Révisions 2026
vendredi 22 mai 2026

941

Exercice 1 *(Centrale 2015, rapport du jury. Cet exercice a été donné aux Mines en 2021 et en 2024)*

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \int_{1/x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f. Préciser les limites de f aux bornes de D.
2. Etudier la continuité de f sur D.
3. Dessiner l'allure de la représentation graphique de f.

Exercice 2 *(Centrale 2024)*

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ tq } f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}$.

1. Montrer :
   $\forall (f,g) \in E^2$ fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que E est un espace vectoriel .
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' appartiennent à E.
   Montrer que $f' \in E$

Exercice 3 *(X 2024)*

Pour g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge, on pose $\|g\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t}$.
Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0)f'(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ convergent.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge et $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2\,\|f''\|_2$.

Exercice 4 *(Ens 2025)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = 0$ pour $|x| > 3$. Montrer que :

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right)^4 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)$$

Exercice 5 *(Ens 2024)*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
2. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$?

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent quand t tend vers $+\infty$ de

$$A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt) x^{n-2} dx$$

Exercice 7 *(Ens 2025)*

Soit $a > 0$. Montrer que

$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a} \cos(ty)\,\mathrm{d}t$$

admet une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$ pour $y > 0$. On note $f_\infty(y)$ cette limite. Déterminer un équivalent de $f_\infty(y)$ quand y tend vers 0.