

Révisions 2026
lundi 15 juin 2026

941

Exercice 1 (CCP 2024)

Soit $E = \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto (f | g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \end{cases}$ est un produit scalaire.
2. Soit $H = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$.
Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

Exercice 2 (CCP 2024)

Soit E un espace euclidien et a et b deux vecteurs unitaires de E non colinéaires.

Soit $f \begin{cases} E \mapsto E \\ x \mapsto (a | x)b + (b | x)a \end{cases}$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, donner $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. Calculer $f(a+b)$ et $f(a-b)$ et en déduire que f est diagonalisable.

Exercice 3 (d'après Centrale Maths 2 2024)

Soit E un espace euclidien.

Soit a et b deux vecteurs non nuls de E .

Pour tout réel α , soit $f_\alpha \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + \alpha \frac{a}{\|a\|} \end{cases}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer qu'il existe une BON $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de E avec $\epsilon_1 = \frac{a}{\|a\|}$.
3. L'énoncé fournissait des fonctions Python, certaines complètes d'autres à compléter. Il s'agissait ensuite pour diverses valeurs de n , $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et α de calculer la matrice $P^T A P$ où A est la matrice dans la base canonique de f_α et P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} .
Il fallait observer quelque chose sur cette matrice et ensuite de l'expliquer.
Ici, la question sera simplement : que peut-on dire de la matrice de f_α dans la base \mathcal{B} (E étant un espace euclidien quelconque) ?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $f_\alpha \in GL(E)$.
5. Exprimer $f_\alpha \circ f_\beta$ où α et β sont deux réels.
6. Donner l'expression de f_α^{-1} .

7. La condition sur α de la question 4 reste-t-elle valable en dimension infinie ?

Exercice 4 (*Mines 2024*)

$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p , $B \in E$.
Donner $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\|^2$ soit minimale.

Exercice 5 (*Ens 2025*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n > p$. Soit $b \in \mathbb{R}^n$.

$$(P) : \text{trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|$$

Remarque

Ce n'est pas précisé dans l'énoncé mais il s'agit de la norme euclidienne canonique dans \mathbb{R}^n .

1. Donner $S_{(P)}$ l'ensemble des solutions de (P) .
2. Montrer qu'il existe un unique $\tilde{x} \in S_{(P)}$ de norme minimale, c'est à dire $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in S_{(P)}} \|y\|$.
3. (Bonus) Montrer que $x \in \mathbb{R}^p$ est solution de (P) si et seulement si $A^T Ax = A^T b$ et que $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$.

Exercice 6 (*Ens 2024*)

On définit pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|X\|_2 = \sqrt{\text{tr}(XX^T)}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\min_{U \in SO_2(\mathbb{R})} (\|A - UBU^T\|_2)$.

Exercice 7 (*Mines 2024*)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (u, v) \in E^2 \ (u \mid v) = 0 \implies (f(u) \mid f(v)) = 0$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.
Montrer que $e_i + e_j \perp e_i - e_j$.
2. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$.
Montrer que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
3. Montrer qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que :
 $\forall x \in E \ \|f(x)\| = \lambda \|x\|$
et en déduire que f peut se mettre sous la forme de la composition de deux endomorphismes qu'on précisera.

Exercice 8 (*Mines 2024*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice orthogonale P les coefficients diagonaux de la matrice $P^{-1}AP$ sont tous nuls.

Exercice 9 (*Ens 2025*)

1. Soit ABC un triangle non dégénéré du plan. On suppose que \widehat{ABC} est aigu. Montrer que :
 $AC^2 + BC^2 > AB^2$
2. Soient $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$. On définit les demi-droites $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{R}^3$ comme suit :

$$l_1 = \{te_1, t \in \mathbb{R}_+\}, \quad l_2 = \{te_2, t \in \mathbb{R}_+\}, \quad l_3 = \{te_3, t \in \mathbb{R}_+\}$$

On suppose que e_1, e_2, e_3 sont deux à deux orthogonaux.

Montrer que pour tout $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$ le triangle $A_1A_2A_3$ est aigu.