

Révisions 2026
jeudi 18 juin 2026

941

Exercice 1 (CCP 2024)

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ converge.

$$\text{Soit } F \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt, \end{cases}$$

2. (a) Montrer que F est positive et décroissante.
(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* puis que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .
On pourra s'intéresser à $F(x) - F'(x)$.
4. Montrer :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$
En déduire la limite de F en 0^+ .
5. Montrer $F(x) \sim_{0^+} -\ln(x)$

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t} \end{cases}$.
- f_x est continue sur \mathbb{R}_+ et $t^2 f_x(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f_x(t) \geq 0$
D'où $F(x) \geq 0$ en intégrant.
Soit x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x_1 \leq x_2$
On a sans problème :
 $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f_{x_1}(t) \geq f_{x_2}(t)$
On en déduit en intégrant : $F(x_1) \geq F(x_2)$.
 F est décroissante.
En raffinant l'argument, on peut montrer que F est strictement décroissante.
- (b) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{1}{1+t} \leq 1$
On multiplie par $e^{-xt} \geq 0$ et on intègre :
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$
Mais :

$$\forall x > 0 \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc } F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Remarque

On peut aussi utiliser le théorème de la limite aux bornes pour les intégrales à paramètre.

$$3. \text{ Soit } g \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t} \end{cases}$$

- g est \mathcal{C}^1 par rapport à x et :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{-t}{1+t} e^{-xt}$$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

- Pour tout $x > 0$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

- L'hypothèse de domination relative à $\frac{\partial g}{\partial x}$ est vérifiée sur tout segment de \mathbb{R}_+^* :

Soit $[a; b]$ ($0 < a < b$) un segment de \mathbb{R}_+^* .

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{1+t} e^{-xt} \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

avec $t \mapsto e^{-at}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ ($a > 0$)

Donc F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-xt} dt$$

On a alors :

$$\forall x > 0 \quad F(x) - F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: F est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R}_+^* .

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x}$$

Donc F' est de classe \mathcal{C}^n et F est de classe \mathcal{C}^{n+1} .

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$4. \text{ Soit } G : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

G est bien définie sur \mathbb{R}_+^* :

Soit $x > 0$.

$$t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ est continue sur } [x; +\infty[\text{ et } \frac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t}) \text{ en } +\infty.$$

On a :

$$\forall x > 0 \quad G(x) = e^x \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

ce qui permet d'invoquer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral.

G est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x > 0 \quad G'(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - e^x \frac{e^{-x}}{x} = G(x) - \frac{1}{x}$$

G est solution de la même équation différentielle que F .

$$0 \leq G(x) \leq e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \text{ donc } G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $F - G$ est solution de l'équation homogène associée $y' = y$ et :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x > 0 \quad F(x) - G(x) = C e^x$$

et on conclut avec les limites en $+\infty$.

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

On peut utiliser

$$\forall x \in]0; 1[\quad F(x) - G(x) \geq e^x \int_x^1 \frac{e^{-1}}{t} dt = e^{x-1} (-\ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

Le recours à G pour obtenir l'expression de $F(x)$ de l'énoncé n'est pas indispensable :

$$\begin{aligned} \frac{F(x)}{e^x} &= e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t)}}{1+t} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{y} dy = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

On peut obtenir la limite de F en 0^+ avec l'expression de l'énoncé :

$$\frac{e^{-t}}{t} \sim_{0^+} \frac{1}{t} \text{ et } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ n'est pas intégrable en } 0 \text{ donc } t \mapsto \frac{e^{-t}}{t} \text{ n'est pas intégrable en } 0^+.$$

Mais c'est une fonction positive donc $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

On en déduit :

$$F(x) = e^x \left(\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

5.

$$\begin{aligned} F(x) &= e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= e^x \left(\left[\ln t e^{-t} \right]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \ln t e^{-t} dt \right) \\ &= -\ln x + e^x \int_x^{+\infty} \ln t e^{-t} dt \end{aligned}$$

Comme $t \mapsto \ln(t) e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* (en $0 \ln(t) e^{-t} \sim \ln(t)$) on conclut facilement.

Exercice 2 (Mines Telecom 2024)

$$\text{Soit } F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 et calculer $F'(x)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \end{cases}$$

- f_x est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- $f_x(t) \xrightarrow[t > 0]{t \rightarrow 0} x$ ($\sin(xt) \sim_{t \rightarrow 0} xt$)
- $t^2 f_x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $g \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \end{cases}$

- g est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à x avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \cos(xt) e^{-t}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

• **Domination**

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$$

avec $t \mapsto e^{-t}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) &= \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \Re e \left(\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t} dt \right) \\ &= \Re e \left(\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} \right) = \Re e \left(\frac{1}{1-ix} \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

3. $F(0) = 0$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \arctan(x)$$

Exercice 3 (Centrale 2024)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin(t)) dt \end{cases}$.

