

Révisions 2026  
lundi 15 juin 2026

941

**Exercice 1** (CCP 2024)

Soit  $E = \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})$ .

1. Montrer que l'application  $\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto (f | g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \end{cases}$  est un produit scalaire.
2. Soit  $H = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 0\}$ .  
Montrer que  $H^\perp = \{0\}$ .

**Correction**

1. L'application ne pose pas de problème de définition.

• **Symétrie**

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (g | f) = \int_{-1}^1 g(t)f(t) dt = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt = (f | g)$$

• **Linéarité à gauche**

$$\begin{aligned} \forall (f_1, f_2, g) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 | g) &= \int_{-1}^1 (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))g(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (\lambda_1 f_1(t)g(t) + \lambda_2 f_2(t)g(t)) dt \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^1 f_1(t)g(t) dt + \lambda_2 \int_{-1}^1 f_2(t)g(t) dt \\ &= \lambda_1 (f_1 | g) + \lambda_2 (f_2 | g) \end{aligned}$$

On en déduit la linéarité à droite (grâce à la symétrie).

•  $\forall f \in E \quad (f | f) = \int_{-1}^1 (f(t)^2 \geq 0) dt \geq 0$

- Soit  $f \in E$  tq  $(f | f) = 0$ .

On a  $\int_{-1}^1 f^2(t) dt = 0$  où  $f^2$  est une fonction continue et positive sur  $[-1; 1]$  donc

$f^2 = 0$  ie :

$$\forall t \in [-1; 1] \quad f^2(t) = 0$$

Donc :

$$\forall t \in [-1; 1] \quad f(t) = 0 \text{ ie } f = 0$$

2. • **Première méthode**

Soit  $f \in H^\perp$ .

La fonction  $\begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 f(x) \end{cases}$  appartient à  $H$  donc  $\int_{-1}^1 x^2 f(x)^2 dx = 0$

La fonction  $\begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 f(x)^2 \end{cases}$  est continue et positive sur  $[-1; 1]$  donc :

$$\forall x \in [-1; 1] \quad x^2 f(x)^2 = 0$$

Donc :

$$\forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\} \quad f(x) = 0$$

$f$  étant continue sur  $[-1; 1]$ , on en déduit :

$$\forall x \in [-1; 1] \quad f(x) = 0$$

• **Deuxième méthode**

Soit  $f \in H^1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \mapsto nxf\left(\frac{1}{n}\right) \text{ si } 0 < \frac{1}{n} \leq x \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n \in H$  donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 = (f_n | f) = \int_0^{1/n} nxf(x)f\left(\frac{1}{n}\right) dx + \int_{1/n}^1 f(x)^2 dx$$

$$\text{Soit } \|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} (|f(x)|)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \int_0^{1/n} nxf(x)f\left(\frac{1}{n}\right) dx \right| \leq \int_0^{1/n} nx|f(x)| \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| dx \leq \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{n} \times \|f\|_\infty^2$$

$$\text{Donc } \int_0^{1/n} nxf(x)f\left(\frac{1}{n}\right) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Mais } \int_{1/n}^1 f(x)^2 dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(x)^2 dx \text{ donc } \int_0^1 f(x)^2 dx = 0 \text{ et } f \text{ est nulle entre } 0 \text{ et } 1.$$

On montre de même que  $f$  est nulle entre -1 et 1.

**Exercice 2** (CCP 2024)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $a$  et  $b$  deux vecteurs unitaires de  $E$  non colinéaires.

$$\text{Soit } f \begin{cases} E \mapsto E \\ x \mapsto (a | x)b + (b | x)a \end{cases}$$

1. Montrer que  $f \in \mathcal{L}(E)$ , donner  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .
2. Calculer  $f(a+b)$  et  $f(a-b)$  et en déduire que  $f$  est diagonalisable.

**Correction**

1. Soit  $(x, y) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= (a | \lambda x + \mu y)b + (b | \lambda x + \mu y)a \\ &= (\lambda(a | x) + \mu(a | y))b + (\lambda(b | x) + \mu(b | y))a \\ &= \lambda((a | x)b + (b | x)a) + \mu((a | y)b + (b | y)a) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \end{aligned}$$

donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

$(a, b)$  est libre. Donc :

$$f(x) = 0 \iff (a|x) = (b|x) = 0$$

$\ker(f) = \text{Vect}(a, b)^\perp$  est de dimension  $n - 2$ .

