Révisions 2026
vendredi 22 mai 2026

941

Exercice 1 *(CCP 2024)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tq $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$.
Montrer que ces sommes sont directes.

Correction
Par la formule de Grassman :
$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(g)) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g))$
$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}\,(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(g)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g))$
On somme ces deux égalités. Compte tenu de la formule du rang, cela donne :
$2\dim(E) = 2\dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) - \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g))$
Donc : $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) = 0$
Comme ce sont des nombres positifs, $\dim(\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g)) = \dim(\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(g)) = 0$.
On conclut facilement.

Exercice 2 *(Ens 2025)*

On définit la fonction Rev de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :
$\mathrm{Rev}(0) = 0$
si P est de degré $d \in \mathbb{N}$ ie $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors $\mathrm{Rev}(P) = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} X^k$

1. Rev est-elle linéaire ? bijective ?
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{Q}_d = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \deg(P) = d \text{ et } P(0) \neq 0\}$.
   Montrer que Rev induit une bijection de $\mathcal{Q}_d$ dans lui même.
3. Déterminer les polynômes P tels que $\mathrm{Rev}(P') = (\mathrm{Rev}(P))'$.

Correction

1. $\mathrm{Rev}(1) = \mathrm{Rev}(X^0) = X^0 = 1$, $\mathrm{Rev}(X) = 1$: Rev n'est pas injective donc n'est pas bijective.
   $\mathrm{Rev}(1 + X) = 1 + X \neq 2 = \mathrm{Rev}(1) + \mathrm{Rev}(X)$
2. Soit $P \in \mathcal{Q}_d$.
   $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec a_0 et a_d tous les deux non nuls.
   $\mathrm{Rev}(P) = \sum_{k=0}^{d} a_{d-k} X^k$
   $a_0 \neq 0$ donc $\mathrm{Rev}(P)$ est de degré d.

$\text{Rev}(P)(0) = a_d \neq 0$
On a bien $\text{Rev}(P) \in \mathcal{Q}_d$
Si on note $b_k = a_{d-k}$, $\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$ donc :
$\text{Rev}(\text{Rev}(P)) = \sum_{k=0}^{d} b_{d-k} X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = P$
Donc Rev induit une bijection de $\mathcal{Q}_d$ dans lui même, égale à sa bijection réciproque.

3. Le polynôme nul convient.
Si $P = a$ est constant non nul, alors $P' = 0$ donc $\text{Rev}(P') = 0$, $\text{Rev}(P) = a$ et $(\text{Rev}(P))' = 0$: les polynômes constants non nuls sont solutions.
Soit P de degré $d \geq 1$ tel que $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$.
On remarque que $\text{Rev}(P) = X^d P\left(\frac{1}{X}\right)$.
On a donc :
$$X^{d-1} P'\left(\frac{1}{X}\right) = dX^{d-1} P\left(\frac{1}{X}\right) - X^{d-2} P'\left(\frac{1}{X}\right)$$
Donc :
$$X^{1-d} P'(X) = dX^{1-d} P(X) - X^{2-d} P'(X)$$
En multipliant par X^{d-1} :
$$P'(X) = dP(X) - XP'(X)$$
On en déduit $(1+X)P'(X) = dP(X)$
On a donc :
$\forall x > 0\ P'(x) = \frac{d}{1+x} P(x)$
Donc :
$\exists C \in \mathbb{R}^*$ tq $\forall x > 0\ P(x) = C(1+x)^d$
$\mathbb{R}_+^*$ étant infini, $P(X) = C(1+X)^d$.
Réciproquement, en revenant à la définition :
$P(X) = \sum_{k=0}^{d} C \binom{d}{k} X^k$
$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^{d} C \binom{d}{d-k} X^k = \sum_{k=0}^{d} C \binom{d}{k} X^k = P$
Donc $(\text{Rev}(P))' = P'$.
$P'(X) = Cd(1+X)^{d-1} = C'(1+X)^{d-1}$ donc comme pour P, $\text{Rev}(P') = P'$.
Finalement les polynômes cherchés sont les polynômes $C(1+X)^d$, $C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ donne le polynôme nul), $d \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 *(Mines 2024)*

Soit S_n l'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$.

1. Soit $\sigma \in S_n$.
Montrer que $u \begin{cases} S_n \to S_n \\ s \mapsto s \circ \sigma \end{cases}$ est une permutation de S_n.