1. Montrer que u_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
2. Déterminer une équation différentielle du second ordre dont u_n est solution.
3. En déduire S_n l'ensemble des solutions développables en série entière de l'équation différentielle de la seconde question.

Correction

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \cos(nt - x \sin(t)) \end{cases}$

- f est de classe \mathcal{C}^2 par rapport à x avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; \pi] \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \sin(t) \sin(nt - x \sin(t))$$

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; \pi] \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\sin^2(t) \cos(nt - x \sin(t))$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur $[0; \pi]$ (fonction continue sur un segment)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur $[0; \pi]$ (fonction continue sur un segment)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \cdot)$ est continue sur $[0; \pi]$.

- **Domination**

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; \pi] \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 1$$

avec $t \mapsto 1$ continue, positive et intégrable sur $[0; \pi]$

Donc u_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(nt - x \sin(t)) dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(t) \cos(nt - x \sin(t)) dt$$

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(nt - x \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left([-\cos(t) \sin(nt - x \sin(t))]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(t)(n - x \cos(t)) \cos(nt - x \sin(t)) dt \right) \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) \cos(nt - x \sin(t)) dt - x(u_n(x) + u_n''(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 u_n''(x) + x u_n'(x) + x^2 u_n(x) &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi x \cos(t) \cos(nt - x \sin(t)) dt \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi (x \cos(t) - n + n) \cos(nt - x \sin(t)) dt \\ &= \frac{n}{\pi} [-\sin(nt - x \sin(t))]_0^\pi + n^2 u_n(x) \\ &= n^2 u_n(x) \end{aligned}$$

D'où l'équation cherchée : $x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$.

3. Soit $\sum_{p \geq 0} a_p x^p$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

S solution de l'équation différentielle

$$\iff \forall x \in]-R; R[\quad x^2 \sum_{p=2}^{+\infty} p(p-1) a_p x^{p-2} + x \sum_{p=1}^{+\infty} p a_p x^{p-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{p+2} - n^2 \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p = 0$$

$$\iff \sum_{p=0}^{+\infty} (p(p-1) + p - n^2) a_p x^p + \sum_{p=2}^{+\infty} a_{p-2} x^p = 0$$

$$\iff -n^2 a_0 + (1 - n^2) a_1 + \sum_{p=2}^{+\infty} ((p-n)(p+n) a_p - a_{p-2}) x^p = 0$$

Dans le cas $n = 0$, on a comme CNS :

$$a_1 = 0 \text{ et pour tout } p \geq 2, a_p = -\frac{a_{p-2}}{p^2}$$

Dans le cas $n = 1$, on a comme CNS :

$$a_0 = 0 \text{ et pour tout } p \geq 2, a_p = -\frac{a_{p-2}}{(p-1)(p+1)}$$

Dans la cas $n \geq 2$, on a :

$a_0 = a_1 = 0$, pour tout p compris entre 2 et $n - 1$, $a_p = -\frac{a_{p-2}}{(p-n)(p+n)}$, $a_{n-2} = 0$ et pour tout p plus grand que $n + 1$, $a_p = -\frac{a_{p-2}}{(p-n)(p+n)}$

Dans tous les cas, si p n'a pas la parité de n alors $a_p = 0$

L'ensemble des solutions développables en série entière est donc de dimension au plus 1.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad u_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(nt) \cos(x \sin(t)) - \sin(nt) \sin(x \sin(t))) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(nt)(-1)^p \sin^{2p}(t)}{(2p)!} x^{2p} \, dt \int_0^\pi \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(nt)(-1)^p \sin^{2p+1}(t)}{(2p+1)!} x^{2p+1} \, dt \right) \end{aligned}$$

On montre facilement qu'il y a convergence normale des séries de fonctions, ce qui permet de prouver que u_n est développable en série entière (et ce n'est pas la fonction nulle).

On en déduit que l'ensemble des fonctions développables en série entière de l'équation différentielle est la droite engendrée par la fonction u_n .

Resterait ensuite à utiliser la relation de récurrence pour expliciter les coefficients du développement en série entière.

On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}$$

Exercice 4 (CCP 2024)

On définit quand c'est possible $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} \, dt$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
2. (a) Montrer que f est bornée et calculer $f(0)$.
- (b) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{Montrer } f(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} \, dt$$

- (b) En déduire que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
- (c) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x f'(x) + f(x) = 2f(x) - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} \, dt$$

4. Montrer rapidement que la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} \, dt$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et en déduire une équation différentielle vérifiée par f .
5. Montrer :
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2} \end{cases}$ est continue.

