Révisions 2026
vendredi 19 juin 2026

941

Exercice 1 *(Mines 2024)*

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.
Soit R_n la variable aléatoire définie par :
$\forall \omega \in \Omega\ R_n(\omega) = \text{Card}\left(\{X_1(\omega); \dots; X_n(\omega)\}\right)$
Soit $S_{n,k}$ le nombre de surjections de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; k]\!]$.
Soit $\tau \begin{cases} \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}_N[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$

1. Justifier que T est un endomorphisme et donner T sa matrice dans la base canonique.
2. Justifier que T est un automorphisme et donner la matrice de T^{-1} dans la base canonique.
3. Calculer $P(R_n = 1)$.
4. Calculer $P(R_n = n)$.
5. Montrer que pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, $p^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$.

   Justifier que la famille $\left(\dfrac{\binom{n}{k} S_{n,k}}{n^n}\right)_{0 \le k \le n}$ constitue une loi de probabilité.
6. Déterminer $P(R_n = k)$.
7. Soit $(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Déterminer $(v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
   $\begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$
8. Montrer :
   $\forall p \in [\![0; n]\!]\ S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n$

Correction

1. La linéarité de τ est triviale.
   $\forall k \in [\![0; N]\!]\ \tau(X^k) = (X+1)^k = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l \in \mathbb{R}_n[X]$
   donc τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

Compte tenu du décalage d'indice, $t_{i,j}$ est le coefficient de degré $i-1$ de $\tau(X^{j-1})$:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leq j \end{cases}$$

2. Soit $\phi \begin{cases} \mathbb{R}_N[X] \to \mathbb{R}_N[X] \\ P(X) \mapsto P(X-1) \end{cases}$.

ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ (se démontre comme pour τ).
$\forall P \in \mathbb{R}_N[X]\ \tau(\phi(P)) = \tau(P(X-1)) = P(X+1-1) = P(X)$
Donc $\tau \circ \phi = id_{\mathbb{R}_N[X]}$. En dimension finie, cela suffit pour pouvoir affirmer que τ est un automorphisme et que $\tau^{-1} = \phi$
$\forall k \in [\![0; N]\!]\ \phi(X^k) = (X-1)^k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{k-l} \binom{k}{l} X^l \in \mathbb{R}_N[X]$

On en déduit que le coefficient d'indices i et j de T^{-1} $\begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \leq j \end{cases}$

3.

$$\begin{aligned}
P\left(\mathrm{Card}\left(\{X_1, \dots, X_n\}\right) = 1\right) &= P\left(X_1 = X_2 = \dots = X_n\right) \\
&= P\left(\bigcup_{l=1}^{n}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = l)\right)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = l)\right) \text{ par incompatibilité} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} P(X_i = l)\right) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{l=1}^{n} P(X_1 = l)^N = nP(X_1 = 1)^n = n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{n^{n-1}}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
P(R_n = n) &= P\left(\bigcup_{(x_1,\dots,x_n)\in\sigma_n}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right)\right) \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\sigma_n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) \text{ par incompatibilité} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\sigma_n}\left(\prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)\right) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\sigma_n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \frac{n!}{n^n}
\end{aligned}$$

5. p^n est le nombre d'applications de $[\![1; n]\!]$ dans $[\![1; p]\!]$.
Pour construire une telle application, on choisit une partie non vide de $[\![1; p]\!]$ et on

construit une surjection de $[\![1;n]\!]$ sur cette partie. Si k désigne le cardinal de l'image, on obtient la formule de l'énoncé.

Les nombres $\dfrac{\dbinom{n}{k}S_{n,k}}{n^n}$, $0 \leq k \leq n$, sont tous positifs et leur somme vaut 1 d'après le début de la question (avec $p = n$), donc ils définissent bien une loi de probabilité.

