Révisions 2026
mercredi 17 juin 2026

941

Exercice 1 *(TPE 2024)*

Soient a, b, c trois réels non tous nuls.
Soit $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(M)$ et montrer que M est semblable à une matrice diagonale qu'on déterminera.
3. CNS pour que M soit la matrice d'un projecteur.

Correction

1. M est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} MX = 0 \quad &\iff \begin{cases} a(ax+by+cz) = 0 \\ b(ax+by+cz) = 0 \\ c(ax+by+cz) = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad ax+by+cz = 0 \text{ car } (a,b,c) \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

   $\operatorname{Ker}(M)$ est donc de dimension 2. M étant diagonalisable, 0 est valeur propre de multiplicité 2 de M. La valeur propre qui nous manque est $\operatorname{tr}(M) = a^2 + b^2 + c^2$.
3. $\exists P \in O(3)$ tq $M = P\text{Diag}(0, 0, a^2 + b^2 + c^2)P^T$.
   $M^2 = P\text{Diag}(0, 0, (a^2 + b^2 + c^2)^2)P^T = (a^2 + b^2 + c^2)M$
   La CNS cherchée est $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Exercice 2 *(Ens 2025)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $\text{Sp}_(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.
Montrer que l'application $\phi : M \mapsto AM - MB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

De nombreuses méthodes sont possibles.
On commence par remarque que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, donc il suffit de prouver que ϕ est injective ou encore que $AM = MB$ entraîne $M = 0$.

- **Première méthode**
  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = MB$.
  Soit X un vecteur propre de B et λ la valeur propre associée.
  $AMX = MBX = M(\lambda X) = \lambda MX$
  Mais par hypothèse, λ n'est pas valeur propre de A donc $MX = 0$
  Mais B est symétrique réelle donc diagonalisable et il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B. M est nulle sur cette base (plus rigoureusement l'application canoniquement associée à M est nulle sur cette base) donc $M = 0$.
- **Deuxième méthode**
  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = MB$.
  Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$: $A^k M = MB^k$
  $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
  On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.
  $A^{k+1}M = AA^kM = AMB^k = MBB^K = MB^{k+1}$
  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  On a donc :
  $\forall k \in \mathbb{N}\ A^kM = MB^k$
  On en déduit :
  $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ P(A)M = MP(B)$
  En particulier, avec Cayley-Hamilton : $\chi_B(A)M = 0$
  Mais $\chi_B(A) = \prod_{k=1}^{p} (A - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}$ où les λ_k sont les valeurs propres de B comptées sans leurs multiplicités.
  Comme A et B n'ont pas de valeur propre commune donc les matrices $A - \lambda_k I_n$ sont inversibles.
  On en déduit que $\chi_B(A)$ est inversible puis que M est nulle.
- **Troisième méthode** (c'est la première méthode proposée par les examinateurs).
  On commence par le cas où A et B sont diagonales.
  $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ \ (\phi(M))_{i,j} = (a_{i,i} - b_{j,j})m_{i,j}$
  A et B n'ayant pas de valeur propre commune, les nombres $a_{i,i} - b_{j,j}$ sont tous non nuls.
  On en déduit que si $\phi(M)$ est nulle alors M est nulle.
  Dans le cas général, A et B sont diagonalisables car symétriques réelles :
  $\exists (P_A, P_B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\ \exists (D_A, D_B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ diagonales telles que $A = P_A D_A P_A^{-1}$ et $B = P_B D_B P_B^{-1}$
  $$\begin{array}{rcl} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \phi(M) & = & P_A D_A P_A^{-1} M - M P_B D_B P_B^{-1} \\ & = & P_A \left(D_A P_A^{-1} M P_B - P_A^{-1} M P_B D_B \right) P_B^{-1} \\ & = & \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1(M) \end{array}$$
  avec $\phi_1 : M \mapsto P_A^{-1} M P_B$, $\phi_2 : M \mapsto D_A M - M D_B$ et $\phi_3 : M \mapsto P_A M P_B^{-1}$ qui sont trois automorphismes.
  Leur composition donne bien un automorphisme.
- **Quatrième méthode**
  $\phi = \phi_A - \phi_B$ avec $\phi_A : M \mapsto AM$ et $\phi_B : M \mapsto MB$
  A et B étant diagonalisables (par le théorème spectral), on peut montrer que ϕ_A est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que A et que ϕ_B est diagonalisable avec les mêmes valeurs propres que B.
  ϕ_A et ϕ_B commutent donc sont simultanément diagonalisable,ce qui permet de montrer