2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$
Soit $p_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$
Montrer que p_n est une projection, déterminer son noyau et son image.
3. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$.
Soit v un élément non nul de H.
Montrer que les vecteurs $f_\sigma(v)$, $\sigma \in S_n$ engendrent H.

Correction

1. La composée de deux permutations de $[\![1;n]\!]$ étant une permutation de $[\![1;n]\!]$, l'application u est bien définie.
De même, $v \begin{cases} S_n \to S_n \\ s \mapsto s \circ \sigma^{-1} \end{cases}$ est bien définie.
$$\begin{aligned} \forall s \in S_n\ (u \circ v)(s) &= u(v(s)) = u\left(s \circ \sigma^{-1}\right) = \left(s \circ \sigma^{-1}\right) \circ \sigma \\ &= s \circ \left(\sigma \circ \sigma^{-1}\right) = s \\ (v \circ u)(s) &= v(u(s)) = v(s \circ \sigma) = (s \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} \\ &= s \circ \left(\sigma \circ \sigma^{-1}\right) = s \end{aligned}$$
Donc $u \circ v = v \circ u = id_{S_n}$.
On en déduit que u est une bijection de S_n sur S_n de bijection réciproque v.
2. Plusieurs méthodes sont possibles.
Commençons par celle qui utilise la première question.
On remarque tout d'abord que :
$\forall (s, \sigma) \in S_n^2\ \forall i \in [\![1;n]\!]\ (f_s \circ f_\sigma)(e_i) = f_s(f_\sigma(e_i)) = f_s(e_\sigma(i)) = e_{s(\sigma(e_i))}$
$f_s \circ f_\sigma$ et $f_{s \circ \sigma}$ coïncident sur une base donc $f_s \circ f_\sigma = f_{s \circ \sigma}$
On en déduit :
$$\begin{aligned} \forall \sigma \in S_n\ p_n \circ f_\sigma &= \frac{1}{n!} \left(\sum_{s \in S_n} f_s \right) \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} (f_s \circ f_\sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} f_{s \circ \sigma} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{s_1 \in S_n} f_{s_1} \text{ d'après la première question} \\ &= p_n \end{aligned}$$
On en déduit :
$$\begin{aligned} p_n^2 &= p_n \circ \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (p_n \circ f_\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_n \\ &= \frac{1}{n!}\, n! p_n = p_n \end{aligned}$$

Donc p_n est un projecteur.
Pour déterminer son noyau et son image, on a besoin d'expliciter $p_n(x)$ en fonction de x.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
$p_n(e_i) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)}$

$$\begin{aligned}
p_n^2(e_i) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} p_n\left(e_{\sigma(i)}\right) = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{s\in S_n} e_{s(\sigma(i))}\right)\\
&= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{s'\in S_n} e_{s'(i)}\right) \text{ d'après la première question}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} p_n(e_i) = \frac{1}{n!}n!p_n(e_i)\\
&= p_n(e_i)
\end{aligned}$$

p_n et p_n^2 coïncident sur une base donc $p_n = p_n^2$: p_n est un projecteur.

Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

$$\begin{aligned}
p_n(e_i) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} e_{\sigma(i)} = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(i)=j}} e_{\sigma(i)}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{\sigma\in S_n\\ \sigma(i)=j}} e_j = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Card}\left(\{\sigma\in S_n \text{ tq } \sigma(i)=j\}\right)e_j\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(n-1)!e_j\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e_j
\end{aligned}$$

On en déduit que si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ alors :
$f(x) = \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}(e_1+\cdots+e_n)$
L'image de p_n est la droite dirigée par $e_1+\cdots+e_n$ ie l'ensemble des n-uplets de la forme $(x,\ldots,x)$.
Le noyau de p_n est l'ensemble des n-uplets de la forme $(x_1,\ldots,x_n)$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

3. Soit $v = (v_1,\ldots,v_n)$ un élément non nul de H.
Si les v_i étaient tous égaux, on aurait :
$0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_1$ et v serait nul.
Donc, il existe $i < j$ tel que $v_i \neq v_j$.
Si on prend σ la permutation qui échange i et j alors $f_\sigma(v) = (v_1,\ldots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\ldots)$
$\dfrac{1}{v_i - vj}(v - f_\sigma(v)) = (0,\ldots,0,1,0\ldots,0,-1,0,\ldots,0)$.

