Révisions 2026
mercredi 27 mai 2026

941

Exercice 1 *(Centrale 2015, rapport du jury. Cet exercice a été donné aux Mines en 2021 et en 2024)*

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \int_{1/x}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f. Préciser les limites de f aux bornes de D.
2. Etudier la continuité de f sur D.
3. Dessiner l'allure de la représentation graphique de f.

Correction

1. $\forall t > -1\ 1+t^3 > 0$
   $1+(-1)^3 = 0$
   $\forall t < -1\ 1+t^3 < 0$
   Si $x < -1$, alors $\left[\frac{1}{x}; x^2\right] \subset]-1; +\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
   Si $x = -1$, on a affaire à $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$ qui est impropre à gauche.
   $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2) \sim_{-1} 3(1+t)$ donc $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{(1+t)^{1/2}}$ donc la fonction $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur$]-1;1]$ et $f(-1)$ est défini.
   Si $x \in]-1;0[$, on a $\frac{1}{x} < -1 < x^2$ et $f(x)$ n'est pas défini.
   Si $x = 0$, $f(x)$ n'est pas défini car $\frac{1}{x}$ ne l'est pas.
   Enfin si $x > 0$ alors $\left[\frac{1}{x}; x^2\right] \subset]0; +\infty[$ donc $f(x)$ est défini : intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.

   $\forall x < -1\ f(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} + \int_{0}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$
   D'après le théorème fondamental du calcul différentiel intégral : $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} \xrightarrow[X\to 0]{} 0$.
   Par composition des limites : $\displaystyle\int_{1/x}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -0 = 0$
   $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$ donc la fonction $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$
On montre de manière similaire :
$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to-1\\x<-1}]{} \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}} = f(-1)$
$f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$
$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$

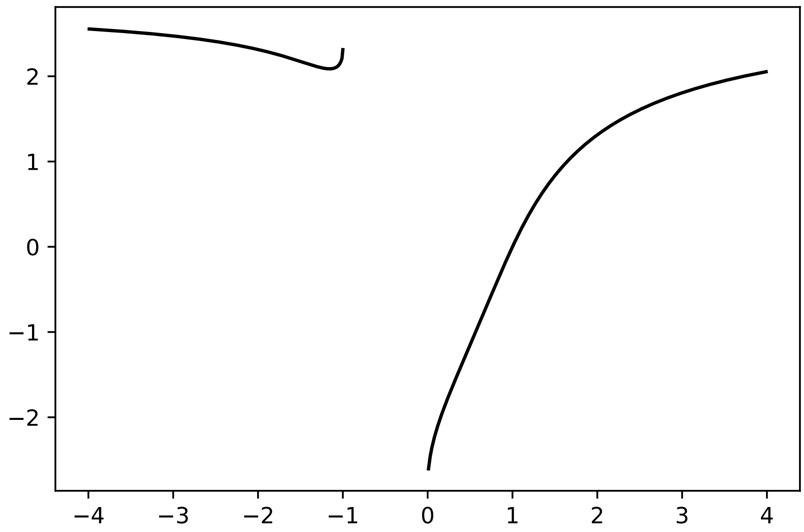
2. Si on note F une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ définie sur $]-1;+\infty[$, on a :
   $\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\ f(x) = F(x^2) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   Sous cette forme, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;1[$ et on a vu dans la question précédente que f est continue en -1.
3.

$$\begin{array}{rcl}\forall x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\ f'(x) & = & 2xF'(x^2) + \dfrac{1}{x^2}F'\left(\dfrac{1}{x}\right)\\ & = & \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \dfrac{1}{\sqrt{x(x^3+1)}}\end{array}$$

$\forall x > 0\ f'(x) > 0$
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to-1\\x<-1}]{} +\infty$ donc la courbe aura une tangente verticale au point d'abscisse -1.

$$\begin{array}{rcl}\forall x < -1\ f'(x) & = & \dfrac{2x\sqrt{x(x^3+1)} + \sqrt{1+x^6}}{\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}\\ & = & \dfrac{4x^3(x^3+1) - 1 - x^6}{(2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}\\ & & \text{avec } 2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6} < 0\\ & = & \dfrac{3x^6 + 4x^3 - 1}{(2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}\end{array}$$

On introduit alors le polynôme $P(X) = 3X^2 + 4X - 1$.
Ses racines sont $r_1 = \dfrac{-4-\sqrt{28}}{6} = -\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \simeq -1.55$ et $r_2 = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3} > 0$.
$\forall x < -1\ f'(x) = \dfrac{3(x^3-r_1)(x^3-r_2)}{(2x\sqrt{x(x^3+1)} - \sqrt{1+x^6})\sqrt{1+x^6}\sqrt{x(x^3+1)}}$
On note $x_0 = \sqrt[3]{r_1} \simeq -1,16$.
f est décroissante sur $]-\infty;x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0;-1]$.