que les valeurs propres de ϕ sont de la forme $\lambda - \mu$ avec λ valeur propre de A et μ valeur propre de B.
On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de ϕ. En d'autres termes, si $AM = MB$ alors $M = 0$.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbf{R})$
1) Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ tel que $C^2 = A^{-1}$
2) On pose $D = CBC$. Montrer que

$$(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

3) Déduire que

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$$

Correction

1. A est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ telle que $P^T AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
   A étant symétrique définie positive, les λ_i sont strictement positifs.
   La matrice $C = P\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^T$ convient.
2. $(CBC)^T = C^T B^T C^T = CBC$ donc D est symétrique réelle.
   $\forall X \in \mathbb{R}^n \; X^T DX = (CX)^T B(CX) \geq 0$ car B est symétrique positive.
   Il existe donc $Q \in O(n)$ telle que $D = Q\Delta Q^T$ avec $\Delta = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ les μ_i étant positifs ou nuls.
   $I_n + D = Q\mathrm{Diag}(\mu_1 + 1, \ldots, \mu_n + 1)Q^T$ et $\det(D) = \mu_1 \ldots \mu_n$ donc il s'agit de prouver :
   $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \; \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)\right)^{1/n} \geq 1 + \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$
   Si l'un des x_i est nul alors l'inégalité est triviale.
   Si les x_i sont tous strictement positifs alors on peut écrire $x_i = \mathrm{e}^{y_i}$ et il s'agit de prouver :
   $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \mathrm{e}^{y_i}) \geq \ln\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}\right)$
   ie $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(y_i) \geq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ avec $f : x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$
   Il suffit donc de prouver que f est convexe.
   Or f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R} \; f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$
   $\forall x \in \mathbb{R} \; f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^{2x}}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} \geq 0$
   Donc f est convexe.

3.

$$\begin{aligned}
(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} &= \det\left(C^{-2}+B\right)^{\frac{1}{n}} = \det\left(C^{-1}\left(I_n+CBC\right)C^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\det\left(C^{-1}\right)\det\left(I_n+D\right)\det\left(C^{-1}\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(\det\left(C^{-1}\right)\det\left(C^{-1}\right)\right)^{\dfrac{1}{n}}\left(\det\left(I_n+D\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq (\det(A))^{\frac{1}{n}}\left(1+(\det(D))^{\frac{1}{n}}\right) \\
&\geq (\det(A))^{\frac{1}{n}}+(\det(A)\det(C)\det(B)\det(C))^{\frac{1}{n}} \\
&\geq (\det(A))^{\frac{1}{n}}+(\det(A)\det(C)\det(C)\det(B))^{\frac{1}{n}} \\
&\geq (\det(A))^{\frac{1}{n}}+\left(\det\left(AC^2B\right)\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\geq (\det(A))^{\frac{1}{n}}+(\det(B))^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'ensemble des points intérieurs à $S_n(\mathbb{R})$.
3. $S_n^+(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
4. Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tq :
   $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T M X \geq \alpha X^T X$
5. $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est-il un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$?
6. Quels sont les points intérieurs à $S_n^+(\mathbb{R})$?

Correction

1. Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\forall p \in \mathbb{N}\ S_p^T = S_p$
   On fait tendre p vers $+\infty$: $S^T = S$ (la transposition est continue comme toute application linéaire en dimension finie).
   Donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
   Par caractérisation séquentielle des fermés, $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit M un point intérieur à $S_n(\mathbb{R})$.
   En particulier, $M \in S_n(\mathbb{R})$.
   On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie par :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \ \|A\| = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}(|a_{i,j}|)$
   Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(M,r) \subset S_n(\mathbb{R})$.
   En particulier, $M + \dfrac{r}{2}E_{1,2} \in S_n(\mathbb{R})$.
   On en déduit que $E_{1,2} \in S_n(\mathbb{R})$. C'est absurde donc $S_n(\mathbb{R})$ n'a pas de point intérieur.
3. Soit $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   $\forall p \in \mathbb{N}\ S_p^T = S_p$
   On fait tendre p vers $+\infty$: $S^T = S$.