$f_x(t) = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

2. (a)

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt \right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(tx)|}{1+t^2} dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^{+\infty} \\
&\leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(b) Soit $F \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2} \end{cases}$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $F(., t)$ est continue.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $F(x, .)$ est continue (par morceaux).

• **Domination**

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad |F(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = F(0, t)$ avec $F(0, .)$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de continuité sous le signe \int , f est continue sur \mathbb{R} .

3. (a) On procède à une intégration par parties.

$$u(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad u'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$v'(t) = \cos(tx), \quad v(t) = \frac{\sin(tx)}{x}$$

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Comme v s'annule en 0, on a directement :

$$f(x) = \frac{2}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$$

(b) Soit $G \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G(., t)$ est de classe \mathcal{C}^1 avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) = \frac{t^2 \cos(tx)}{(1+t^2)^2}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $G(x, .)$ est continue (par morceaux).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $G(x, .)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ : à x fixé $G(x, t) = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^3} \right)$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial G}{\partial x}(x, .)$ est continue (par morceaux).

• **Domination**

$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} = F(0, t)$ avec $F(0, .)$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int , la fonction $x \mapsto xf(x)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

On en déduit que la fonction f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

$$(c) \forall x \in \mathbb{R}^* \quad xf(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad xf'(x) + f(x) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1) \cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt \\ &= 2f(x) - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

$$4. \text{ Soit } H \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $H(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) = -\frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $H(x, \cdot)$ est continue (par morceaux).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $H(x, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ : à x fixé $H(x, t) = O_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^4} \right)$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial H}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue (par morceaux).

• **Domination**

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial H}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2} \text{ avec } t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2} \text{ continue, positive et intégrable sur } \mathbb{R}_+.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int , la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

On reprend la formule de la question précédent qu'on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{1}{x} \left(f(x) - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt \right)$$

Cela montre que f' est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* ie f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^* .

On revient alors à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad xf'(x) = f(x) - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2} dt$$

qu'on dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad xf''(x) + f'(x) = f'(x) + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(tx)}{(1+t^2)^2} dt = f'(x) + xf(x)$$

Donc f est solution sur \mathbb{R}^* de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

$$5. \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall x > 0 \quad f(x) = A e^x + B e^{-x}$$

f est bornée sur \mathbb{R} donc $A = 0$.

f est continue sur \mathbb{R} donc en faisant tendre x vers 0, on obtient $B = f(0) = \frac{\pi}{2}$

On en déduit :

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

En revenant à la définition de l'énoncé, on voit que f est paire donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

Exercice 5 (Ens 2025)

Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$$

Correction

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

- f est \mathcal{C}^1 par rapport à t avec :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -x \sin(xt) e^{-x^2}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(\cdot, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} ($f(x, t) = O_{x \rightarrow \pm\infty}(e^{-x^2})$)

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ est continue sur \mathbb{R}

- **Hypothèse de domination**

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| = |x| e^{-x^2} = \phi(x)$$

avec ϕ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R} ($x^2 \phi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$)

Donc $F : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) e^{-x^2} dx$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad F'(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-x) \sin(xt) e^{-x^2} dx \\ &= \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \sin(tx) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} (t \cos(tx)) dx \quad \text{IPP facile à justifier} \\ &= -\frac{t}{2} F(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F'(t) = F(0) e^{-t^2/4}$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 6 (Ens 2025)

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \cos(xy) dy$$

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Montrer :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad |f^{(k)}(x)| \leq k!$$

3. Quels sont les (x, k) tels que $|f^{(k)}(x)| = k!$?

4. Donner une formule explicite pour $f^{(k)}(x)$. On pourra utiliser $\cos(xy) \Re(e^{ixy})$.

5. En déduire $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(1+x^2)^{k/2}}$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f_x \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto e^{-y} e^{ixy} \end{cases}$.

f_x est continue sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \quad |f_x(y)| \leq e^{-y}$$

Donc f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Il en est donc de même de sa partie réelle, ce qui assure la définition de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_x(y) dy &= \int_0^{+\infty} e^{(ix-1)y} dy = \left[\frac{e^{(ix-1)y}}{ix-1} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2} \end{aligned}$$

D'où le résultat en prenant la partie réelle.