Exercice 2 *(Centrale 2024)*

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tq f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+\}$.

1. Montrer :
   $\forall (f,g) \in E^2$ fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que E est un espace vectoriel .
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' appartiennent à E.
   Montrer que $f' \in E$

Correction

1. Soit $(f,g) \in E^2$.
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $|xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$
   En effet :
   $\dfrac{x^2+y^2}{2} - |xy| = \dfrac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2 - 2|x|\,|y|\right) = \dfrac{(|x|-|y|)^2}{2} \geq 0$
   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+ \ |(fg)(x)| &= |f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \\ &\leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2\end{aligned}$$
   Or $|f|^2 + |g|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. E est inclus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et contient la fonction nulle.
   E est stable par combinaisons linéaires :
   Soit $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   $(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2$ est une combinaison linéaire de fonctions intégrables donc une fonction intégrable.
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' appartiennent à E.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\displaystyle\int_0^x f'(t)^2 \,\mathrm{d}t = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$

D'après la première question : $\displaystyle\int_0^x f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)f''(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$
Supposons que f' n'appartiennent pas à E ie $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Comme c'est une fonction positive, $\displaystyle\int_0^x \left(f'(t)\right)^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
On a alors $f(x)f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Donc :
$\exists x_0 > 0$ tq $\forall x \geq x_0\ f(x)f'(x) \geq 1$.
$\forall x \geq x_0\ f(x)^2 - f(x_0)^2 = \displaystyle\int_x^{x_0} 2f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t \geq 2(x - x_0)$
Donc :
$\forall x \geq x_0\ 0 \leq 2(x - x_0) \leq f(x)^2$
f^2 étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto 2(x - x_0)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: c'est absurde.

Exercice 3 *(X 2024)*

Pour g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge, on pose $\|g\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t}$.
Soit f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0)f'(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''(t)^2\,\mathrm{d}t$ convergent.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge et $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2\,\|f''\|_2$.

Correction
ff' fait penser à la dérivée de f^2 donc on écrit :
$\forall t \in \mathbb{R}_+\ f(t)^2 - f(0)^2 = 2\displaystyle\int_0^t f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$ mais cela ne permet pas d'exploiter l'hypothèse $f(0)f'(0) = 0$.
La dérivée de ff' est $(f')^2 + ff''$ donc :
$\forall t \in \mathbb{R}_+\ f(t)f'(t) = f(t)f'(t) - f(0)f'(0) = \displaystyle\int_0^t \Big(f'(x)^2 + f(x)f''(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f'(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^t f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$
Supposons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,\mathrm{d}x$ diverge.
La fonction $(f')^2$ est positive donc $\displaystyle\int_0^t f'(x)^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ |ab| \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$
En effet : $\dfrac{a^2+b^2}{2} - |ab| = \dfrac{1}{2}\left(|a| - |b|\right)^2 \geq 0$
Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}\,|f(x)f''(x)| \leq \dfrac{1}{2}\left(f(x)^2 + f''(x)^2\right)$
Donc la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^t f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$
Donc $f(t)f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.
On en déduit qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall t \geq t_0\ f(t)f'(t) \geq 1$
$\forall t \geq t_0\ f(t)^2 \geq f(0)^2 + 2\displaystyle\int_0^{t_0} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t + 2(t - t_0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

Donc il existe $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$\forall t \geq t_1\ f(t)^2 \geq 1 \geq 0$
f^2 étant intégrable en $+\infty$, la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable en $+\infty$.
C'est absurde donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,\mathrm{d}x$ converge.
On en déduit $f(t)f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ noté μ.
On suppose $\mu \neq 0$.
$f(t)f'(t) \sim \mu$ avec $t \mapsto \mu$ non intégrable en $+\infty$ donc ff' n'est pas intégrable en $+\infty$
Mais ff' est de signe constant (celui de μ) au voisinage de $+\infty$ donc $\displaystyle\int_0^t f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pm\infty$
Mais $\displaystyle\int_0^t f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(f(t)^2 - f(0)^2\right) \geq -\frac{1}{2}f(0)^2$ donc $\displaystyle\int_0^t f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$
On en déduit $f(t)^2 = f(0)^2 + 2\displaystyle\int_0^t f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et on conclut comme ci-dessus.
On en déduit que $\mu = 0$ ie $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$.
Si on note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ alors :

