frac{\cos((x-y)t)}{x-y} \right)$$

u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$: l'intégration par parties est justifiée.

Donc :

$$\forall (x, y) \in U \quad f(x, y) = -\frac{y}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x+y} \int_0^{+\infty} \frac{\cos((x+y)t)}{(1+t)^3} dt + \frac{1}{x-y} \int_0^{+\infty} \frac{\cos((x-y)t)}{(1+t)^3} dt$$

Il est clair qu'on peut se contenter de montrer que la fonction $f_1 : (x, y) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos((x+y)t)}{(1+t)^3} dt$

est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Pour cela, il faut montrer que les deux dérivées partielles existent et sont continue. Là encore, on peut se contenter de le faire en détail pour la dérivée partielle par rapport à x .

Pour l'existence de la dérivée partielle, on fixe y .

$$\text{Soit } g_1 \begin{cases} (\mathbb{R} \setminus \{-y; y\}) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\cos((x+y)t)}{(1+t)^3} \end{cases}$$

- g_1 est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à x avec :

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R} \setminus \{-y; y\}) \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, t) = -\frac{t \sin((x+y)t)}{(1+t)^3}$$

- La fonction g_1 est continue et intégrable par rapport à t : $g_1(x, t) = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)$
- La fonction $\frac{\partial g_1}{\partial x}$ est continue par rapport à t .

• **Domination**

$$\forall (x, t) \in (\mathbb{R} \setminus \{-y; y\}) \times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t)^3}$$

avec $t \mapsto \frac{t}{(1+t)^3}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ : $\frac{t}{(1+t)^3} = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

Donc $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ est définie sur U et :

$$\forall (x, y) \in U \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = - \int_0^{+\infty} \frac{t \sin((x+y)t)}{(1+t)^3} dt$$

On montre ensuite la continuité de $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ comme fonction de deux variables en raisonnant comme dans la première question.

$$3. \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) \sin(xt)}{(1+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{2(1+t)^2} dt$$

On en déduit au moyen d'une intégration par parties à justifier :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x, x) = \frac{1}{4x} - \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{(1+t)^3} dt$$

et on applique sans difficulté le théorème de dérivation sous le signe \int

4. Sur U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} \\ &+ \frac{1}{(x+y)^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos((x+y)t)}{(1+t)^3} dt + \frac{1}{x+y} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin((x+y)t)}{(1+t)^3} dt \\ &- \frac{1}{(x-y)^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos((x-y)t)}{(1+t)^3} dt \\ &- \frac{1}{x-y} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin((x-y)t)}{(1+t)^3} dt \end{aligned}$$

Si on considère $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x+h)$ avec $x \neq 0$ et $h \neq 0$, les termes de la deuxième et de la quatrième ligne ont une limite finie.

$$\frac{2xh}{(x^2 - (x+h)^2)^2} = \frac{1}{2xh} - \frac{1}{2x^2} + o(1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(-ht)}{(1+t)^3} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^3} dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\infty.$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne peut donc pas être continue en (x, x) .

Donc f n'est pas \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 10 (Ens 2024)

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Soit f_a la solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_a \begin{cases} y' - y = g(x) \\ y(0) = a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$

Montrer qu'il existe un et seul réel a tel que $f_a(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Correction

L'unicité est très facile à prouver :

Si f_a et f_b tendent vers 0 en $+\infty$ alors il en est de même de $f_a - f_b$.

Mais $f_a - f_b$ est solution de l'équation sans second membre : $y' - y = 0$, par conséquent :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \in \mathbb{R} \ f_a(t) - f_b(t) = C e^t$$

Donc $C e^t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui entraîne $C = 0$.

On a donc $a - b = f_a(0) - f_b(0) = C e^0 = 0$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Soit $C_a \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f_a(t) e^{-t} \end{cases}$ (c'est l'idée de la méthode de la variation de la constante).

$$\forall t \in \mathbb{R} \ C'_a(t) = f'_a(t) e^{-t} - f_a(t) e^{-t} = e^{-t} (f'_a(t) - f_a(t)) = g(t) e^{-t}$$

Mais $C_a(0) = f_a(0) = a$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ C_a(t) = a + \int_0^t g(x) e^{-x} dx$$

$g(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $g(x) e^{-x} = o(e^{-x})$ et la fonction $x \mapsto g(x) e^{-x}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \ f_a(t) &= \left(a + \int_0^t g(x) e^{-x} dx \right) e^t \\ &= \left(a + \int_0^{+\infty} g(x) e^{-x} dx - \int_t^{+\infty} g(x) e^{-x} dx \right) e^t \\ &= \left(a + \int_0^{+\infty} g(x) e^{-x} dx \right) e^t - e^t \int_t^{+\infty} g(x) e^{-x} dx \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.

$g(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc :

$$\exists t_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall t \geq t_0 \ |g(t)| \leq \epsilon$$

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0 \ \left| e^t \int_t^{+\infty} g(x) e^{-x} dx \right| &\leq e^t \int_t^{+\infty} |g(x)| e^{-x} dx \\ &\leq e^t \int_t^{+\infty} \epsilon e^{-x} dx = \epsilon e^t [-e^{-x}]_t^{+\infty} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Donc $e^t \int_t^{+\infty} g(x) e^{-x} dx \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Par conséquent :

$$f_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \iff a = - \int_0^{+\infty} g(x) e^{-x} dx$$

et on a l'existence et l'unicité.