On en déduit que l'image de  $f$  est de dimension 2. Mais elle est incluse dans  $\text{Vect}(a, b)$  donc  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(a, b)$ .

$$2. f(a+b) = (a|a+b)b + (b|a+b)a = (1+(a|b))a + ((b|a)+1)b = ((a|b)+1)(a+b)$$

$(a, b)$  est libre donc  $a+b \neq 0$

$$f(a-b) = (a|a-b)b + (b|a-b)a = (1-(a|b))b + ((b|a)-1)a = ((a|b)-1)(a-b)$$

$(a, b)$  est libre donc  $a-b \neq 0$

$$(a+b|a-b) = \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0$$

$a+b$  et  $a-b$  sont non nuls et orthogonaux donc linéairement indépendants.

$(a+b, a-b)$  est une base de  $\text{Im}(f)$  qu'on peut compléter avec des vecteurs de  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)^\perp$  en une base de  $E$  (cette étape est inutile si  $E$  est de dimension 2)

Cette base est formée de vecteurs propres de  $f$  donc  $f$  est diagonalisable.

### Remarque

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x)|y) &= ((a|x)b + (b|x)a|y) \\ &= (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y) \\ &= (b|y)(x|a) + (a|y)(x|b) \\ &= (x|(b|y)a + (a|y)b) \\ &= (x|f(y)) \end{aligned}$$

$f$  est symétrique donc  $f$  est diagonalisable.

### Exercice 3 (d'après Centrale Maths 2 2024)

Soit  $E$  un espace euclidien.

Soit  $a$  et  $b$  deux vecteurs non nuls de  $E$ .

Pour tout réel  $\alpha$ , soit  $f_\alpha \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x + \alpha < x, a > b \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ .

2. Montrer qu'il existe une BON  $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de  $E$  avec  $\epsilon_1 = \frac{a}{\|a\|}$ .

3. L'énoncé fournissait des fonctions Python, certaines complètes d'autres à compléter. Il s'agissait ensuite pour diverses valeurs de  $n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha$  de calculer la matrice  $P^T A P$  où  $A$  est la matrice dans la base canonique de  $f_\alpha$  et  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ .

Il fallait observer quelque chose sur cette matrice et ensuite de l'expliquer.

Ici, la question sera simplement : que peut-on dire de la matrice de  $f_\alpha$  dans la base  $\mathcal{B}$  ( $E$  étant un espace euclidien quelconque) ?

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que  $f_\alpha \in GL(E)$ .

5. Exprimer  $f_\alpha \circ f_\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels.

6. Donner l'expression de  $f_\alpha^{-1}$ .

7. La condition sur  $\alpha$  de la question 4 reste-t-elle valable en dimension infinie ?

### Correction

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$f_\alpha$  va évidemment de  $E$  dans  $E$ .

$f_\alpha$  est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad f_\alpha(\lambda x + \mu y) &= \lambda x + \mu y + \alpha \langle \lambda x + \mu y, a \rangle b \\ &= \lambda x + \mu y + (\lambda \alpha \langle x, a \rangle + \mu \alpha \langle y, a \rangle) b \\ &= \lambda(x + \alpha \langle x, a \rangle b) + \mu(y + \alpha \langle y, a \rangle b) \\ &= \lambda f_\alpha(x) + \mu f_\alpha(y) \end{aligned}$$

2.  $a$  est non nul donc  $\epsilon_1 = \frac{a}{\|a\|}$  est bien défini et  $\|\epsilon_1\| = 1$ .

La famille  $(\epsilon_1)$  est orthonormale donc par le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut la compléter en une base orthonormée de  $E$ .