- E est un sev de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$
- L'application $\Phi : (f, g) \in E^2 \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.
- $\|f'\|^2 = -(f \mid f'') \leq |(f \mid f'')| \leq \|f\|_2\,\|f''\|_2$ par Cauchy-Schwarz

Le troisième point découle directement de ce qui précède.
Pour le premier point :

- $E \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$
- La fonction nulle est dans E.
- $\forall (f, g) \in E\ 0 \leq (f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg \leq 2f^2 + 2g^2$
  Donc :
  $\forall (f, g) \in E^2\ f + g \in E$
  La stabilité par produit externe est facile.

Pour le second point :

- $\forall (f, g) \in E^2\ |fg| \leq f^2 + g^2$
  Donc pour tout $(f, g) \in E^2$, la fonction fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
  L'application Φ est bien définie.
- La symétrie est facile : le produit des réels est commutatif
- La bilinéarité de Φ découle de la linéarité de l'intégrale.
- Si f est une fonction de E différente de la fonction nulle alors f^2 est une fonction différente de la fonction nulle continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\Phi(f, f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t > 0$

Exercice 4 *(Ens 2025)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = 0$ pour $|x| > 3$. Montrer que :

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right)^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)$$

Correction

La valeur absolue dans les intégrales ne sert à rien : pour un réel t, $|t|^2 = t^2$. Elle serait utile

si f était à valeurs complexes, mais on est obligé de supposer f à valeurs réelles pour que la résolution de l'exercice puisse se faire avec les outils du programme.
La convergence des intégrales ne pose aucun problème car f est nulle en dehors du segment $[-3;3]$.
$\forall t \in \mathbb{R} \setminus [-3;3]\ \ |f(t)|^4 = 0 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)$
Par continuité de f, $f(-3) = f((3) = 0$.

$$\begin{aligned}
\forall t \in [-3;3]\ \ \left|f(t)^2\right| &= \left|f(t)^2 - f(-3)^2\right| = \left|\int_{-3}^{t} \left(f^2\right)'(x)\,\mathrm{d}x\right| = 2\left|\int_{-3}^{t} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)^{1/2} \text{ par Cauchy-Schwarz}
\end{aligned}$$

On a donc :
$\forall t \in \mathbb{R}\ \ |f(t)|^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)$
Donc :
$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|f(x)|^4\right) \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)$
La fonction $x \mapsto x^4$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit :

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\right)^4 \leq 4\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\right)$$

Exercice 5 *(Ens 2024)*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
2. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$?

Correction
f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$:
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f(x) > 0$
f est décroissante :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f'(x) \leq 0$
f est décroissante et minorée par 0 donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+$.
Si $l \neq 0$ alors $f(x) \sim_{+\infty} l$.
Or f est intégrable en $+\infty$ donc $x \mapsto l$ aussi.
C'est absurde donc $l = 0$.

1. Soit $\epsilon > 0$.
   $\exists x_0 > 0$ tq $\forall x \geq x_0\ \left|\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right| \leq \epsilon$
   On en déduit :
   $\forall x \geq x_0\ -\epsilon \leq \dfrac{f'(x)}{f(x)} \leq \epsilon$
   On multiplie par $f(x) > 0$:
   $\forall x \geq x_0\ -\epsilon f(x) \leq f'(x) \leq \epsilon f(x)$
   On en déduit :

$\forall x \geq x_0 \forall y > x \ -\epsilon \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \epsilon \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$
D'où :
$\forall x \geq x_0 \forall y > x \ -\epsilon \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(y) - f(x) \leq \epsilon \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$
On fixe x et on fait tendre y vers $+\infty$:
$\forall x \geq x_0 \ -\epsilon \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq -f(x) \leq \epsilon \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\forall x \geq x_0 \ |f(x)| \leq \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
puis :
$\forall x \geq x_0 \ \left|\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}\right| \leq \epsilon$