6. Si $k > n$ alors $P\left(\mathrm{Card}\left(\{X_1,\dots,X_n\}\right) = k\right) = 0$.
   On suppose désormais $k \leq n$.
   On note $E_{n,k}$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1;n]\!]$, il y en a $\dbinom{n}{k}$.
   Pour k compris entre 1 et n :

$$\begin{aligned}
P\left(\mathrm{Card}\left(\{X_1,\dots,X_n\}\right) = k\right) &= P\left(\bigcup_{A\in E_{n,k}} \left(\{X_1,\dots,X_n\} = A\right)\right)\\
&= \sum_{A\in E_{n,k}} P\left(\{X_1,\dots,X_n\} = A\right) \text{ par incompatibilité}\\
&= \binom{n}{k} P\left(\{X_1,\dots,X_n\} = [\![1;k]\!]\right) \text{ par un argument de symétrie}\\
&= \binom{n}{k} P\left(\bigcup_{\sigma \text{ surjection de } [\![1;n]\!] \text{ sur } [\![1;k]\!]} \left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = \sigma(i))\right)\right)\\
&= \binom{n}{k} \sum_{\sigma \text{ surjection de } [\![1;n]\!] \text{ sur } [\![1;k]\!]} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = \sigma(i))\right) \text{ par incompatibilité}\\
&= \binom{n}{k} \sum_{\sigma \text{ surjection de } [\![1;n]\!] \text{ sur } [\![1;k]\!]} \left(\prod_{i=1}^{n} P(X_i = \sigma(i))\right) \text{ par indépendance}\\
&= \binom{n}{k} \sum_{\sigma \text{ surjection de } [\![1;n]\!] \text{ sur } [\![1;k]\!]} \frac{1}{n^n}\\
&= \frac{\dbinom{n}{k} S_{n,k}}{n^n}
\end{aligned}$$

   $P\left(\mathrm{Card}\left(\{X_1,\dots,X_n\}\right) = 0\right) = 0$ donc la formule reste vraie pour $k = 0$ en prenant la convention $S_{n,0} = 0$ ie il n'y a pas de surjection d'un ensemble non vide sur l'ensemble vide.

7.

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![0;n]\!]\ v_i &= \sum_{j=0}^{n} T_{j+1,i+1} u_j\\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} u_j
\end{aligned}$$

8. Si on pose $u_j = S_{n,j}$ alors :
   $\forall i \in [\![0;n]\!]\ v_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} S_{n,j} = i^n$

On en déduit que $\begin{pmatrix} S_{n,0} \\ \vdots \\ S_{n,n} \end{pmatrix} = \left(T^T\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2^n \\ \vdots \\ n^n \end{pmatrix} = (T^{-1})^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2^n \\ \vdots \\ n^n \end{pmatrix}$ Donc :

$$\begin{aligned}
\forall p \in [\![0;n]\!]\ S_{n,p} &= \sum_{k=0}^{n} \left(T^{-1}\right)_{k+1,p+1} k^n \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+k} \binom{p}{k} k^n
\end{aligned}$$

Exercice 2 *(Mines 2025)*

Soit $(X_i : \Omega \to \mathbb{N}^*)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose la variable aléatoire :

$$R_n : \omega \mapsto \mathrm{Card}(\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\})$$

où Card(.) est le nombre d'éléments dans $\{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n,k} = \bigcup_{i=1}^{n} (X_i = k)$$

1. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire bornée par M. Montrer que :

$$E(Y) \leq M.P(Y \geq 1)$$

2. Montrer que :

$$\lim_{N\to+\infty} E\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}\right) = 0$$

3. Montrer que :

$$E(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{n,k})$$

4. Etudier la suite $(E(R_n))_{n\geq 1}$

Correction

1. J'ai repris l'énoncé sur le site du concours mais il y a un problème : si Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ alors $P(Y \geq 1) = 1$ et l'inégalité est $E(Y) \leq M$ qui est vraie.
Je pense plutôt que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On a $Y \leq M.1_{Y\geq 1}$ et on conclut par croissance de l'espérance (une variable aléatoire positive et majorée ayant bien une espérance finie)