$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T S_p X \geq 0$
On fixe X et on fait tendre p vers $+\infty$:
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T S X \geq 0$
Donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Par caractérisation séquentielle des fermés, $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. M est symétrique réelle définie positive donc :
$\exists P \in O(n)$ tq $M = PDP^T$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et : $\forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i > 0$
Soit $\alpha = \min\limits_{i \in [\![1;n]\!]} (\lambda_i) > 0$
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} X^T M X &= X^T (PDP^T) X = (X^T P) D (P^T X) \\ &= (P^T X)^T D (P^T X) \end{aligned}$$
On pose $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} X^T M X &= Y^T D Y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \geq \alpha) y_i^2 \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \alpha Y^T Y = \alpha X^T P P^T X \\ &\geq \alpha X^T X \text{ car } P \in O(n) \end{aligned}$$

5. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie par :
$\forall A \in S_n(\mathbb{R})\ \|A\| = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} (|a_{i,j}|)$
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} \left| X^T A X \right| &= \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j \right| \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|\,|x_i|\,|x_j| \\ &\leq \|A\| \sum_{1 \leq i,j \leq n} |x_i|\,|x_j| = \|A\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^2 \\ &\leq \|A\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right) \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq n \|A\|\, X^T X \end{aligned}$$
Soit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
$\exists \alpha > 0$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ X^T M X \geq \alpha X^T X$

Soit A une matrice appartenant à la boule ouverte de $S_n(\mathbb{R})$ de centre M et de rayon $\dfrac{\alpha}{n}$ pour la norme ci-dessus.
Comme on se restreint à $S_n(\mathbb{R})$, A est symétrique.

$$\begin{array}{rcl} \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\ X^T AX & = & X^T MX + X^T(A-M)X \\ & \geq & \alpha X^T X - n\,\|A-M\|\, X^T X \\ & > & \alpha X^T X - \alpha X^T X = 0 \end{array}$$

Donc $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Donc la boule ouverte de $S_n(\mathbb{R})$ de centre M et de rayon $\dfrac{\alpha}{n}$ est incluse dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Donc $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

6. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il n'y en a pas car on peut trouver aussi près qu'on veut d'une matrice symétrique une matrice qui ne l'est pas.
On se restreint donc comme dans la question précédente à $S_n(\mathbb{R})$.
Les élèments de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont points intérieurs à $S_n^{+}(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.
Soit $M \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \setminus S_n^{++}(\mathbb{R})$.
0 est valeur propre de M et il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $MX_0 = 0$.
Soit $\epsilon > 0$.
La matrice $M - \epsilon I_n$ est symétrique et :
$X_0^T(M-\epsilon I_n)X_0 = X_0^T MX_0 - \epsilon X_0^T X_0 = -\epsilon X_0^T X_0 < 0$
Donc $M - \epsilon I_n \notin S_n^{+}(\mathbb{R})$
Comme on peut prendre ϵ arbitrairement petit, M n'est pas un point intérieur à $S_n^{+}(\mathbb{R})$

Exercice 5 *(Ens 2024)*

Soit E un espace euclidien.
Soit a un endomorphisme autoadjoint de E.
Soit $u \in E$ non nul et $V = \text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.
Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Correction
On montre facilement que V est stable par a :
$a(V) = a\left(\text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)\right) = \text{Vect}\left(\left(a^{k+1}(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}\right) \subset V$
On note b l'endomorphisme de $\text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ induit par a.
$\forall (x,y) \in \text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)^2$ $(b(x) \mid y) = (a(x) \mid y) = (x \mid a(y)) = (x \mid b(y))$: b est également autoadjoint.
b est donc diagonalisable (en BON mais ce sera inutile) et il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\text{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ formée de vecteurs propres de b, donc de a.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, soit λ_i la valeur propre de a associée à e_i.
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ étant la liste des valeurs propres de a comptées avec leurs multiplicités, il s'agit de prouver que ces nombres sont 2 à 2 distincts.
Le polynôme $P = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ annule b : $\text{Mat}_{(e_1,\ldots,e_n)}(P(b)) = \text{Diag}\left(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\right) = 0$.
En effectuant la division euclidienne de X^k par P, on montre :

$\forall k \geq n\ a^k(u) \in \mathrm{Vect}\,(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u))$: la famille $(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ qui est de dimension n (c'est le cardinal d'une de ces bases).

On en déduit que la famille $(u, a(u), \dots, a^{n-1}(u))$ est une base de $\mathrm{Vect}\left(\left(a^k(u)\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$.

Donc son déterminant dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est non nul ie en notant $u = \sum_{k=1}^{n} u_k e_k$:

$$\begin{vmatrix} u_1 & \lambda_1 u_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} u_1 \\ u_2 & \lambda_2 u_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} u_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ u_n & \lambda_n u_n & \dots & \lambda_n^{n-1} u_n \end{vmatrix} = u_1 \dots u_n \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Les λ_i sont bien deux à deux distincts.

