Révisions 2026
mercredi 17 juin 2026

941

Exercice 1 *(TPE 2024)*

Soient a, b, c trois réels non tous nuls.
Soit $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(M)$ et montrer que M est semblable à une matrice diagonale qu'on déterminera.
3. CNS pour que M soit la matrice d'un projecteur.

Exercice 2 *(Ens 2025)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $\mathrm{Sp}_(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.
Montrer que l'application $\phi : M \mapsto AM - MB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$

1) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ tel que $C^2 = A^{-1}$

2) On pose $D = CBC$. Montrer que

$$(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

3) Déduire que

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des points intérieurs à $S_n(\mathbb{R})$.
3. $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tq :
   $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T M X \geq \alpha X^T X$
5. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est-il un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$?
6. Quels sont les points intérieurs à $S_n^+(\mathbb{R})$?

Exercice 5 *(Ens 2024)*

Soit E un espace euclidien.
Soit a un endomorphisme autoadjoint de E.
Soit $u \in E$ non nul et $V = \text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.
Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Exercice 6 *(Mines 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique inversible et semblable à son inverse.
Montrer que $\text{tr}\,(A^2) \geq n$.

Exercice 7 *(Mines 2024)*

Montrer que toute matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

Exercice 8 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$, un entier.
Calculer la borne supérieure de l'ensemble :

$$\left\{\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_1 \;\; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$$

Exercice 9 *(Ens 2025)*

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que si p et q commutent alors pq est aussi un projecteur orthogonal.
2. Montrer que dans tous les cas, les valeurs propres sont réelles et appartiennent à $[0;1]$.
3. Soit $\lambda \in [0;1]$. Déterminer deux projecteurs orthogonaux tels que λ soit valeur propre de pq.