Révisions 2026
vendredi 29 mai 2026

941

Exercice 1 *(Mines Telecom 2024)*

A tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $\phi(P)$ défini par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \phi(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.
On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que ϕ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Est-ce que ϕ_2 est diagonalisable ?
3. Reprendre les deux premières questions avec ϕ_n.
4. Déterminer les éléments propres de ϕ.

Exercice 2 *(CCP 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $T_n(P) = (nX+1)P + (1-X^2)P'$.

1. Calculer $T_n(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
2. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Écrire la matrice de T_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. T_2 est-il diagonalisable ?
4. Soit λ une valeur propre de T_n. On considère $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un vecteur propre de T_n associée à λ.
   Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $g_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{nt+1-\lambda}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Vérifier que $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{g_\lambda(x)}$ est constante sur $]-1, 1[$.
   (b) Vérifier que $\dfrac{nt+1-\lambda}{1-t^2} = \dfrac{n+1-\lambda}{2}\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1-n-\lambda}{2}\dfrac{1}{1+t}$ et en déduire l'expression de $g_\lambda(x)$.
5. Déterminer les éléments propres de T_n et montrer que T_n est diagonalisable.

Exercice 3 *(Centrale 2024)*

Soit F sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$\forall M \in F \setminus \{0\}\ M \in GL_n(\mathbb{K})$

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\dim(F) \leq 1$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair, que dire de F ?
3. Dans le cas n pair, trouver un exemple où F est de dimension 2.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $P_1, \ldots, P_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P_i^2 = P_i$ pour tout i compris entre 1 et k.
Soit $A = P_1 + \cdots + P_k$.
On suppose A antisymétrique.
Montrer que $A = 0$.

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soient M et N deux matrices non nulles telles que :

$$M^2 = N^2 = 0 \text{ et } MN + NM = I_2$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible A telle que

$$M = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \text{ et } N = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}$$

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Montrer que pour tout $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$MN + NM - \operatorname{tr}(M)N - \operatorname{tr}(N)M + (\operatorname{tr}(N)\operatorname{tr}(M) - \operatorname{tr}(NM))\, I_2 = 0$$

(Indication : on pourra commencer par le cas $N = M$)

Exercice 7 *(Ens 2025)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(A) = A^{-1}$.

Exercice 8 *(Ens 2024)*

On définit une suite de matrices par $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix}$
Montrer que la matrice A_n admet $n+1$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ avec λ_k de multiplicité $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Exercice 9 *(Centrale 2024)*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :
$(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

1. Soit $u \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{cases}$.
   Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que :
   $\forall (f, g) \in E^2 \ (u(f) \mid g) = (f \mid u^*(g))$
2. Donner les éléments propres de $u^* \circ u$

Exercice 10 *(Ens 2025)*

Soient $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ est inversible.
Montrer que P est constant.