2. $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}$ est une somme infinie de termes positifs donc elle est bien définie, éventuellement infinie.
Néanmoins, $1_{A_{n,k}}$ vaut 1 si l'une des n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ prend la valeur k, 0 sinon.
Donc $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}$ est le nombre de valeurs différentes supérieures ou égales à N prises par $X_1, \dots, X_n$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}$ est majorée par n et :
$$0 \leq E\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}\right) \leq nP\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}\geq 1}\right) = nP\left(\exists i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } X_i > N\right)$$
Donc $0 \leq E\left(\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}\right) \leq n\left(1 - P(X_1 \leq N)^n\right)$
Par continuité croissante $P(X_1 \leq N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} P\left(\displaystyle\bigcup_{N\in\mathbb{N}} (X_1 \leq N)\right) = P(X_1 < +\infty) = 1$
ce qui permet de conclure.
3. $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}$
La linéarité de l'espérance ne suffit pas car la somme est infinie.
Néanmoins, on peut écrire :
$E(R_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} P(A_{n,k}) + E\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} 1_{A_{n,k}}\right)$
et appliquer la question précédente.
4. $A_{n,k} \subset A_{n+1,k}$ donc $P(A_{n,k}) \leq P(A_{n+1}, k)$.
On en déduit que la suite $(E(R_n))_{n\geq 1}$ est croissante.
Si les X_i ne prennent qu'un nombre fini F de valeurs alors R_n est majorée par F ainsi que son espérance donc la suite $(E(R_n))_{n\geq 1}$ converge.
En fait dans ce cas, $R_n = \displaystyle\sum_{k\in X_1(\Omega)} 1_{A_{n,k}}$ et
$E(R_n) = \displaystyle\sum_{k\in X_1(\Omega)} P(A_{n,k}) = \sum_{k\in X_1(\Omega)} (1 - P(X_1 \neq k)^n)$
On en déduit que $E(R_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Card}(X_1(\Omega))$
Supposons maintenant $X_1(\Omega)$ infini.
La suite $(E(R_n))_{n\geq 1}$ est croissante donc elle possède une limite l finie ou infinie.
Soit A une partie finie de $X_1(\Omega)$.
$E(R_n) \geq \displaystyle\sum_{k\in A} P(A_{n,k})$
En raisonnant comme ci-dessus, on montre $l \geq \mathrm{Card}(A)$
Comme le cardinal de A est arbitrairement grand, la suite $(E(R_n))_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que :

- $E(X) = E(Y) = 0$
- X et Y ont une variance

Montrer :

$$P\left(\max\left(|X|, |X+Y|\right) > \epsilon\right) \leq \frac{V(X+Y)}{\epsilon^2}$$

Indication

Minorer $E\left((X+Y)^2 1_{A\cup B}\right)$ avec les évènements $A = (|X| \geq \epsilon)$ et $B = (|X| < \epsilon) \cap (|X+Y| \geq \epsilon)$

Correction

Cet exercice a été donné à l'X en 2018 sans indication. J'ai repris mon corrigé de l'époque qui utilise peu ou prou la même méthode.

La première idée est d'introduire les événements $A = (|X| > \epsilon)$ et $B = (|X+Y| > \epsilon)$.

Par BT :

$P(A) \leq \dfrac{V(X)}{\epsilon^2}$

X et Y sont indépendantes donc $V(X) = V(X+Y) - V(Y) \leq V(X+Y)$ car $V(Y) \geq 0$

Par BT :

$P(B) \leq \dfrac{V(X+Y)}{\epsilon^2}$

Donc :

$P\left(\max\left(|X|, |X+Y|\right) > \epsilon\right) = P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \leq 2\dfrac{V(X+Y)}{\epsilon^2}$

Pour améliorer la majoration, il faudrait une union disjointe.

On prend donc $A = (|X| > \epsilon)$ et $C = (|X+Y| > \epsilon) \cap (|X| \leq \epsilon)$.

Il faut s'inspirer de la démonstration de BT et non l'appliquer.

On considère donc $E\left(1_{A\cup C}(X+Y)^2\right)$.

$1_{A\cup C}(X+Y)^2 \leq (X+Y)^2$ donc :

$E\left(1_{A\cup C}(X+Y)^2\right) \leq E((X+Y)^2)$

Mais $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0$ donc $E\left(1_{A\cup C}(X+Y)^2\right) \leq V(X+Y)$

A et C sont disjoints donc $1_{A\cup C} = 1_A + 1_C$ et :

$E\left(1_{A\cup C}(X+Y)^2\right) = E\left(1_A(X+Y)^2\right) + E\left(1_C(X+Y)^2\right)$