2. Soit $A < 0$.
$\exists x_0 > 0$ tq $\forall x \geq x_0 \ \frac{f'(x)}{f(x)} \leq A$
On multiplie par $f(x) > 0$:
$\forall x \geq x_0 \ f'(x) \leq A f(x)$
On en déduit :
$\forall x \geq x_0 \forall y > x \ \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \leq A \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$
D'où :
$\forall x \geq x_0 \forall y > x \ f(y) - f(x) \leq A \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$
On fixe x et on fait tendre y vers $+\infty$:
$\forall x \geq x_0 \ -f(x) \leq A \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\forall x \geq x_0 \ \frac{-f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \leq A$
Donc $\frac{-f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.
Finalement : $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent quand t tend vers $+\infty$ de

$$A_n(t) = \int_0^1 \sin^2(xt) x^{n-2} dx$$

Correction
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto \sin^2(xt)x^{n-2}$ est continue sur $]0;1]$ et quand x tend vers 0, elle est équivalente à $t^2 x^n$ donc elle est prolongeable par continuité en 0 et $A_n(t)$ est bien définie.
Faire tendre t vers $+\infty$ sous l'intégrale n'avance pas à grand chose : la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.
On fait donc un changement de variable pour sortir t du sinus. On pose $y = xt$.
$\forall t > 0 \ A_n(t) = \int_0^t \sin^2(y) \left(\frac{y}{t}\right)^{n-2} \frac{\mathrm{d}y}{t} = \frac{1}{t^{n-1}} \int_0^t \sin^2(y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y$
Se pose donc la question du comportement quand t tend vers ∞ de $\int_0^t \sin^2(y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y$

Si $n=0$, la fonction $y \mapsto \sin^2(y) y^{n-2} = \dfrac{\sin^2(y)}{y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car c'est un grand O de $\dfrac{1}{y^2}$ en $+\infty$) donc :
$\displaystyle\int_0^t \sin^2(y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y \xrightarrow[t\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y > 0$
Donc $A_0(t) \sim_{t\to+\infty} t\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y > 0$
On peut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$ mais cette question n'est pas abordée dans l'exercice.
Dans le cas $n=1$, on a affaire à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y$ dont on peut commencer par étudier la nature.

$$\begin{aligned}
\forall t>1\ \int_0^t \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y + \int_1^t \frac{1-\cos(2y)}{2y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\ln(t) - \int_1^t \frac{\cos(2y)}{2y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\ln(t) + \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y - \left(\left[\frac{\sin(2y)}{4y}\right]_1^t - \int_1^t \frac{\sin(2y)}{4}\frac{-1}{y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(t) + \int_0^1 \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{\sin(2t)}{4t} + \frac{\sin(2)}{4} - \frac{1}{4}\int_1^t \frac{\sin(2y)}{y^2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto \dfrac{\sin(2y)}{y^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ donc :
$\displaystyle\int_0^t \frac{\sin^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln(t) + O(1)$
Donc :

$$A_1(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(t)$$

On suppose désormais $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\forall t>1\ A_n(t) &= \frac{1}{t^{n-1}}\int_0^t \sin^2(y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{t^{n-1}}\int_0^1 \sin^2(y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{t^{n-1}}\int_1^t \frac{1-\cos(2y)}{2} y^{n-2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{t^{n-1}}\int_0^1 \sin^2(y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{t^{n-1}}\left(\frac{t^{n-1}}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2}\int_1^t \cos(2y) y^{n-2}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{2(n-1)} + o(1) - \frac{1}{2t^{n-1}}\left(\left[\frac{\sin(2y)}{2} y^{n-2}\right]_1^t - \int_1^t \frac{\sin(2y)}{2}(n-2) y^{n-3}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{2(n-1)} + o(1) - \frac{\sin(2t)}{4t} + \frac{\sin(2t)}{4t^{n-1}} + \frac{1}{4t^{n-1}}\int_1^t \sin(2y)(n-2) y^{n-3}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Si $n=2$ alors le dernier terme est nul et $A_2(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$. Cette limite étant strictement positive, c'est l'équivalent cherché.
Si $n \geq 3$, on a pour $t>1$:
$\left|\displaystyle\int_1^t \sin(2y)(n-2) y^{n-3}\,\mathrm{d}y\right| \leq \displaystyle\int_1^t (n-2) y^{n-3}\,\mathrm{d}y = t^{n-2} - 1.$

On en déduit $A_n(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \dfrac{1}{2(n-1)}$. Cette limite étant strictement positive, c'est l'équivalent cherché.