3. La matrice de  $f_\alpha$  dans la base  $\mathcal{B}$  est 
$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha \langle a, b \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \alpha \|a\| \langle \epsilon_2, b \rangle & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \alpha \|a\| \langle \epsilon_n, b \rangle & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4.  $f_\alpha \in GL(E) \iff \det(f_\alpha) \neq 0 \iff 1 + \alpha \langle a, b \rangle \neq 0$

5.

$$\begin{aligned} \forall x \in E \quad (f_\alpha \circ f_\beta)(x) &= f_\alpha(f_\beta(x)) = f_\alpha(x + \beta \langle x, a \rangle b) \\ &= x + \beta \langle x, a \rangle b + \alpha \langle x + \beta \langle x, a \rangle b, a \rangle b \\ &= x + \beta \langle x, a \rangle b + \alpha \langle x, a \rangle b + \alpha \beta \langle x, a \rangle \langle b, a \rangle b \\ &= x + (\alpha + \beta + \alpha \beta \langle a, b \rangle) \langle x, a \rangle b \end{aligned}$$

Donc  $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha + \beta + \alpha \beta \langle a, b \rangle}$

6. On suppose donc  $1 + \alpha \langle a, b \rangle \neq 0$ .

On peut donc poser  $\beta = -\frac{\alpha}{1 + \alpha \langle a, b \rangle}$ .

On a alors  $f_\alpha \circ f_\beta = f_0 = id_E$  donc  $f_\alpha^{-1} = f_\beta$ .

7. Supposons  $1 + \alpha \langle a, b \rangle \neq 0$ .

On peut donc poser  $\beta = -\frac{\alpha}{1 + \alpha \langle a, b \rangle}$ .

On a alors  $f_\alpha \circ f_\beta = f_0 = id_E$ .

De plus  $f_\beta \circ f_\alpha = f_{\beta + \alpha + \beta \alpha \langle a, b \rangle} = f_\alpha \circ f_\beta = id_E$ .

Donc  $f_\alpha \in GL(E)$ .

Réciproquement, supposons  $f_\alpha \in GL(E)$ .

$b \neq 0$  donc  $f_\alpha(b) \neq 0$ .

Mais  $f_\alpha(b) = (1 + \alpha \langle a, b \rangle) b$  donc  $1 + \alpha \langle a, b \rangle \neq 0$ .

#### Exercice 4 (Mines 2024)

$E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  de rang  $p$ ,  $B \in E$ .

Donner  $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  tel que  $\|AX_0 - B\|^2$  soit minimale.

#### Correction

- **Algèbre linéaire**

$A$  peut être vue comme une application linéaire de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E$ .

$A$  est de rang  $p$  donc  $A$  est injective.

Soit  $Y$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $\text{Im}(A)$ . C'est l'élément de  $\text{Im}(A)$  le plus proche de  $B$ .

$A$  étant injective,  $Y$  a un antécédent et un seul : c'est le vecteur  $X_0$  cherché.

$X_0$  est caractérisé par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad (AX)^T(AX_0 - B) = 0$$

Donc :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad X^T (A^T AX_0 - A^T B) = 0$$

avec  $A^T AX_0 - A^T B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .

On en déduit  $A^T AX_0 - A^T B = 0$ .

Si  $X \in \text{Ker}(A^T A)$  alors  $X^T A^T AX = X^T 0 = 0$  donc  $\|AX\|^2 = 0$  et  $AX = 0$

Mais  $A$  est injective donc  $X = 0$  et  $A^T A$  est injective.

Mais  $A^T A$  est une matrice carrée (à  $p$  lignes et  $p$  colonnes) donc  $A^T A$  est inversible.

D'où  $X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B$ .

- **Analyse**

Soit  $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} & \forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \|A(X_0 + H) - B\|^2 \\ &= (AX_0 - B + AH)^T (AX_0 - B + AH) \\ &= \|AX_0 - B\|^2 + H^T A^T (AX_0 - B) + (AX_0 - B)^T AH + H^T A^T AH \\ &= \|AX_0 - B\|^2 + L(H) + o(H) \end{aligned}$$

avec  $L(H) = H^T A^T (AX_0 - B) + (AX_0 - B)^T AH = 2(AX_0 - B)^T AH$  (une matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  est symétrique)

$L$  est linéaire donc c'est la différentielle de la fonction  $f : X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mapsto \|AX - B\|^2$ .

On en déduit  $\nabla f(X_0) = 2A^T (AX_0 - B) = 2(A^T AX_0 - A^T B)$ .

Si  $X \in \text{Ker}(A^T A)$  alors  $X^T A^T AX = X^T 0 = 0$  donc  $\|AX\|^2 = 0$  et  $AX = 0$

Mais  $A$  est injective donc  $X = 0$  et  $A^T A$  est injective.