$E\left(1_A(X+Y)^2\right) = E(1_A X^2) + 2E(1_A XY) + E(1_A Y^2)$

$1_A X^2 \geq \epsilon^2 1_A$ donc $E(1_A X^2) \geq \epsilon^2 P(A)$

$1_A X$ est une fonction de X donc par indépendance : $E(1_A XY) = E(1_A X)E(Y) = 0$

$1_A Y^2 \geq 0$ donc $E(1_A Y^2) \geq 0$

D'où : $E\left(1_A(X+Y)^2\right) \geq \epsilon^2 P(A)$

$1_C(X+Y)^2 \geq \epsilon^2 1_C$ donc $E(1_C(X+Y)^2) \geq \epsilon^2 P(C)$

On a donc :

$V(X+Y) \geq E\left(1_{A\cup C}(X+Y)^2\right) \geq \epsilon^2 P(A) + \epsilon^2 P(C) = \epsilon^2 P(A\cup C)$ car $A \cap C = \emptyset$

On conclut facilement.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1+\epsilon_k}{k+n}\right)$

1. Montrer que X_n^2 est d'espérance finie et calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. Montrer :

   $\forall x \in \mathbb{R}\ \ |\arctan x - x| \leq \dfrac{x^2}{2}$

3. Déterminer $l = \lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.
4. Montrer que $V(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
5. Montrer :
$\forall \epsilon > 0 \; P\left(|X_n - l| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$|X_n| \leq n\dfrac{\pi}{2}$ donc X_n^2 est bornée et X_n^2 est d'espérance finie.
Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} E(X_n) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E\left(\arctan\left(\frac{1+\epsilon_k}{k+n}\right)\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1-1}{k+n}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1+1}{k+n}\right)\right) \text{ par le théorème de transfert} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k+n}\right) \end{array}$$

Par indépendance :

$$\begin{array}{rcl} V(X_n) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V\left(\arctan\left(\frac{1+\epsilon_k}{k+n}\right)\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1-1}{k+n}\right)^2 + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1+1}{k+n}\right)^2 - \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{2}{k+n}\right)^2\right) \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{2}{k+n}\right)^2 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R} \; |\arctan(x) - x| & = & \left|\arctan(x) - \arctan(0) - (x-0)\arctan'(0)\right| \\ & \leq & \displaystyle\frac{x^2}{2} \sup_{t \in [\min(x,0), \max(x,0)]} \left(\left|\arctan''(t)\right|\right) \\ & \leq & \displaystyle\frac{x^2}{2} \sup_{t \in [\min(x,0), \max(x,0)]} \left(\frac{2|t|}{(1+t^2)^2}\right) \end{array}$$

Mais :
$\forall t \in \mathbb{R} \; 1 + t^2 - 2|t| = (|t| - 1)^2 \geq 0$
Donc :
$\forall t \in \mathbb{R} \; \dfrac{2|t|}{1+t^2} \leq 1$
puis :
$\forall t \in \mathbb{R} \; \dfrac{2|t|}{(1+t^2)^2} \leq 1$
On conclut facilement.

3.

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \left|E(X_n)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+n}\right| &= \left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\left(\frac{2}{k+n}\right)-\frac{2}{k+n}\right)\right|\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|\arctan\left(\frac{2}{k+n}\right)-\frac{2}{k+n}\right|\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{4}{(k+n)^2}\leq\frac{n}{(n+1)^2}\\ &\leq \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Donc $E(X_n)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Mais :

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{1}{1+x}=\ln(2)$

Donc $E(X_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)$

4. $0\leq V(X_n)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{2}{k+n}\right)^2\leq\frac{1}{4}\times n\times\left(\arctan\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

5. Soit $\epsilon>0$.

$\exists n_0>0$ tq $\forall n\geq n_0\ \ |E(X_n)-l|\leq\dfrac{\epsilon}{2}$

$\forall n\geq n_0\ \ |X_n-l|\leq|X_n-E(X_n)|+|E(X_n)-l|\leq|X_n-E(X_n)|+\dfrac{\epsilon}{2}$

Donc $(|X_n-l|\geq\epsilon)\subset\left(|X_n-E(X_n)|\geq\dfrac{\epsilon}{2}\right)$

Donc par croissance de la probabilité et Bienaymé-Tchebychev :

$\forall n\geq n_0\ P\left(|X_n-l|\geq\epsilon\right)\leq\dfrac{4V(X_n)}{\epsilon^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

et on conclut facilement.