Exercice 6 *(Mines 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique inversible et semblable à son inverse.
Montrer que $\mathrm{tr}\,(A^2) \geq n$.

Correction
D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^T AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$
A étant inversible, $P^T A^{-1} P = P^{-1} A^{-1} P = \left(P^{-1} AP\right)^{-1} = \left(P^T AP\right)^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$
On en déduit que la liste des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités peut s'écrire $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mais aussi $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.
La liste des valeurs propres de A^2 comptées avec leurs multiplicités peut donc s'écrire $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ mais aussi $\frac{1}{\lambda_1^2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n^2}$.

$$\begin{aligned} 2\mathrm{tr}\,(A^2) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^2 + \frac{1}{\lambda_i^2}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \left(\lambda_i - \frac{1}{\lambda_i}\right)^2\right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n \end{aligned}$$

et on conclut facilement.

On peut également utiliser Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{\lambda_i} = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{1}{\lambda_i}\right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)^{1/2} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2}\right)^{1/2} \\ &\leq \mathrm{tr}\,(A^2) \end{aligned}$$

Exercice 7 *(Mines 2024)*

Montrer que toute matrice antisymétrique réelle est de rang pair.

Correction
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.
On suppose que le rang r de A est impair.
$\mathrm{Im}\,(A)$ est stable par A, ce qui permet de définir u l'endomorphisme de $\mathrm{Im}\,(A)$ induit par A.
$\mathrm{Im}\,(A)$ étant de dimension r, χ_u est un polynôme de degré r impair. Par le théorème des valeurs intermédaires, u a au moins une valeur propre réelle λ :
$\exists X \in \mathrm{Im}\,(A)$ tq $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$
$X^T AX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $X^T AX$ est une matrice symétrique :
$X^T AX = \left(X^T AX\right)^T = X^T A^T X = -X^T AX$ car A est antisymétrique.
Donc $X^T AX = 0$.
Mais $X^T AX = X^T(\lambda X) = \lambda \|X\|^2$
On a donc $\lambda \|X\|^2 = 0$ avec $X \neq 0$ donc $\lambda = 0$
$X \in \mathrm{Im}\,(A)$ donc il existe $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X = AY$.
$\|X\|^2 = X^T X = (AY)^T X = -Y^T AX = 0$ car $AX = 0$
Donc $X = 0$: absurde

Exercice 8 *(Mines 2024)*

Soit $n \geq 2$, un entier.
Calculer la borne supérieure de l'ensemble :

$$\left\{\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_1 \ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$$

Correction
Soit A la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf $a_{k,k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $a_{n,1}$ qui sont égaux à 1.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} + x_n x_1 = X^T AX$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$AX = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

On en déduit que les valeurs propres complexes de A sont les n-ièmes de l'unité ω^k, $0 \leq k \leq n-1$ avec $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre ω^k est la droite dirigée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix}$.

A est diagonalisable.

$X^T AX = \dfrac{1}{2} X^T(A + A^T)X$
Mais A est orthogonale (ses colonnes sont une permutation des vecteurs de la base canonique) donc $A + A^T = A + A^{-1}$.
On en déduit que les valeurs propres de $\dfrac{A + A^T}{2}$ sont les nombres $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ qui sont deux à deux distincts.
1 est valeur propre de $A + A^T$ car la somme des coefficients le long de chaque ligne vaut 2.
On cherche donc la borne supérieure de $X^T \dfrac{A + A^T}{2} X$ avec X unitaire orthogonal à $E_1\left(\dfrac{A + A^T}{2}\right)$.
De l'étude, classique, de $X^T SX$ on déduit que la borne supérieure cherchée est en fait un maximum. C'est $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

Exercice 9 *(Ens 2025)*

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que si p et q commutent alors pq est aussi un projecteur orthogonal.
2. Montrer que dans tous les cas, les valeurs propres sont réelles et appartiennent à $[0; 1]$.
3. Soit $\lambda \in [0; 1]$. Déterminer deux projecteurs orthogonaux tels que λ soit valeur propre de pq.