Soit $s \in S_n$ tel que $s(i) = 1$ et $s(j) = 2$ (un tel s existe bien).
$\dfrac{1}{v_i - v_j}\left(f_s(v) - f_{s\circ\sigma}(v)\right) = (1, -1, 0, \dots, 0)$
Si on prend $a \in S_n$ tel que $a(1) = 1$ et $a(2) = i \geq 3$, on a :
$\dfrac{1}{v_i - v_j}\left(f_{a\circ s}(v) - f_{a\circ s\circ\sigma}(v)\right) = (1, 0, \dots, 0 - 1, 0, \dots, 0)$
La famille des $f_\sigma(v)$ contient une famille échelonnée de $n-1$ vecteurs donc $\mathrm{Vect}\left(\{f_\sigma(v), \sigma \in S_n\}\right)$ est de dimension au moins $n - 1$.
Mais les vecteurs $f_\sigma(v)$ appartiennent tous à H (permuter des nombres ne changent pas leur somme) qui est de dimension $n - 1$ donc $\mathrm{Vect}\left(\{f_\sigma(v), \sigma \in S_n\}\right) = H$.

Exercice 4 *(Ens 2025)*

Soit D une matrice diagonale et E la matrice contenant un 1 en haut à droite et des 0 partout ailleurs.

1. Calculer $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $(D + E)^n = D^n + a_n E$.
2. Déterminer un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1. Précisons les notations : D et E sont des matrices carrées à $p \geq 2$ lignes et p colonnes.
$E^2 = 0$ et pour tout $k \geq 2$ $E^k = 0$ mais E et D ne commutent pas :
$DE = d_{1,1}E$ et $ED = d_{p,p}E$
Si $d_{1,1} = d_{p,p}$ alors $a_n = n d_{1,1}^{n-1}$
Dans le cas général, on remarque que $(D+E)^0 = I_n = D^0 + 0E$ rt $(D+E)^1 = D^1 + a_1 E$ avec $a_1 = 1$.
Si $(D + E)^n = D^n + a_n E$ alors :
$$\begin{aligned}(D+E)^{n+1} &= (D+E)^n(D+E) = (D^n + a_nE)(D+E)\\ &= D^{n+1} + d_{1,1}^n E + a_n d_{p,p} E\\ &= D^{n+1} + a_{n+1}E \text{ avec } a_{n+1} = d_{1,1}^n + a_n d_{p,p}\end{aligned}$$
Pour alléger les notations, on va noter $\alpha = d_{p,p}$ et $\beta = d_{1,1}$.
Il s'agit donc d'expliciter le terme général de la suite définie par $a_0 = 0$ et la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta^n$
qui donne $\alpha_1 = \beta^0 = 1$ comme ci-dessus.
Les examinateurs examinent les premiers termes et intuitent la formule :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \beta^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{n-1-k}\beta^k$
qu'ils démontrent par récurrence.
Je procéderai différemment.
On considère d'abord la relation de récurrence $a_{n+1} = \alpha a_n$.
La solution générale est $a_n = C\alpha^n$.
On a déjà donné la solution quand $\alpha = \beta$ donc on suppose $\alpha \neq \beta$.
On cherche une solution particulière de la forme $a_n = D\beta^n$.
$a_{n+1} - \alpha a_n = D(\beta - \alpha)\beta^n$
$D = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$ convient
Donc :

$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\beta^n + C\alpha^n$
$a_0 = 0$ donc $C = -\dfrac{1}{\beta - \alpha}$
Finalement :
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$
C'est, sous une autre forme, le même résultat que les examinateurs.

2. Si $d_{1,1} > d_{p,p}$ alors $a_n \sim \dfrac{d_{1,1}^n}{d_{1,1} - d_{p,p}}$
   Si $d_{1,1} = d_{p,p}$ alors $a_n \sim n d_{1,1}^{n-1}$
   Si $d_{1,1} < d_{p,p}$ alors $a_n \sim \dfrac{d_{p,p}^n}{d_{p,p} - d_{1,1}}$

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soient N et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{rg}(M) = k$ et $\mathrm{rg}(N) = l$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{rg}(NM)$?