Exercice 5 *(Mines 2024)*

Pour tout $x>0$, soit X_x une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre x.

1. Quelle est l'espérance de X_x ?

   Montrer que pour tout $\epsilon>0$, $P\left(|X_x-E(X_x)|\geq\epsilon x\right)=O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Soit $u_\alpha(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{n!}x^n$.

   Quel est le domaine de définition de u_α ?

   Calculer u_1 et u_2.

3. Montrer pour $\alpha<0$, $u_\alpha(x)=o_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x\right)$

4. Une question que le candidat a oubliée mais qu'il pense être :

   Montrer que $u_\alpha(x)\sim x^\alpha\,\mathrm{e}^x$

   Cette question est traitée dans le cours.

Correction

1. $E(X_x) = x$
   Soit $\epsilon > 0$.
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef :
   $P\left(|X_x - E(X_x)| \geq \epsilon x\right) \leq \dfrac{V(X_x)}{\epsilon^2 x^2} = \dfrac{x}{\epsilon^2 x^2} = \dfrac{1}{\epsilon^2 x}$
2. Soit $r > 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n r^n > 0$
   $\dfrac{a_{n+1}r^{n+1}}{a_n r^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \dfrac{r}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$
   D'après la règle de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n r^n$ converge.
   Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^\alpha}{n!}x^n$ est donc infini.
   Le domaine de définition de u_α est donc $\mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ u_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} \\ &= x\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$
   On peut aussi remarquer que :
   $u_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathrm{e}^x P(X_x = n) = \mathrm{e}^x \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X_x = n) = \mathrm{e}^x E(X_x)$
   ce qui permet de retrouver $u_1 = x\,\mathrm{e}^x$
   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ u_2(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}x^{n+1} \\ &= xu_1(x) + x\,\mathrm{e}^x = x(x+1)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$
   Comme pour u_1, on a :
   $$\begin{aligned}u_2 &= \mathrm{e}^x E(X_x^2) = \mathrm{e}^x(V(X_x) + E(X_x)^2) = \mathrm{e}^x(x + x^2) \\ &= x(x+1)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$
3. Il s'agit de montrer : $\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{n!}x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   Plusieurs points de vue sont possibles.
   - **Point de vue des séries de fonctions**
     On essaie d'appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$
     avec $f_n : x \mapsto \dfrac{n^\alpha}{n!}x^n\,\mathrm{e}^{-x}$
     L'étude des variations de f_n est très facile et on trouve :
     $\|f_n\|_\infty = \dfrac{n^\alpha}{n!}n^n\,\mathrm{e}^{-n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}n^{1/2-\alpha}}$
     Si $\alpha < -\dfrac{1}{2}$ alors $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et on peut appliquer le théorème de la double limite.
     Par contre si $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$, il n'y a pas convergence normale.
     Il pourrait y avoir convergence uniforme mais je ne vois pas de moyen simple d'en décider.

- **Point de vue des séries numériques**
Soit $\epsilon > 0$.
$\alpha < 0$ donc $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et :
$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0$ $n^\alpha \leq \epsilon$
$\forall x > 0$ $0 \leq \dfrac{u_\alpha(x)}{\mathrm{e}^x} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0}\frac{n^\alpha}{n!}x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{n^\alpha}{n!}x^n\right)$
On en déduit :
$\forall x > 0$ $0 \leq \dfrac{u_\alpha(x)}{\mathrm{e}^x} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0}\frac{n^\alpha}{n!}x^n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}\frac{\epsilon}{n!}x^n\right)$
Puis :
$\forall x > 0$ $0 \leq \dfrac{u_\alpha(x)}{\mathrm{e}^x} \leq \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0}\frac{n^\alpha}{n!}x^n + \epsilon$
Mais $\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0}\frac{n^\alpha}{n!}x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists x_0 > 0$ tq $\forall x \geq x_0$ $\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0}\frac{n^\alpha}{n!}x^n \leq \epsilon$
On a alors :
$\forall x \geq x_0$ $0 \leq \dfrac{u_\alpha(x)}{\mathrm{e}^x} \leq 2\epsilon$
D'où le résultat.
- **Point de vue des probabilités**
On remarque :
$\forall x > 0$ $u_\alpha(x) = \mathrm{e}^x E\left(f(X_x)\right)$
avec $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^\alpha \text{ si } t > 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$
Il s'agit donc de montrer que $E(f(X_x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
0 \leq E(f(X_x)) &\leq E\left(f(X_x)1_{|X_x-E(X_x)|<\frac{1}{2}x} + f(X_x)1_{|X_x-E(X_x)|\geq\frac{1}{2}x}\right)\\
&\leq E\left(f(X_x)1_{|X_x-x|<\frac{1}{2}x}\right) + E\left(f(X_x)1_{|X_x-E(X_x)|\geq\frac{1}{2}x}\right)\\
&\leq E\left(\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha 1_{|X_x-x|<\frac{1}{2}x}\right) + E\left(1\times 1_{|X_x-E(X_x)|\geq\frac{1}{2}x}\right)\\
&\leq \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha P\left(|X_x-x|<\frac{1}{2}x\right) + P\left(|X_x-E(X_x)|\geq\frac{1}{2}x\right)\\
&\leq \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha + O\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (α est strictement négatif)