2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$

On en déduit :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{(-1)^k k!}{(x-i)^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x+i)^{k+1}} \right) = \frac{(-1)^k k!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^{k+1}} - \frac{1}{(x+i)^{k+1}} \right)$$

On en déduit avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad |f^{(k)}(x)| &\leq \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{|x-i|^{k+1}} + \frac{1}{|x+i|^{k+1}} \right) \\ &\leq \frac{k!}{2} \frac{2}{(x^2+1)^{\frac{k+1}{2}}} = \frac{k!}{(x^2+1)^{\frac{k+1}{2}}} \\ &\leq k! \end{aligned}$$

Remarque

Les examinateurs ont utilisé le théorème de dérivation sous le signe \int pour calculer les dérivées successives de f .

3. D'après la question précédente, si $x \neq 0$ alors :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(x^2+1)^{\frac{k+1}{2}}} < k!$$

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) &= \frac{(-1)^k k!}{2i} \left(\frac{1}{(-i)^{k+1}} - \frac{1}{i^{k+1}} \right) \\ &= \frac{(-1)^k k!}{2i} \left(i^{k+1} - (-i)^{k+1} \right) \\ &= \frac{(-1)^k k! i^k}{2} \left(1 + (-1)^k \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |f^{(k)}(0)| = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ k! & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

4. L'expression de la question 2 me paraît suffisamment explicite.

5. J'ai mieux :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad |f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{(x^2+1)^{\frac{k+1}{2}}}$$

Exercice 7 (Ens 2025)

On définit l'espace

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([1; +\infty[) \text{ tq } \forall j \in \mathbb{N} \exists M_j \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall x \in [1; +\infty[\left| x^{j+2} f^{(j)}(x) \right| \leq M_j \right\}$$

Pour $f \in \mathcal{W}_2$, on pose

$$g(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt$$

Montrer que $g \in \mathcal{W}_2$.

Correction

On commence par montrer que g est bien définie.

Soit $x \geq 1$.

La fonction $h_x : t \mapsto e^{x-t} f(t)$ est continue sur $[x; +\infty[$.

$f \in \mathcal{W}_2$ donc :

$$\exists M_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall t \geq 1 \quad |f(t)| \leq \frac{M_0}{t^2}$$

Donc :

$$\forall t \geq x \quad |h_x(t)| \leq e^{x-t} \frac{M_0}{t^2} \leq \frac{M_0}{t^2}$$

On en déduit que h_x est intégrable sur $[x; +\infty[$.

Donc $g(x)$ est bien défini.

Le changement de variable $y = t - x$ donne alors :

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(x+y) e^{-y} dy$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: g est de classe \mathcal{C}^n et :

$$\forall x \geq 1 \quad g^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(x+y) e^{-y} dy$$

Soit $h \begin{cases} [1; +\infty[\times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x+y) e^{-y} \end{cases}$.

- Pour tout $x \in [1; +\infty[$ la fonction $y \mapsto h(x, y)$ est continue sur \mathbb{R}_+ ($x+y \in [1; +\infty[$)
- Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ la fonction $x \mapsto h(x, y)$ est continue sur $[1; +\infty[$

• Domination

$$\forall (x, y) \in [1; +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad |h(x, y)| \leq \frac{M_0}{(x+y)^2} e^{-y} \leq M_0 e^{-y}$$

avec $y \mapsto M_0 e^{-y}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+

D'après le théorème de continuité sous le signe \int , $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Soit $h \begin{cases} [1; +\infty[\times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f^{(n)}(x+y) e^{-y} \end{cases}$.

- h est \mathcal{C}^1 par rapport à x et :

$$\forall (x, y) \in [1; +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = f^{(n+1)}(x+y) e^{-y}$$

- Pour tout $x \in [1; +\infty[$, la fonction $h(x, \cdot)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ : c'est implicite dans l'hypothèse de récurrence, on peut l'ajouter pour être plus explicite
- Pour tout $x \in [1; +\infty[$, la fonction $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- L'hypothèse de domination est vérifiée :

$$\forall (x, y) \in [1; +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(x+y)^{n+3}} e^{-y} \leq M_{n+1} e^{-y}$$

avec $y \mapsto M_{n+1} e^{-y}$ continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+

D'après le théorème de dérivation sous le signe \int , $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré que g est \mathcal{C}^∞ sur $[1; +\infty[$ avec :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [1; +\infty[\quad g^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(x+y) e^{-y} dy$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times [1; +\infty[\quad |x^{n+2} g^{(n)}(x)| &\leq x^{n+2} \int_0^{+\infty} |f^{(n)}(x+y)| e^{-y} dy \\ &\leq x^{n+2} \int_0^{+\infty} \frac{M_n}{(x+y)^{n+2}} e^{-y} dy \\ &\leq M_n \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = M_n \end{aligned}$$

Donc $g \in \mathcal{W}_2$.