Correction
On sait que $\mathrm{rg}(NM) \leq \min(\mathrm{rg}(N), \mathrm{rg}(M))$:
En effet $\mathrm{Im}\,(NM) \subset \mathrm{Im}\,(N)$ donc $\mathrm{rg}(NM) \leq \mathrm{rg}(N)$
$\mathrm{Ker}\,(M) \subset \mathrm{Ker}\,(NM)$ donc $n - \mathrm{rg}(M) \leq n - \mathrm{rg}(NM)$
On a donc $\mathrm{rg}(NM) \leq \min(k, l)$.
On considère $M = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ et $N = \mathrm{Diag}(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$: il y a k uns dans M et l dans N.
Si N commence par des 1 alors $\mathrm{rg}(NM) = \min(k, l)$.
Si N commence par 1 seul zéro alors $\mathrm{rg}(NM) = \min(k, l) - 1$
Et ainsi de suite, sachant que N ne peut pas commencer par plus de $n - l$ zéros.
Si $\min(k, l) leq n - l$ alors on aura tous les rang de 0 à $\min(k, l)$.
En inversant les rôles des deux diagonales, on a le même résultat si $\min(k, l) \leq n - k$
Donc si $k + l \leq n$, la réponse est $[\![0; \min(k, l)]\!]$.
Mais ce n'est pas toujours la réponse car si M et N sont de rang n alors M et N sont inversibles donc NM aussi et le rang de NM ne peut prendre que la valeur n.
Mais $\mathrm{rg}(NM) = \dim(N(\mathrm{Im}\,(M)) = \mathrm{rg}(M) - \dim(\mathrm{Ker}\,(N) \cap \mathrm{Im}\,(M)) \geq \mathrm{rg}(M) - \dim(\mathrm{Ker}\,(N)) \geq \mathrm{rg}(M) + \mathrm{rg}(N) - n$
Donc si $k + l > n$ alors $\mathrm{rg}(NM) \in [\![k + l - n; \min(k, l)]\!]$
En reprenant les diagonales du début, on voit que toutes ses valeurs sont bien possibles.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $f_+ \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \end{cases}$ et $f_- \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $L^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E bornées sur I et $L^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dont le carré est intégrable sur I.

1. On suppose que

$$E = \mathrm{Vect}(f_+) + \mathrm{Vect}(f_-) + G \text{ où } G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ et } G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}$$

   Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

2. On suppose de plus la propriété suivante :

$$E = F_1 + F_2 \text{ avec } \dim(F_1) = \dim(F_2) = 2, \quad F_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) \text{ et } F_2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) = \{0\}$$

Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.

Correction

1. Soit $f \in E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Il existe deux réels a et b ainsi qu'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = a\,\mathrm{e}^x + b\,\mathrm{e}^{-x} + g(x)$
Si a est non nul alors $f(x) \sim_{+\infty} a\,\mathrm{e}^x$.
On en déduit que f n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$: c'est absurde.
Donc $a = 0$.
$g = f - bf_-$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$: ce n'est plus au programme mais une combinaison linéaire de fonctions de carré intégrable est de carré intégrable.
Donc $g \in G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}$ et $g = 0$.
Il reste :
$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = b\,\mathrm{e}^{-x}$
Mais f_- n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}_-$ donc $b = 0$.
Finalement $f = 0$.
2. $\exists (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2$ tq $f_+ = f_1 + f_2$
$f_+ \in L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ donc $f_2 = f_+ - f_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$
Mais $f_2 \in F_2$ donc $f_2 = 0$ et $f^+ = f_1 \in F_1$
On peut compléter (f_+) en (f_+, g_1) base de F_1.
Les hypothèses de la première question étant conservées :
$\exists (a, b, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times G$ tq $g_1 = af_+ + bf_- + g$
La fonction $h = g_1 - af_+ = bf_- + g$ appartient à F_1 comme combinaisons linéaires de fonctions de F_1 (f_+ et g_1) donc la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_-$.
f_- est bornée sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que g qui appartient à G donc h est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
h n'est pas nulle car c'est $g_1 - af$ avec (f, g_1) libre.
Donc $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \geq 1$.
Supposons $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) > 1$.
Il existe donc h_2 dans E bornée sur $\mathbb{R}$ telle que (h, h_2) est libre.
h_2 s'écrit $\phi_1 + \phi_2$ avec ϕ_1 dans F_1 et ϕ_2 dans F_2.
$\phi_2 = h_2 - \phi_1$ est bornée sur $\mathbb{R}_-$ et appartient à F_2 donc $\phi_2 = 0$.
On en déduit $h_2 = \phi_1 \in F_1$.
(h, h_2) est libre et F_1 est de dimension 2 donc (h, h_2) est une base de F_1.
Mais f_+ appartient à F_1 donc f_+ est combinaison linéaire de h et de h_2 qui sont bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f_+ est bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde. Donc $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.