Mais  $A^T A$  est une matrice carrée (à  $p$  lignes et  $p$  colonnes) donc  $A^T A$  est inversible.

Le gradient de  $f$  s'annule donc une fois et une seule en  $X_0 = (A^T A)^{-1} A^T B$ .

$$\begin{aligned} & \forall H \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad \|A(X_0 + H) - B\|^2 \\ &= (AX_0 - B + AH)^T (AX_0 - B + AH) \\ &= \|AX_0 - B\|^2 + H^T A^T (AX_0 - B) + (AX_0 - B)^T AH + H^T A^T AH \\ &= \|AX_0 - B\|^2 + (\nabla f(X_0) | H) + H^T A^T AH \\ &= \|AX_0 - B\|^2 + \|AH\|^2 \end{aligned}$$

La fonction est bien minimale en  $X_0$ .

### Exercice 5 (Ems 2025)

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  avec  $n > p$ . Soit  $b \in \mathbb{R}^n$ .

$$(P) : \text{trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|$$

### Remarque

Ce n'est pas précisé dans l'énoncé mais il s'agit de la norme euclidienne canonique dans  $\mathbb{R}^n$ .

1. Donner  $S_{(P)}$  l'ensemble des solutions de  $(P)$ .
2. Montrer qu'il existe un unique  $\tilde{x} \in S_{(P)}$  de norme minimale, c'est à dire  $\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in S_{(P)}} \|y\|$ .
3. (Bonus) Montrer que  $x \in \mathbb{R}^p$  est solution de  $(P)$  si et seulement si  $A^T Ax = A^T b$  et que  $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ .

**Correction**

1. Soit  $\pi$  la projection orthogonale sur  $\text{Im}(A)$ .  
 $\forall z \in \text{Im}(A) \quad \|z - b\| \geq \|\pi(b) - b\|$  avec égalité si, et seulement si,  $z = \pi(b)$ .  
 Donc :  
 $\forall y \in \mathbb{R}^p \quad \|Ay - b\| \geq \|\pi(b) - b\|$  avec égalité si, et seulement si,  $Ay = \pi(b)$   
 $S_{(P)}$  est donc l'ensemble des antécédents par  $A$  de  $\pi(b)$  qui appartient à  $\text{Im}(A)$
2. Il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^p$  tel que  $Ax_0 = \pi(b)$ .  
 On a alors  $S_{(P)} = \{x_0 + x; x \in \text{Ker}(A)\} = \{x_0 - x; x \in \text{Ker}(A)\}$   
 Soit  $x_1$  le projeté orthogonal de  $x_0$  sur  $\text{Ker}(A)$ .  
 $\forall x \in \text{Ker}(A) \quad \|x_0 - x\| \geq \|x_0 - x_1\|$  avec égalité si et seulement si  $x = x_1$   
 En d'autres termes, si on note  $\tilde{x} = x_0 - x_1 \in S_{(P)}$  :  
 $\forall y \in S_{(P)} \quad \|y\| \geq \|\tilde{x}\|$  avec égalité si et seulement si  $y = \tilde{x}$

**Remarque**

$\tilde{x}$  est le projeté orthogonal de  $x_0$  (mais aussi de tout élément de  $S_{(P)}$ ) sur  $(\text{Ker}(A))^\perp$ , ce qu'on voit bien sur un dessin.

3.

$$\begin{aligned}
 x \in S_{(P)} &\iff Ax = \pi(b) \\
 &\iff Ax - b \in \text{Im}(A)^\perp \\
 &\iff \forall y \in \mathbb{R}^p \quad 0 = (Ay | Ax - b) = (Ay)^T (Ax - b) = y^T (A^T Ax - A^T b) \\
 &\quad \text{avec } A^T Ax - A^T b \in \mathbb{R}^p \\
 &\iff A^T Ax = A^T b
 \end{aligned}$$

Si  $x \in \text{Ker}(A)$  alors  $A^T Ax = A^T 0 = 0$  donc  $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^T A)$ .

Réciproquement si  $x \in \text{Ker}(A^T A)$  alors :

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T (Ax) = x^T A^T Ax = x^T 0 = 0 \text{ donc } Ax = 0.$$

On en déduit  $\text{ker}(A^T A) \subset \text{Ker}(A)$  puis  $\text{ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$ .