Exercice 7 *(Ens 2025)*

Soit $a > 0$. Montrer que
$$f_R(y) = \int_1^R \frac{1}{t^a} \cos(ty)\,\mathrm{d}t$$
admet une limite finie lorsque R tend vers $+\infty$ pour $y > 0$. On note $f_\infty(y)$ cette limite. Déterminer un équivalent de $f_\infty(y)$ quand y tend vers 0.

Correction
Soit $R > 1$ et $y > 0$.

$$\begin{aligned}
f_R(y) &= \int_y^{yR} \frac{y^a}{x^a} \cos(x) \frac{\mathrm{d}x}{y} = y^{a-1} \int_y^{yR} x^{-a} \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \text{changement de variable } x = yt \text{ pour se ramener à une intégrale étudiée en cours} \\
&= y^{a-1} \left(\left[x^{-a} \sin(x)\right]_y^{yR} + a \int_y^{yR} x^{-a-1} \sin(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= y^{a-1} \left(\frac{\sin(yR)}{y^a R^a} - \frac{\sin(y)}{y^a} + a \int_y^{yR} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

$a > 0$ donc $\dfrac{\sin(yR)}{y^a R^a} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$
$\forall x > y \ \left|\dfrac{\sin(x)}{x^{a+1}}\right| \leq \dfrac{1}{x^{a+1}}$
et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{a+1}}$ est intégrable sur $[y; +\infty[$ car $a + 1 > 1$ donc la fonction $x \mapsto \left|\dfrac{\sin(x)}{x^{a+1}}\right|$ est intégrable sur $[y; +\infty[$.
D'où l'existence de $f_\infty(y)$ et la formule

$$\forall y > 0 \ f_\infty(y) = -\frac{\sin(y)}{y} + a y^{a-1} \int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x$$

$-\dfrac{\sin(y)}{y} \xrightarrow[\substack{y\to0\\y>0}]{} -1$
$\dfrac{\sin(x)}{x^{a+1}} \sim_{0^+} \dfrac{1}{x^a}$ donc si $a \in]0; 1[\ \displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\substack{y\to0\\y>0}]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$
$y^{a-1} \xrightarrow[\substack{y\to0\\y>0}]{} +\infty$ donc $f_\infty(y) \sim a y^{a-1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x$ si cette intégrale est non nulle. Cette difficulté est négligée dans le corrigé de l'Ens.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t + k\pi}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc affaire à une série alternée dont le terme général tend vers 0 (on sait déjà que la série converge).
De plus :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in]0;\pi[\ \dfrac{\sin(t)}{t+(k+1)\pi} < \dfrac{\sin(t)}{t+k\pi}$
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t < \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+k\pi}\,\mathrm{d}t$
On en déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x$

Dans le cas $a \geq 1$, on a envie d'écrire $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x \sim \int_y^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x$ mais il faut le justifier et l'intégrale diverge pour $a = 1$.
De plus la primitive n'est pas la même pour $a = 1$ et $a > 1$.
On commence donc par le cas $a = 1$.

$$\begin{aligned}
\forall y \in]0;1[\ \left|\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \ln(y)\right| &= \left|\int_y^1 \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_y^1 \frac{|\sin(x)-x|}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
&\leq \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{2} + 1 \text{ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange} \\
&\leq \frac{3}{2} = o(\ln(y))
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \sim -\ln(y)$ puis $f_\infty(y) \sim -\ln(y)$

On suppose désormais $a > 1$.

$$\begin{aligned}
\forall y \in]0;1[\ \left|\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1+a}}\,\mathrm{d}x - \frac{y^{1-a}}{a-1}\right| &= \left|\int_y^1 \frac{\sin(x)}{x^{1+a}}\,\mathrm{d}x - \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} + \frac{1}{1-a} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1+a}}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_y^1 \frac{|\sin(x)-x|}{x^{1+a}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{a-1} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+a}} \\
&\leq \int_y^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x^{a-1}} + \frac{1}{a-1} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+a}} \text{ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange} \\
&= \begin{cases} O(1) \text{ si } a < 2 \\ O(\ln(y)) \text{ si } a = 2 \\ O\left(y^{2-a}\right) \text{ si } a > 2 \end{cases} \\
&= o\left(y^{1-a}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{1+a}}\,\mathrm{d}x \sim \frac{y^{1-a}}{a-1}$
D'où $f_a(y) \xrightarrow[\substack{y\to 0\\ y>0}]{} -1 + \dfrac{a}{a-1} = \dfrac{1}{a-1}$.
Comme cette limite est non nulle, c'est l'équivalent cherché.