Exercice 11 (Ens 2025)

Soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; 1]$ qui satisfait l'équation différentielle $y' = -\sin(y)$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) e^t$ existe et qu'elle est finie.

Correction

Il est très important de noter que dans l'énoncé il est écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ y(t) \in [0; 1]$$

En fait on peut montrer que si la fonction y satisfait l'équation différentielle $y' = -\sin(y)$ et la condition initiale $y(0) = 1$ alors y est définie sur \mathbb{R} et $y(t) \in]0; 1]$ si $t \in \mathbb{R}_+$ mais cela nécessite des outils qui ne sont pas à votre programme.

$$\forall x \in [0; 1] \sin(x) \geq 0$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ y'(t) = -\sin(y) \leq 0$$

La fonction y est décroissante et minorée par 0 donc $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} l \in [0; 1]$

Supposons $l > 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ l \leq y(t) \leq 1$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \sin(y(t)) \geq \sin(l) > 0$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ y'(t) \leq -\sin(l)$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ y(t) - y(0) = \int_0^t y'(x) dx \leq \int_0^t (-\sin(l)) dx = -t \sin(l) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

On en déduit $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde.

$$\text{Donc } l = 0 \text{ ie } y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Soit $z : t \mapsto y(t) e^t$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+ z'(t) &= y'(t) e^t + y(t) e^t = e^t(y'(t) + y(t)) \\ &= e^t(y(t) - \sin(y(t))) \end{aligned}$$

Par concavité de la fonction \sin sur $[0; 1]$:

$$\forall x \in [0; 1] \sin(x) \leq x$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ z'(t) \geq 0$$

La fonction z est croissante donc elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

$$\forall x \in [0; 1] \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

Cela peut se montrer avec une étude de fonction, avec le développement en série entière de la fonction \sin ou avec la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in [0; 1] \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin(t) dt \quad (\text{car } \sin^{(4)} = \sin)$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ z'(t) \leq e^t \frac{y(t)^3}{6} \leq \frac{e^{-2t}}{6} z(t)^3$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ y(t) > 0$$

En effet, si y s'annule en $t_0 > 0$, y est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -\sin(y) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ tout

comme la fonction nulle.

Moyennant certaines hypothèses sur l'équation différentielle, qui sont vérifiées ici, il y a unicité de la solution et y est la fonction nulle (les examinateurs ne font pas de difficulté sur ce point dans leur solution). C'est absurde.

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad z'(t)z(t)^{-3} \leq \frac{e^{-2t}}{6}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^t z'(x)z(x)^{-3} dx \leq \int_0^t \frac{e^{-2x}}{6} dx$$

ce qui donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2z(t)^2} \leq \frac{1 - e^{-2t}}{12} \leq \frac{1}{12}$$

On en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{1}{z(t)^2} \geq \frac{5}{6}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad z(t) \leq \sqrt{\frac{5}{6}}$$

La fonction z est majorée donc sa limite ne peut pas être infinie.

Exercice 12 (Ens 2025)

1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $[-\pi; \pi]$:

$$x''(t) - x(t) = \cos(2t)$$

2. Soit f une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(t) = 0$ si $|t| \geq C$. Montrer qu'il existe une solution à l'équation

$$x''(t) - x(t) = f(t)$$

telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.

Correction

1. L'équation homogène associée est $x'' - x = 0$.

L'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a deux racines distinctes 1 et -1.

La solution générale de l'équation homogène associée est donc $x(t) = A e^t + B e^{-t} = C \operatorname{ch}(t) + D \operatorname{sh}(t)$

On cherche une solution particulière de l'équation $x''(t) - x(t) = e^{2it}$ sous la forme $x(t) = C e^{2it}$ car $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$$X''(t) - x(t) = (2i)^2 C e^{2it} - C e^{2it} = -5C e^{2it} \text{ donc } C = -\frac{1}{5} \text{ convient.}$$

En prenant la partie réelle, on trouve que $x(t) = -\frac{1}{5} \cos(2t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle de l'énoncé.

La solution générale de cette équation est donc :

$$x(t) = -\frac{1}{5} \cos(2t) + A e^t + B e^{-t}$$

2. L'énoncé tient pour acquis l'existence d'une solution, notée g , de cette équation (ce n'est pas justifiable dans le cadre du programme actuel).

$$\forall t \geq C \quad g''(t) - g(t) = f(t) = 0$$

Donc :

$$\exists (A_+, B_+) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall t \geq C \quad g(t) = A_+ e^t + B_+ e^{-t}$$

De même :

$$\exists (A_-, B_-) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall t \leq -C \quad g(t) = A_- e^t + B_- e^{-t}$$

La fonction $h : t \mapsto -A_+ e^t - B_- e^{-t}$ est solution de l'équation homogène associée donc la

fonction $G = g + h$ est solution de l'équation différentielle de l'énoncé.

$$\forall t \geq C \quad G(t) = (B_+ - B_-) e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\forall t \leq -C \quad G(t) = (A_- - A_+) e^t \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$$