**Exercice 6** (*Ems 2024*)

On définit pour  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|X\|_2 = \sqrt{\text{tr}(XX^T)}$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $\min_{U \in SO_2(\mathbb{R})} (\|A - UBU^T\|_2)$ .

**Correction**

Le candidat a écrit que les matrices de  $SO_2(\mathbb{R})$  sont les matrices de la forme  $R_\theta \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

$$BR_\theta^T = BR_{-\theta} = \begin{pmatrix} -3 \sin(\theta) & 3 \cos(\theta) \\ 3 \cos(\theta) & 3 \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_\theta BR_{-\theta} = \begin{pmatrix} -6 \sin(\theta) \cos(\theta) & 3 \cos^2(\theta) - 3 \sin^2(\theta) \\ 3 \cos^2(\theta) - 3 \sin^2(\theta) & 6 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le candidat a ensuite commencé le calcul de  $(A - UBU^T)(A - UBU^T)$  puis a abandonné. Néanmoins on peut traiter l'exercice de cette manière.

$$R_\theta BR_{-\theta} = \begin{pmatrix} -3 \sin(2\theta) & 3 \cos(2\theta) \\ 3 \cos(2\theta) & 3 \sin(2\theta) \end{pmatrix}$$

Si  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors  $XX^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ? \\ ? & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$  donc :

$$\begin{aligned} \|A - R_\theta BR_\theta^T\|_2^2 &= (2 - 3 \sin(2\theta))^2 + 18 \cos^2(2\theta) + (-1 + 3 \sin(2\theta))^2 \\ &= 5 - 18 \sin(2\theta) + 18 \sin^2(\theta) + 18 \cos^2(2\theta) \\ &= 23 - 18 \sin(2\theta) \end{aligned}$$

Le minimum cherché est donc  $\sqrt{5}$  atteint pour  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ie  $U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\theta = \frac{5\pi}{4}$  ie

$$U = -\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le candidat ayant renoncé à cette méthode, l'examinateur a fourni une indication : montrer que  $\Phi : (X, Y) \mapsto \text{tr}(XY^T)$  est un produit scalaire.

On l'a fait en cours avec  $(X, Y) \mapsto \text{tr}(X^TY)$ . C'est le même produit scalaire car  $\text{tr}(X^TY) = \text{tr}(YX^T) = \text{tr}((YX^T)^T) = \text{tr}(XY^T)$

L'examinateur a ensuite demandé de montrer que  $\|UXU^T\|_2 = \|X\|_2$ .

Le calcul des coefficients est trop long, il vaut mieux utiliser les propriétés de la trace :

$$\begin{aligned} \|UXU^T\|_2^2 &= \text{tr}(UXU^T(UXU^T)^T) = \text{tr}(UXU^TUX^TU^T) = \text{tr}(UXI_2X^TU^T) \\ &= \text{tr}(UXX^TU^{-1}) = \text{tr}(XX^T) = \|X\|_2^2 \end{aligned}$$

Si on revient au problème initial :

$$\|A - UBU^T\|_2^2 = \|A\|_2^2 + \|B\|_2^2 - 2(A | UBU^T) = 23 - 2\text{tr}(AUB^TU^T) = 23 - 2\text{tr}(AUBU^T)$$

On a déjà calculé  $UBU^T$  et la multiplication par une matrice diagonale est facile :

$$AUBU^T = \begin{pmatrix} -12 \sin(\theta) \cos(\theta) & 6 \cos^2(\theta) - 6 \sin^2(\theta) \\ -3 \cos^2(\theta) + 3 \sin^2(\theta) & -6 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On conclut alors facilement.

### Exercice 7 (Mines 2024)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad (u | v) = 0 \implies (f(u) | f(v)) = 0$$

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .

1. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ .  
Montrer que  $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ .
2. Soit  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ .  
Montrer que  $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ .

3. Montrer qu'il existe  $\lambda \geq 0$  tel que :

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \lambda \|x\|$$

et en déduire que  $f$  peut se mettre sous la forme de la composition de deux endomorphismes qu'on précisera.

