

Révisions 2026

vendredi 22 mai 2026

941

Exercice 1 (Centrale 2015, rapport du jury. Cet exercice a été donné aux Mines en 2021 et en 2024)

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \int_{1/x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f . Préciser les limites de f aux bornes de D .
2. Etudier la continuité de f sur D .
3. Dessiner l'allure de la représentation graphique de f .

Correction

1. $\forall t > -1 \quad 1+t^3 > 0$

$$1+(-1)^3 = 0$$

$$\forall t < -1 \quad 1+t^3 < 0$$

Si $x < -1$, alors $\left[\frac{1}{x}; x^2\right] \subset]-1; +\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

Si $x = -1$, on a affaire à $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$ qui est impropre à gauche.

$1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2) \sim_{-1} 3(1+t)$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t)^{1/2}}$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur $] -1; 1]$ et $f(-1)$ est défini.

Si $x \in] -1; 0[$, on a $\frac{1}{x} < -1 < x^2$ et $f(x)$ n'est pas défini.

Si $x = 0$, $f(x)$ n'est pas défini car $\frac{1}{x}$ ne l'est pas.

Enfin si $x > 0$ alors $\left[\frac{1}{x}; x^2\right] \subset]0; +\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

$$\forall x < -1 \quad f(x) = \int_{1/x}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} + \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

D'après le théorème fondamental du calcul différentiel intégral : $\int_0^X \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 0$.

Par composition des limites : $\int_{1/x}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -0 = 0$

$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$

On montre de manière similaire :

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}]{\quad} \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = f(-1)$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+}{\quad} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}{\quad} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

2. Si on note F une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ définie sur $] -1; +\infty[$, on a :

$$\forall x \in] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[\quad f(x) = F(x^2) - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sous cette forme, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty; -1[\cup]0; 1[$ et on a vu dans la question précédente que f est continue en -1 .

3.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[\quad f'(x) &= 2xF'(x^2) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{\sqrt{x(x^3+1)}} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) > 0$$

f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}]{\quad} +\infty$ donc la courbe aura une tangente verticale au point d'abscisse -1 .

$$\begin{aligned} \forall x < -1 \quad f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x(x^3+1)} + \sqrt{1+x^6}}{\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}} \\ &= \frac{4x^3(x^3+1) - 1 - x^6}{(2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}} \\ &\quad \text{avec } 2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6} < 0 \\ &= \frac{3x^6 + 4x^3 - 1}{(2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}} \end{aligned}$$

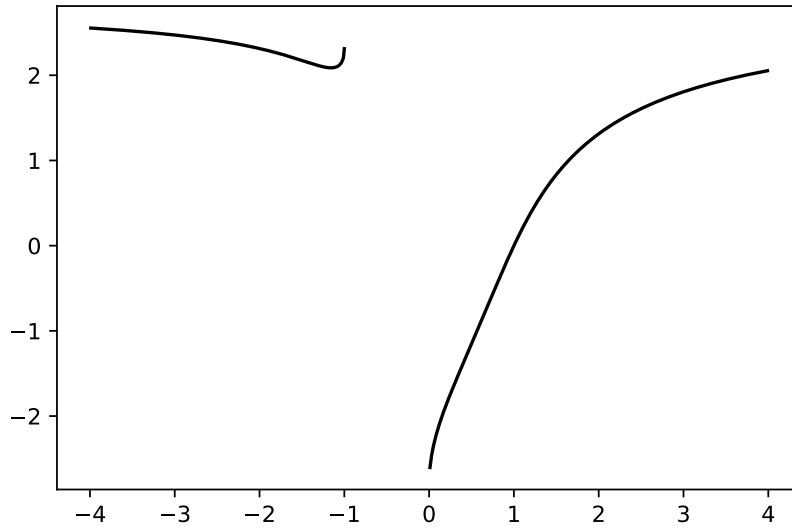
On introduit alors le polynôme $P(X) = 3X^2 + 4X - 1$.

Ses racines sont $r_1 = \frac{-4 - \sqrt{28}}{6} = -\frac{2 + \sqrt{7}}{3} \simeq -1.55$ et $r_2 = \frac{\sqrt{7} - 2}{3} > 0$.

$$\forall x < -1 \quad f'(x) = \frac{3(x^3 - r_1)(x^3 - r_2)}{(2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}$$

On note $x_0 = \sqrt[3]{r_1} \simeq -1,16$.

f est décroissante sur $] -\infty; x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0; -1]$.