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que
$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^\lambda$$

2. (Version 2) Montrer que

$$P(X \geq 2\lambda) = O_{\lambda \to +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda}\right)$$

Correction

1. L'inégalité de Markov donne $P(X \geq 2\lambda) = P(X \geq 2E(X)) \leq \dfrac{1}{2}$, ce qui est meilleur que l'énoncé quand λ est proche de 0 car $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 1$ mais franchement moins bon quand λ est grand car $\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.
   L'idée est que l'évènement $(X \geq 2\lambda)$ est le même que l'évènement $(s^X \geq s^{2\lambda})$ lorsque $s > 1$.
   L'espérance de s^X est donnée par la série génératrice de la loi de Poisson :
   $E\left(s^X\right) = G_X(s) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$
   Donc :
   $$\begin{aligned} P(X \geq 2\lambda) &= P\left(s^X \geq s^{2\lambda}\right) = P\left(s^X \geq s^{2\lambda}\,\mathrm{e}^{(1-s)\lambda} E\left(s^X\right)\right) \\ &\leq \frac{\mathrm{e}^{(s-1)\lambda}}{s^{2\lambda}} \text{ par Markov avec } s^X \text{ positive d'espérance strictement positive} \\ &\leq \left(\frac{\mathrm{e}^{s-1}}{s^2}\right)^{\lambda} \end{aligned}$$
   et il n'y a plus qu'à prendre $s = 2$.
2. L'autre idée pour faire mieux que Markov consiste à utiliser finement la loi de X en écrivant :
   $P(X \geq 2\lambda) = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$
   avec $n_0 = \lfloor 2\lambda \rfloor + 1$ si 2λ n'est pas entier et $n_0 = \lfloor 2\lambda \rfloor = 2\lambda$ si 2λ est un entier.
   $\forall n \geq n_0 \quad \dfrac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{\lambda}{n+1}\dfrac{\lambda^n}{n!} \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ car $n \geq n_0 \geq 2\lambda$
   Donc :
   $$\begin{aligned} 0 \leq P(X \geq 2\lambda) &\leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n_0}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{2^{n-n_0} n_0!} \\ &\leq 2\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \end{aligned}$$
   Quand λ tend vers $+\infty$, n_0 tend vers $+\infty$ donc :

$$2\frac{\lambda^{n_0}}{n_0!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sim 2\lambda^{n_0}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-n_0}}{\sqrt{2\pi n_0}n_0^{n_0}}$$

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda^{n_0}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\mathrm{e}^{n_0}}{\sqrt{2\pi n_0}n_0^{n_0}} & = & \sqrt{\dfrac{2}{\pi n_0}}\left(\dfrac{\lambda}{n_0}\right)^{n_0}\mathrm{e}^{n_0-\lambda} \\ & \leq & \sqrt{\dfrac{1}{\pi\lambda}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_0}\mathrm{e}^{n_0-\lambda} \text{ car } n_0 \geq 2\lambda \\ & \leq & \sqrt{\dfrac{1}{\pi\lambda}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\lambda}\mathrm{e}^{n_0-\lambda} \text{ car } n_0 \geq 2\lambda \\ & \leq & \sqrt{\dfrac{1}{\pi\lambda}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\lambda}\mathrm{e}^{\lambda-1} \text{ car } n_0 \leq 2\lambda+1 \\ & \leq & \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-1}\sqrt{\pi}}\,\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^{\lambda} \end{array}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 7 *(Ens 2024)*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est indéfiniment divisible si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$.

1. Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.
2. Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $E(X) = 0$ et $E(X^2) < +\infty$.
   Montrer que pour tout $A > 0$, $P(X > A) > 0$.

Correction

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Poisson de paramètres $\dfrac{\lambda}{n}$.
   Comme ce sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, on peut utiliser les séries génératrices.

$$\begin{array}{rcl} \forall t \in \mathbb{R}\ G_{X_{n,1}+\cdots+X_{n,n}}(t) & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} G_{X_{n,i}}(t) = \Big(G_{X_{1,1}}(t)\Big)^n \\ & = & \Big(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}(t-1)}\Big)^n = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \\ & = & G_X(t) \end{array}$$

   Donc $X \sim X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$.
   X est bien indéfiniment divisible.

   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$.
   Considérons $Y = aX + b$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, soit $Y_{n,i} = aX_{n,i} + \dfrac{b}{n}$.

Ces variables sont indépendantes et de même loi.
$\sum_{i=1}^{n} Y_{n,i} = a\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} + b$.
$X \sim X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ donc $Y = aX + b \sim a\,(X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}) + b = Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,n}$
Y est donc indéfiniment divisible.
En particulier $Y = -X + \lambda$ est une variable aléatoire indéfiniment divisible telle que $E(Y) = 0$ et $E(Y^2) = V(Y) = V(X) = \lambda > 0$.
Si $A > \lambda$ alors $P(Y) = 0$ montrant ainsi que l'énoncé transmis est faux.

2. On peut néanmoins montrer :
$\forall A > 0\ P(|X| > A) > 0$.
On raisonne par l'absurde. On suppose :
$\exists A > 0$ tq $P(|X| > A) = 0$.
$\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_{n,i} > \frac{A}{n}\right) \subset (X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} > A) \subset (|X_{,n1} + \cdots + X_{n,n}| > A)$
On en déduit : $\left(P\left(X_{n,1} > \frac{A}{n}\right)\right)^n \leq P(|X| > A) = 0$
Donc $P\left(X_{n,1} > \frac{A}{n}\right) = 0$
De même :
$\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_{n,i} < -\frac{A}{n}\right) \subset (X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} < -A) \subset (|X_{,n1} + \cdots + X_{n,n}| > A)$
On en déduit : $\left(P\left(X_{n,1} < -\frac{A}{n}\right)\right)^n \leq P(|X| > A) = 0$
Donc $P\left(X_{n,1} < -\frac{A}{n}\right) = 0$
On a donc : $P\left(|X_{n,1}| \leq \frac{A}{n}\right) = 1$.
On en déduit que $X_{1,n}$ possède une variance ainsi que $E(X_{n,1}^2) \leq \frac{A^2}{n^2}$.
On a alors $E(X) = nE(X_{1,n})$ donc $E(X_{n,1}) = 0$.
On a alors $V(X_{1,n}) = E(X_{n,1}^2) \leq \frac{A^2}{n^2}$
Mais $V(X) = nV(X_{n,1})$ donc $\frac{V(X)}{n} \leq \frac{A^2}{n^2}$
On en déduit $V(X) = 0$ donc $E = E(X) = 0$ avec probabilité 1, ce qui est exclus par l'énoncé (même si c'est mal formulé).

Exercice 8 *(Ens 2024)*

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$.
Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$.
On cherche le maximum de S et les suites qui le réalisent.

Correction
L'examinateur a posé des questions au fur et à mesure :
Et si (a_k) est géométrique ?