### Correction

1.

$$\begin{aligned} (e_i + e_j \mid e_i - e_j) &= (e_i \mid e_i) - (e_i \mid e_j) + (e_j \mid e_i) + (e_j \mid e_j) \\ &= 1 - (e_i \mid e_j) + (e_i \mid e_j) - 1 \text{ par symétrie du produit scalaire} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente,  $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ .

Par hypothèse, on a alors  $f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j)$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= (f(e_i) + f(e_j) \mid f(e_i) - f(e_j)) \\ &= (f(e_i) \mid f(e_i)) - (f(e_i) \mid f(e_j)) + (f(e_j) \mid f(e_i)) - (f(e_j) \mid f(e_j)) \\ &= \|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 \end{aligned}$$

3. Soit  $x \in E$ .

$$\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

$$\text{La base étant orthonormée, } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (f(e_i) \mid f(e_j)) \end{aligned}$$

Si  $i \neq j$   $e_i \perp e_j$  donc  $f(e_i) \perp f(e_j)$  donc :

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 (f(e_i) \mid f(e_i)) \\ &= \|f(e_1)\|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

D'où le résultat avec  $\lambda = \|f(e_i)\|$  pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ .

Si  $\lambda = 0$  alors  $f$  est nulle et il n'y a pas grand chose à ajouter.

Si  $\lambda > 0$  alors  $\frac{1}{\lambda} f$  conserve la norme : c'est un automorphisme orthogonal.

Donc  $f = h \circ u$  avec  $h$  une homothétie de rapport strictement positif et  $u$  un automorphisme orthogonal.

La réciproque est vraie et facile à prouver.

### Exercice 8 (Mines 2024)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que  $A$  est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice orthogonale  $P$  les coefficients diagonaux de la matrice  $P^{-1}AP$  sont tous nuls.

### Correction

- On suppose  $A$  antisymétrique.

$$\begin{aligned} \forall P \in O(n) \quad (P^{-1}AP)^T &= (P^TAP)^T = P^T A^T (P^T)^T \\ &= -P^T AP = -P^{-1}AP \end{aligned}$$

$\forall P \in O(n)$   $P^{-1}AP$  est une matrice antisymétrique.

Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique  $M$  sont tous nuls.

En effet, pour  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ ,  $m_{i,j} = -m_{j,i}$  donc, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $m_{i,i} = -m_{i,i}$ .

- On suppose pour toute matrice orthogonale  $P$  les coefficients diagonaux de la matrice  $P^{-1}AP$  sont tous nuls.

Si  $X = 0$ ,  $X^TAX = 0$ .

Soit  $X$  une colonne non nulle.

La colonne  $Y = \frac{X}{\|X\|}$  est unitaire donc on peut la compléter en une BON de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à cette BON.  $P$  est une matrice orthogonale.

La matrice  $B = P^TAP$  a donc tous ces coefficients diagonaux nuls.

$$\text{Soit } E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$E^TBE = b_{1,1} = 0$$

Mais :

$$E^TBE = E^TP^TAP E = (PE)^T A (PE)^T = Y^TAY \text{ donc } Y^TAY = 0$$

$$\text{D'où } X^TAX = \|X\|^2 Y^TAY = 0$$

On a donc prouvé :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X^TAX = 0$$

Soit  $E_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique.

$$a_{i,i} = E_i^T E_i = 0$$

$$0 = (E_i + E_j)^T A (E_i + E_j) = a_{i,i} + a_{i,j} + a_{j,i} + a_{j,j} = a_{i,j} + a_{j,i} \text{ donc } a_{i,j} = -a_{j,i} \text{ et } A \text{ est antisymétrique.}$$

### Exercice 9 (Ens 2025)

1. Soit  $ABC$  un triangle non dégénéré du plan. On suppose que  $\widehat{ACB}$  est aigu. Montrer que :

$$AC^2 + BC^2 > AB^2$$

2. Soient  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ . On définit les demi-droites  $l_1, l_2, l_3 \subset \mathbb{R}^3$  comme suit :

$$l_1 = \{te_1, t \in \mathbb{R}_+^*\}, \quad l_2 = \{te_2, t \in \mathbb{R}_+^*\}, \quad l_3 = \{te_3, t \in \mathbb{R}_+^*\}$$

On suppose que  $e_1, e_2, e_3$  sont deux à deux orthogonaux.