Exercice 2 (Centrale 2024)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ tq } f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}$.

1. Montrer :
 $\forall (f, g) \in E^2$ fg est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que E est un espace vectoriel .
3. Soit f de classe \mathcal{C}^2 telle que f et f'' appartiennent à E .
 Montrer que $f' \in E$

Correction

1. Soit $(f, g) \in E^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

En effet :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - |xy| = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|) = \frac{(|x| - |y|)^2}{2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |(fg)(x)| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \\ &\leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2 \end{aligned}$$

Or $|f|^2 + |g|^2$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc fg est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

2. E est inclus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et contient la fonction nulle.
 E est stable par combinaisons linéaires :
 Soit $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
 $(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2$ est une combinaison linéaire de fonctions intégrables
 donc une fonction intégrable.
3. Soit f de classe \mathcal{C}^2 telle que f et f'' appartiennent à E .
 $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x f'(t)^2 dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t) dt.$

D'après la première question : $\int_0^x f(t)f''(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)f''(t) dt \in \mathbb{R}$
 Supposons que f' n'appartiennent pas à E ie $(f')^2$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}_+ .
 Comme c'est une fonction positive, $\int_0^x (f'(t))^2 dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
 On a alors $f(x)f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc :

$$\exists x_0 > 0 \text{ tq } \forall x \geq x_0 \ f(x)f'(x) \geq 1.$$

$$\forall x \geq x_0 \ f(x)^2 - f(x_0)^2 = \int_x^{x_0} 2f(t)f'(t) dt \geq 2(x - x_0)$$

Donc :

$$\forall x \geq x_0 \ 0 \leq 2(x - x_0) \leq f(x)^2$$

f^2 étant intégrable sur \mathbb{R}_+ , $x \mapsto 2(x - x_0)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ : c'est absurde.

Exercice 3 (X 2024)

Pour g de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} continue telle que $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ converge, on pose $\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt}$.

Soit f de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(0)f'(0) = 0$ et $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t)^2 dt$ convergent.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$ converge et $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|f''\|_2$.

Correction

ff' fait penser à la dérivée de f^2 donc on écrit :

$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ f(t)^2 - f(0)^2 = 2 \int_0^t f(x)f'(x) dx$ mais cela ne permet pas d'exploiter l'hypothèse $f(0)f'(0) = 0$.

La dérivée de ff' est $(f')^2 + ff''$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ f(t)f'(t) = f(t)f'(t) - f(0)f'(0) = \int_0^t (f'(x)^2 + f(x)f''(x)) dx = \int_0^t f'(x)^2 dx + \int_0^t f(x)f''(x) dx$$

Supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(x)^2 dx$ diverge.

La fonction $(f')^2$ est positive donc $\int_0^t f'(x)^2 dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\text{En effet : } \frac{a^2 + b^2}{2} - |ab| = \frac{1}{2} (|a| - |b|)^2 \geq 0$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ |f(x)f''(x)| \leq \frac{1}{2} (f(x)^2 + f''(x)^2)$$

Donc la fonction ff'' est intégrable sur \mathbb{R}_+ et $\int_0^t f(x)f''(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $f(t)f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \geq t_0 \ f(t)f'(t) \geq 1$$

$$\forall t \geq t_0 \ f(t)^2 \geq f(0)^2 + 2 \int_0^{t_0} f(t)f'(t) dt + 2(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc il existe $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \geq t_1 \quad f(t)^2 \geq 1 \geq 0$$

f^2 étant intégrable en $+\infty$, la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable en $+\infty$.

C'est absurde donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(x)^2 dx$ converge.

On en déduit $f(t)f'(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} f'(x)^2 dx + \int_0^{+\infty} f(x)f''(x) dx \in \mathbb{R}$ noté μ .

On suppose $\mu \neq 0$.

$f(t)f'(t) \sim \mu$ avec $t \mapsto \mu$ non intégrable en $+\infty$ donc ff' n'est pas intégrable en $+\infty$

Mais ff' est de signe constant (celui de μ) au voisinage de $+\infty$ donc $\int_0^t f(x)f'(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \pm\infty$

Mais $\int_0^t f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(t)^2 - f(0)^2) \geq -\frac{1}{2}f(0)^2$ donc $\int_0^t f(x)f'(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$

On en déduit $f(t)^2 = f(0)^2 + 2 \int_0^t f(x)f'(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et on conclut comme ci-dessus.

