Révisions 2026
jeudi 18 juin 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Soit $F \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t, \end{cases}$
2. (a) Montrer que F est positive et décroissante.
   (b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On pourra s'intéresser à $F(x) - F'(x)$.
4. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ F(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
   En déduire la limite de F en 0^+.
5. Montrer $F(x) \sim_{0^+} -\ln(x)$

Exercice 2 *(Mines Telecom 2024)*

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $F'(x)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 3 *(Centrale 2024)*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin(t))\,\mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Montrer que u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle du second ordre dont u_n est solution.
3. En déduire S_n l'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation différentielle de la seconde question.

Exercice 4 *(CCP 2024)*

On définit quand c'est possible $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que f est bornée et calculer $f(0)$.
   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   Montrer $f(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
   (c) Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}^*\ xf'(x) + f(x) = 2f(x) - 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
4. Montrer rapidement que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire une équation différentielle vérifiée par f.
5. Montrer :
   $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-t^2/4}$$

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}\cos(xy)\,\mathrm{d}y$$

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Montrer :
   $\forall (k,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}\ \left|f^{(k)}(x)\right| \leq k!$
3. Quels sont les (x,k) tels que $\left|f^{(k)}(x)\right| = k!$?
4. Donner une formule explicite pour $f^{(k)}(x)$. On pourra utiliser $\cos(xy)\Re e\left(\mathrm{e}^{ixy}\right)$.
5. En déduire $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \dfrac{k!}{(1+x^2)^{k/2}}$.

Exercice 7 *(Ens 2025)*

On définit l'espace

$$\mathcal{W}_2 = \left\{f \in \mathcal{C}^\infty([1;+\infty[) \text{ tq } \forall j \in \mathbb{N}\ \exists M_j \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in [1;+\infty[\ \left|x^{j+2}f^{(j)}(x)\right| \leq M_j\right\}$$

Pour $f \in \mathcal{W}_2$, on pose

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $g \in \mathcal{W}_2$.