Montrer que pour tout  $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$  le triangle  $A_1A_2A_3$  est aigu.

3. Avec les notations de la question précédente, on suppose que pour tout  $A_1 \in l_1, A_2 \in l_2, A_3 \in l_3$ , le triangle  $A_1A_2A_3$  est aigu. Montrer que  $e_1, e_2$  et  $e_3$  sont deux à deux orthogonaux.

### Correction

1. Dire que l'angle  $\widehat{ACB}$  est aigu signifie qu'il est strictement inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ .

La formule d'Al-Kashi donne :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos(\widehat{ACB})$$

Le triangle étant supposé non dégénéré,  $AC$  et  $BC$  sont strictement positifs et  $AB^2 < AC^2 + BC^2$ .

On peut remarquer, ce qui sera utile dans les questions suivantes, que la réciproque est vraie.

La formule d'Al-Kashi peut se démontrer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} AB^2 &= \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC} + \vec{CB}\|^2 \\ &= \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB} \\ &= AC^2 + BC^2 - 2\vec{CA} \cdot \vec{CB} \\ &= AC^2 + BC^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos(\widehat{ACB}) \end{aligned}$$

2.  $A_1A_2^2 = \|l_2e_2 - l_1e_1\|^2 = l_1^2 \|e_1\|^2 + l_2^2 \|e_2\|^2$  par Pythagore.

De même,  $A_1A_3^2 = l_1^2 \|e_1\|^2 + l_3^2 \|e_3\|^2$  et  $A_2A_3^2 = l_2^2 \|e_2\|^2 + l_3^2 \|e_3\|^2$

On déduit  $A_1A_3^2 = l_1^2 \|e_1\|^2 + l_3^2 \|e_3\|^2 < l_1^2 \|e_1\|^2 + 2l_2^2 \|e_2\|^2 + l_3^2 \|e_3\|^2 = A_1A_2^2 + A_2A_3^2$ .

Donc l'angle  $\widehat{A_1A_2A_3}$  est aigu (le triangle n'est pas dégénéré car les  $l_i$  sont non nuls donc les trois points sont deux à deux distincts).

Il en est de même des deux autres angles du triangle qui est donc aigu.

3. Il faut supposer les  $e_i$  tous non nuls si on veut que le triangle ne soit pas dégénéré et appliquer les résultats de la première question.

$$\forall (t_1, t_2, t_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad A_1A_3^2 + A_2A_3^2 > A_1A_2^2$$

Donc :

$$\forall (t_1, t_2, t_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad \|t_3e_3 - t_1e_1\|^2 + \|t_3e_3 - t_2e_2\|^2 > \|t_2e_2 - t_1e_1\|^2$$

Donc

$$\forall (t_1, t_2, t_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad 2t_3^2 \|e_3\|^2 + t_1^2 \|e_1\|^2 + t_2^2 \|e_2\|^2 - 2t_1t_3(e_1|e_3) - 2t_2t_3(e_2|e_3) > t_1^2 \|e_1\|^2 + t_2^2 \|e_2\|^2 - 2t_1t_2(e_1|e_2)$$

Donc

$$\forall (t_1, t_2, t_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad 2t_3^2 \|e_3\|^2 - 2t_1t_3(e_1|e_3) - 2t_2t_3(e_2|e_3) > -2t_1t_2(e_1|e_2)$$

On prend  $t_1 = t_2 = 1$  et on fait tendre  $t_3$  vers 0 :  $-2(e_1|e_2) \leq 0$ .

Donc  $(e_1|e_2) \geq 0$ .

On a de même  $(e_1|e_3) \geq 0$  et  $(e_2|e_3) \geq 0$

On fait tendre  $t_2$  vers 0 :

$$\forall (t_1, t_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad 2t_3^2 \|e_3\|^2 - 2t_1t_3(e_1|e_3) \geq 0$$

Donc :

$$\forall (t_1, t_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \quad t_3 \|e_3\|^2 - t_1(e_1|e_3) \geq 0$$

On prend  $t_1 = 1$  et on fait tendre  $t_3$  vers 0 :  $-(e_1|e_3) \geq 0$

Donc  $(e_1|e_3) \leq 0$  puis  $(e_1|e_3) = 0$ .

On a de même  $(e_1|e_2) = (e_2|e_3) = 0$ .