On en déduit que $\mu = 0$ ie $\int_0^{+\infty} f'(x)^2 dx = - \int_0^{+\infty} f(x)f''(x) dx$.

Si on note E l'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telles que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ alors :

- E est un sev de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$
- L'application $\Phi : (f, g) \in E^2 \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire.
- $\|f'\|^2 = -(f | f'') \leq |(f | f'')| \leq \|f\|_2 \|f''\|_2$ par Cauchy-Schwarz

Le troisième point découle directement de ce qui précède.

Pour le premier point :

- $E \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$
- La fonction nulle est dans E .
- $\forall (f, g) \in E \quad 0 \leq (f + g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg \leq 2f^2 + 2g^2$

Donc :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad f + g \in E$$

La stabilité par produit externe est facile.

Pour le second point :

- $\forall (f, g) \in E^2 \quad |fg| \leq f^2 + g^2$
Donc pour tout $(f, g) \in E^2$, la fonction fg est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
L'application Φ est bien définie.
- La symétrie est facile : le produit des réels est commutatif
- La bilinéarité de Φ découle de la linéarité de l'intégrale.
- Si f est une fonction de E différente de la fonction nulle alors f^2 est une fonction différente de la fonction nulle continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ donc $\Phi(f, f) = \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt > 0$

Exercice 4 (Ens 2025)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(x) = 0$ pour $|x| > 3$. Montrer que :

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right)^4 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \right)$$

Correction

La valeur absolue dans les intégrales ne sert à rien : pour un réel t , $|t|^2 = t^2$. Elle serait utile

si f était à valeurs complexes, mais on est obligé de supposer f à valeurs réelles pour que la résolution de l'exercice puisse se faire avec les outils du programme.

La convergence des intégrales ne pose aucun problème car f est nulle en dehors du segment $[-3; 3]$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus [-3; 3] \quad |f(t)|^4 = 0 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \right)$$

Par continuité de f , $f(-3) = f(3) = 0$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [-3; 3] \quad |f(t)|^2 &= |f(t)^2 - f(-3)^2| = \left| \int_{-3}^t (f^2)'(x) dx \right| = 2 \left| \int_{-3}^t f(t)f'(t) dt \right| \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \right)^{1/2} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)|^4 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \right)$$

Donc :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x)|^4) \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \right)$$

La fonction $x \mapsto x^4$ étant croissante sur \mathbb{R}_+ , on en déduit :

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \right)^4 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 \right)$$

Exercice 5 (Ens 2024)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , décroissante et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

1. On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

2. On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}$?

Correction

f est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) > 0$$

f est décroissante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) \leq 0$$

f est décroissante et minorée par 0 donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+$.

Si $l \neq 0$ alors $f(x) \sim_{+\infty} l$.

Or f est intégrable en $+\infty$ donc $x \mapsto l$ aussi.

C'est absurde donc $l = 0$.

1. Soit $\epsilon > 0$.

$$\exists x_0 > 0 \text{ tq } \forall x \geq x_0 \quad \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \leq \epsilon$$

On en déduit :

$$\forall x \geq x_0 \quad -\epsilon \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq \epsilon$$

On multiplie par $f(x) > 0$:

$$\forall x \geq x_0 \quad -\epsilon f(x) \leq f'(x) \leq \epsilon f(x)$$

On en déduit :

$$\forall x \geq x_0 \forall y > x - \epsilon \int_x^y f(t) dt \leq \int_x^y f'(t) dt \leq \epsilon \int_x^y f(t) dt$$

D'où :

$$\forall x \geq x_0 \forall y > x - \epsilon \int_x^y f(t) dt \leq f(y) - f(x) \leq \epsilon \int_x^y f(t) dt$$

On fixe x et on fait tendre y vers $+\infty$:

$$\forall x \geq x_0 - \epsilon \int_x^{+\infty} f(t) dt \leq -f(x) \leq \epsilon \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

On en déduit :

$$\forall x \geq x_0 |f(x)| \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

puis :

$$\forall x \geq x_0 \left| \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \right| \leq \epsilon$$

2. Soit $A < 0$.

$$\exists x_0 > 0 \text{ tq } \forall x \geq x_0 \frac{f'(x)}{f(x)} \leq A$$

On multiplie par $f(x) > 0$:

$$\forall x \geq x_0 f'(x) \leq A f(x)$$

On en déduit :

$$\forall x \geq x_0 \forall y > x \int_x^y f'(t) dt \leq A \int_x^y f(t) dt$$

D'où :

$$\forall x \geq x_0 \forall y > x f(y) - f(x) \leq A \int_x^y f(t) dt$$

On fixe x et on fait tendre y vers $+\infty$:

$$\forall x \geq x_0 -f(x) \leq A \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