$\forall k \in \mathbb{N}^*\ a_k = pq^{k-1}$ (penser à la loi géométrique)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}\left(p^n q^{1+2+\cdots+n-1}\right)^{1/n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} p q^{(n-1)/2} \\
&= \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{\sqrt{q}}{2}\right)^{n-1} = \frac{p}{2\left(1-\dfrac{\sqrt{q}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2p}{(2-\sqrt{q})^2} = \frac{2(1-q)}{(2-\sqrt{q})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q} &= 2\,\frac{-(\sqrt{q}-2)^2 - (1-q)\dfrac{2}{2\sqrt{q}}(\sqrt{q}-2)}{(\sqrt{q}-2)^4} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{q}(\sqrt{q}-2)^3}\left(\sqrt{q}(\sqrt{q}-2)+1-q\right) \\
&= -\frac{2}{\sqrt{q}(\sqrt{q}-2)^3}\left(1-2\sqrt{q}\right)
\end{aligned}$$

$\sqrt{q}-2<0$ donc $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q}$ a le signe de $1-2\sqrt{q}$.

On en déduit que S maximale (si on se restreint aux lois géométriques) pour $q=\dfrac{1}{4}$ et dans ce cas $S=\dfrac{3/2}{(3/2)^2}=\dfrac{2}{3}$

On donne :
$\forall (x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+)^n\ \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$
Démontrer cette propriété lorsque $n=2$.
$\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\ \dfrac{1}{2}(x_1+x_2)-\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2\geq 0$ avec égalité si et seulement si $x_1=x_2$
Dans le cas général, on remarque d'abord que l'inégalité est évidente si l'un des x_i est nul.
Si les x_i sont tous strictement positifs, l'inégalité équivaut à :
$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\leq\ln\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$
qui découle de la concavité de ln.
Le cas d'égalité est celui où tous les x_i sont égaux.
Si on applique directement cette formule, on a, tout étant positif :

$$\begin{aligned}
S &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{l=1}^{n}x_l = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2^n}x_l \\
&\leq \sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{n=l}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x_l = \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{x_l}{2^l} \\
&\leq 2G_X\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(X=k)=a_k$.
G_X est convexe sur $[0;1]$: sa dérivée seconde est positive sur $[0;1[$ donc elle est convexe sur

$[0;1[$. Etant continue sur le segment, on montre facilement qu'elle ext convexe sur le segment.
Donc $G\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}G(0) + \frac{1}{2}G(1) = \frac{1}{2}$
Donc $S \leq 1$.
Le cas d'égalité donnerait tous les a_i égaux, ce qui n'est pas possible.
Toutefois pour une suite géométrique de raison r, $r^{-i}a_i$ est constant. D'où l'idée d'écrire :
$a_1 \dots a_n = r^{1+2+\dots+n-1}(a_1 \times r^{-1}a_2 \times \dots \times r^{-(n-1)}a_n)$
Donc $(a_1 \dots a_n)^{1/n} = r^{(n-1)/2}(a_1 \times r^{-1}a_2 \times \dots \times r^{-(n-1)}a_n)^{1/n}$ D'où :

$$\begin{aligned}
S &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}r^{(n-1)/2}\sum_{k=1}^{n} r^{-(k-1)}a_k\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{r^{(n-1)/2-(k-1)}}{2^n}a_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{r^{(n-1)/2-(k-1)}}{2^n}a_k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{r^{-(k-1)}}{2}a_k\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{r^{1/2}}{2}\right)^{n-1}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r^{-(k-1)}}{2}\left(\frac{r^{1/2}}{2}\right)^{k-1}\frac{a_k}{1-r^{1/2}/2} \text{ si } \frac{r^{1/2}}{2} < 1 \\
&\leq \frac{1}{2-\sqrt{r}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r^{-(k-1)/2}}{2^{k-1}}a_k = \frac{2\sqrt{r}}{2-\sqrt{r}}G\left(\frac{1}{2\sqrt{r}}\right) \text{ si } \frac{1}{2\sqrt{r}} \leq 1 \\
&\leq \frac{1}{2-\sqrt{r}} \text{ si } \frac{1}{4} \leq r < 4
\end{aligned}$$

En prenant $r = \frac{1}{4}$, on a $S \leq \frac{2}{3}$.
Si on fait les calculs avec $r = \frac{1}{4}$, on voit que le cas d'égalité est celui où $4^{k-1}a_k = Cte$ ie $a_k = \frac{a_1}{4^{k-1}}$.
a_1 est déterminé par $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$. C'est la loi géommétrique de paramètre $\frac{3}{4}$.