Correction

1. p et q commutent donc $(pq)^2 = pqpq = p^2q^2 = pq$: pq est un projecteur.

   $$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \ (pq(x)|y) &= (q(x)|p(y)) \\ &= (x|q(p(y)) \text{ car les projecteurs orthogonaux sont symétriques} \\ &= (x|p(q(y))) \text{ car } p \text{ et } q \text{ commutent} \end{aligned}$$

   $p\circ q$ est donc un projecteur auto-adjoint. D'après le cours pq est un projecteur orthogonal.
2. L'énoncé est ambigu. En effet, pq étant un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ses valeurs propres sont réelles. Mais peut-être s'agissait-il de montrer ici que χ_{pq} est scindé sur $\mathbb{R}$?
   Dans le corrigé, on se contente de montrer que si λ est une racine réelle de χ_{pq} alors $\lambda \in [0; 1]$.
   Un projecteur diminue la norme :
   $\forall x \in E \ \ \|x\|^2 = \|p(x)^2\| + \|x - p(x)\|^2$ par Pythagore car $x = p(x) + x - p(x)$ avec $p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,(p)$ avec $\mathrm{Im}\,(p) \perp \mathrm{Ker}\,(p)$
   Donc si x est un vecteur propre de pq associé à la valeur propre λ alors :
   $|\lambda|\,\|x\| = \|\lambda x\| = \|p(q(x))\| \leq \|q(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|x\| > 0$
   Donc $|\lambda| \leq 1$
   Si $\lambda \neq 0$ alors $x = \dfrac{1}{\lambda} pq(x) \in \mathrm{Im}\,(p) = \ker(p - id)$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}\lambda\left\|x\right\|^2 & = & (\lambda x|x) = (pq(x)|x) = (q(x)|p(x)) \\ & = & (q(x)|x) \text{ car } x \in \ker(p - id) \\ & = & (q(x)|q(x) + x - q(x)) \text{ avec } x - q(x) \in \ker(q) = \mathrm{Im}\,(p)^{\perp} \\ & = & \left\|q(x)\right\|^2\end{array}$$

On en déduit $\lambda \geq 0$ (valable également bien sûr si $\lambda = 0$)

On peut aller plus loin en procédant différemment.
$\forall x \in \ker(q)$ $(pq)(x) = 0$
Donc toute base de $\ker(q)$ est formée de vecteurs propres de pq, la valeur propre associée étant nulle.
$\forall x \in \mathrm{Im}\,(p) = \ker(p - id) = \ker(p)^{\perp}$ $pq(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ et $pq(x) = pqp(x)$
Donc $\mathrm{Im}\,(p)$ est stable par pq et l'endomorphisme induit est symétrique car pqp l'est.
Il existe donc une base de $\mathrm{Im}\,(p)$ formée de vecteurs propres de pq.
Les valeurs propres associées sont positives car pqp est symétrique positif :
$\forall x \in E$ $(pqp(x)|x) = (q(p(x))|p(x))$
et q est autoadjoint positif car ses valeurs propres sont positives.
$(\ker(q) + \mathrm{Im}\,(p))^{\perp} = \ker(q)^{\perp} \cap \mathrm{Im}\,(p)^{\perp} = \mathrm{Im}\,(q) \cap \mathrm{Ker}\,(p)$
$\forall x \in \mathrm{Im}\,(q) \cap \ker(p)$ $pq(x) = p(x) = 0$
Donc toute base de $(\ker(q) + \mathrm{Im}\,(p))^{\perp}$ est formée de vecteurs propres de pq, la valeur propre associée étant nulle.
$E = \ker(q) + \mathrm{Im}\,(p) \oplus (\ker(q) + \mathrm{Im}\,(p))^{\perp}$
Donc en regroupant ces trois familles, on obtient une famille génératrice formée de vecteurs propres de pq.
On peut en extraire une base de E formée de vecteurs propres de pq.
pq est donc diagonalisable et χ_{pq} est scindé sur $\mathbb{R}$.
On a de plus la positivité des valeurs propres.
Il ne reste plus qu'à montrer qu'elles sont inférieures ou égales à 1 en procédant comme ci-dessus.

3. Il faut évidemment supposer $n \geq 2$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une BON de E.
Soit p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}e_1$.
Soit q la projection orthogonale sur $\mathbb{R}\epsilon_1$ avec $\epsilon_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2$.
$\|e_1\| = \|\epsilon_1\| = 1$ donc :

$$\begin{array}{rcl} pq(e_1) & = & p\left((\epsilon_1|e_1)\epsilon_1\right) = p(\cos(\theta)\epsilon_1) \\ & = & \cos(\theta)p(\epsilon_1) = \cos(\theta)(e_1|\epsilon_1)e_1 \\ & = & \cos^2(\theta)e_1\end{array}$$

Si on prend θ tel que $\cos(\theta) = \sqrt{\lambda}$, ce qui est possible car $\sqrt{\lambda} \in [0; 1]$, on obtient λ valeur propre de pq.