On en déduit :

$$\forall x \geq x_0 \frac{-f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \leq A$$

$$\text{Donc } \frac{-f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

$$\text{Finalement : } \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 6 (Ens 2025)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent quand t tend vers $+\infty$ de

$$A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt) x^{n-2} dx$$

Correction

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto \sin^2(xt)x^{n-2}$ est continue sur $]0; 1]$ et quand x tend vers 0, elle est équivalente à $t^2 x^n$ donc elle est prolongeable par continuité en 0 et $A_n(t)$ est bien définie.

Faire tendre t vers $+\infty$ sous l'intégrale n'avance pas à grand chose : la fonction \sin n'a pas de limite en $+\infty$.

On fait donc un changement de variable pour sortir t du sinus. On pose $y = xt$.

$$\forall t > 0 A_n(t) = \int_0^t \sin^2(y) \left(\frac{y}{t}\right)^{n-2} \frac{dy}{t} = \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \sin^2(y) y^{n-2} dy$$

Se pose donc la question du comportement quand t tend vers ∞ de $\int_0^t \sin^2(y) y^{n-2} dy$

Si $n = 0$, la fonction $y \mapsto \sin^2(y)y^{n-2} = \frac{\sin^2(y)}{y^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (car c'est un grand O de $\frac{1}{y^2}$ en $+\infty$) donc :

$$\int_0^t \sin^2(y)y^{n-2} dy \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy > 0$$

$$\text{Donc } A_0(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} t \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy > 0$$

On peut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$ mais cette question n'est pas abordée dans l'exercice.

Dans le cas $n = 1$, on a affaire à $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y} dy$ dont on peut commencer par étudier la nature.

$$\begin{aligned} \forall t > 1 \int_0^t \frac{\sin^2(y)}{y} dy &= \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y} dy + \int_1^t \frac{1 - \cos(2y)}{2y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y} dy + \frac{1}{2} \ln(t) - \int_1^t \frac{\cos(2y)}{2y} dy \\ &= \frac{1}{2} \ln(t) + \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y} dy - \left(\left[\frac{\sin(2y)}{4y} \right]_1^t - \int_1^t \frac{\sin(2y) - 1}{4y^2} dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(t) + \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y} dy - \frac{\sin(2t)}{4t} + \frac{\sin(2)}{4} - \frac{1}{4} \int_1^t \frac{\sin(2y)}{y^2} dy \end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto \frac{\sin(2y)}{y^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc :

$$\int_0^t \frac{\sin^2(y)}{y} dy = \frac{1}{2} \ln(t) + O(1)$$

Donc :

$$A_1(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(t)$$

On suppose désormais $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \forall t > 1 \ A_n(t) &= \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \sin^2(y)y^{n-2} dy \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^1 \sin^2(y)y^{n-2} dy + \frac{1}{t^{n-1}} \int_1^t \frac{1 - \cos(2y)}{2} y^{n-2} dy \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^1 \sin^2(y)y^{n-2} dy + \frac{1}{t^{n-1}} \left(\frac{t^{n-1}}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2} \int_1^t \cos(2y)y^{n-2} dy \right) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} + o(1) - \frac{1}{2t^{n-1}} \left(\left[\frac{\sin(2y)}{2} y^{n-2} \right]_1^t - \int_1^t \frac{\sin(2y)}{2} (n-2)y^{n-3} dy \right) \\ &= \frac{1}{2(n-1)} + o(1) - \frac{\sin(2t)}{4t} + \frac{\sin(2)}{4t^{n-1}} + \frac{1}{4t^{n-1}} \int_1^t \sin(2y)(n-2)y^{n-3} dy \end{aligned}$$

Si $n = 2$ alors le dernier terme est nul et $A_2(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Cette limite étant strictement positive, c'est l'équivalent cherché.

Si $n \geq 3$, on a pour $t > 1$:

$$\left| \int_1^t \sin(2y)(n-2)y^{n-3} dy \right| \leq \int_1^t (n-2)y^{n-3} dy = t^{n-2} - 1.$$

On en déduit $A_n(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n-1)}$. Cette limite étant strictement positive, c'est l'équivalent cherché.

