Révisions 2026
vendredi 19 juin 2026

941

Exercice 1 *(Mines 2024)*

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.
Soit R_n la variable aléatoire définie par :
$\forall \omega \in \Omega \; R_n(\omega) = \text{Card}\left(\{X_1(\omega); \dots; X_n(\omega)\}\right)$
Soit $S_{n,k}$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;k]\!]$.
Soit $\tau \begin{cases} \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}_N[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$

1. Justifier que T est un endomorphisme et donner T sa matrice dans la base canonique.
2. Justifier que T est un automorphisme et donner la matrice de T^{-1} dans la base canonique.
3. Calculer $P(R_n = 1)$.
4. Calculer $P(R_n = n)$.
5. Montrer que pour tout $p \in [\![0;n]\!]$, $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

   Justifier que la famille $\left(\dfrac{\binom{n}{k} S_{n,k}}{k^n}\right)_{0 \leq k \leq n}$ constitue une loi de probabilité.
6. Déterminer $P(R_n = k)$.
7. Soit $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Déterminer $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
   $\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$
8. Montrer :
   $\forall p \in [\![0;n]\!] \; S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n$

Exercice 2 *(Mines 2025)*

Soit $(X_i : \Omega \to \mathbb{N}^*)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose la variable aléatoire :

$$R_n : \omega \mapsto \text{Card}(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\})$$

où Card(.) est le nombre d'éléments dans $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n,k} = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i = k)$$

1. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire bornée par M. Montrer que :
$$E(Y) \leq M.P(Y \geq 1)$$
2. Montrer que :
$$\lim_{N \to +\infty} E\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}\right) = 0$$
3. Montrer que :
$$E(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{n,k})$$
4. Etudier la suite $(E(R_n))_{n \geq 1}$

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que :
- $E(X) = E(Y) = 0$
- X et Y ont une variance

Montrer :
$$P\left(\max\left(|X|, |X+Y|\right) > \epsilon\right) \leq \frac{V(X+Y)}{\epsilon^2}$$

Indication
Minorer $E\left((X+Y)^2 1_{A \cup B}\right)$ avec les évènements $A = (|X| \geq \epsilon)$ et $B = (|X| < \epsilon) \cap (|X+Y| \geq \epsilon)$

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1+\epsilon_k}{k+n}\right)$

1. Montrer que X_n^2 est d'espérance finie et calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. Montrer :
$\forall x \in \mathbb{R} \ \ |\arctan x - x| \leq \dfrac{x^2}{2}$
3. Déterminer $l = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$.
4. Montrer que $V(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
5. Montrer :
$\forall \epsilon > 0 \ P\left(|X_n - l| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Pour tout $x > 0$, soit X_x une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre x.

1. Quelle est l'espérance de X_x ?
   Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $P\left(|X_x - E(X_x)| \geq \epsilon x\right) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Soit $u_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} x^n$.
   Quel est le domaine de définition de u_α ?
   Calculer u_1 et u_2.
3. Montrer pour $\alpha < 0$, $u_\alpha(x) = o_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)$
4. Une question que le candidat a oubliée mais qu'il pense être :
   Montrer que $u_\alpha(x) \sim x^\alpha \,\mathrm{e}^x$
   Cette question est traitée dans le cours.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que
$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda$$
2. (Version 2) Montrer que
$$P(X \geq 2\lambda) = O_{\lambda\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda\right)$$

Exercice 7 *(Ens 2024)*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est indéfiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$.

1. Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.
2. Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $E(X) = 0$ et $E(X^2) < +\infty$.
   Montrer que pour tout $A > 0$, $P(X > A) > 0$.

Exercice 8 *(Ens 2024)*

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.

Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$.
On cherche le maximum de S et les suites qui le réalisent.