Exercice 7 (Ens 2025)

Soit $a > 0$. Montrer que

$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a} \cos(ty) dt$$

admet une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$ pour $y > 0$. On note $f_\infty(y)$ cette limite. Déterminer un équivalent de $f_\infty(y)$ quand y tend vers 0.

Correction

Soit $R > 1$ et $y > 0$.

$$\begin{aligned} f_R(y) &= \int_y^{yR} \frac{y^a}{x^a} \cos(x) \frac{dx}{y} = y^{a-1} \int_y^{yR} x^{-a} \cos(x) dx \\ &\quad \text{changement de variable } x = yt \text{ pour se ramener à une intégrale étudiée en cours} \\ &= y^{a-1} \left([x^{-a} \sin(x)]_y^{yR} + a \int_y^{yR} x^{-a-1} \sin(x) dx \right) \\ &= y^{a-1} \left(\frac{\sin(yR)}{y^a R^a} - \frac{\sin(y)}{y^a} + a \int_y^{yR} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx \right) \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ donc } \frac{\sin(yR)}{y^a R^a} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall x > y \left| \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} \right| \leq \frac{1}{x^{a+1}}$$

et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{a+1}}$ est intégrable sur $[y; +\infty[$ car $a+1 > 1$ donc la fonction $x \mapsto \left| \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} \right|$ est intégrable sur $[y; +\infty[$.

D'où l'existence de $f_\infty(y)$ et la formule

$$\forall y > 0 \quad f_\infty(y) = -\frac{\sin(y)}{y} + ay^{a-1} \int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx$$

$$-\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[y > 0]{y \rightarrow 0} -1$$

$$\frac{\sin(x)}{x^{a+1}} \underset{y > 0}{\sim}_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x^a} \text{ donc si } a \in]0; 1[\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx \xrightarrow[y > 0]{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx \in \mathbb{R}$$

$y^{a-1} \xrightarrow[y > 0]{y \rightarrow 0} +\infty$ donc $f_\infty(y) \sim ay^{a-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx$ si cette intégrale est non nulle. Cette

difficulté est négligée dans le corrigé de l'Ens.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t+k\pi} dt \end{aligned}$$

On a donc affaire à une série alternée dont le terme général tend vers 0 (on sait déjà que la série converge).

De plus :

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall t \in]0; \pi[\quad \frac{\sin(t)}{t + (k+1)\pi} < \frac{\sin(t)}{t + k\pi}$$

Donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t + (k+1)\pi} dt < \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t + k\pi} dt$$

$$\text{On en déduit } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx$$

Dans le cas $a \geq 1$, on a envie d'écrire $\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}} dx \sim \int_y^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$ mais il faut le justifier et l'intégrale diverge pour $a = 1$.

De plus la primitive n'est pas la même pour $a = 1$ et $a > 1$.

On commence donc par le cas $a = 1$.

$$\begin{aligned} \forall y \in]0; 1[\quad \left| \int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx + \ln(y) \right| &= \left| \int_y^1 \frac{\sin(x)}{x^2} dx - \int_y^1 \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx \right| \\ &\leq \int_y^1 \frac{|\sin(x) - x|}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &\leq \int_y^1 \frac{dx}{2} + 1 \text{ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange} \\ &\leq \frac{3}{2} = o(\ln(y)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx \sim -\ln(y) \text{ puis } f_\infty(y) \sim -\ln(y)$$

On suppose désormais $a > 1$.

$$\begin{aligned} \forall y \in]0; 1[\quad \left| \int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1+a}} dx - \frac{y^{1-a}}{a-1} \right| &= \left| \int_y^1 \frac{\sin(x)}{x^{1+a}} dx - \int_y^1 \frac{dx}{x^a} + \frac{1}{1-a} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1+a}} dx \right| \\ &\leq \int_y^1 \frac{|\sin(x) - x|}{x^{1+a}} dx + \frac{1}{a-1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \\ &\leq \int_y^1 \frac{dx}{2x^{a-1}} + \frac{1}{a-1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+a}} \text{ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange} \\ &= \begin{cases} O(1) & \text{si } a < 2 \\ O(\ln(y)) & \text{si } a = 2 \\ O(y^{2-a}) & \text{si } a > 2 \end{cases} \\ &= o(y^{1-a}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1+a}} dx \sim \frac{y^{1-a}}{a-1}$$

$$\text{D'où } f_a(y) \xrightarrow[y>0]{y \rightarrow 0} -1 + \frac{a}{a-1} = \frac{1}{a-1}.$$

Comme cette limite est non nulle, c'est l'équivalent cherché.