Révisions 2026
vendredi 29 mai 2026

941

Exercice 1 *(Mines Telecom 2024)*

A tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe le polynôme $\phi(P)$ défini par :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \phi(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$.
On note ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que ϕ_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Est-ce que ϕ_2 est diagonalisable ?
3. Reprendre les deux premières questions avec ϕ_n.
4. Déterminer les éléments propres de ϕ.

Correction

1. ϕ est bien une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

   Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ \phi(P)(x) &= \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+1}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_x^{x+1} t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}\Big((x+1)^{k+1} - x^k\Big)\end{aligned}$$

   En particulier pour $n = 2$, si $P = aX^2 + bX + c$ alors :

$$\begin{aligned}\phi_2(P)(x) &= \frac{a}{3}\Big((X+1)^3 - X^3\Big) + \frac{b}{2}\Big((X+1)^2 - X^2\Big) + c\,(X+1-X)\\ &= \frac{a}{3}\Big(3X^2+3X+1\Big) + \frac{b}{2}(2X+1) + c\end{aligned}$$

   Donc $\phi_2(P) = aX^2 + (a+b)X + \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$.

   ϕ est linéaire : soient P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ et λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ \phi(\lambda P + \mu Q)(x) &= \int_x^{x+1} (\lambda P(t) + \mu Q(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_x^{x+1} Q(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda\phi(P)(x) + \mu\phi(Q)(x)\end{aligned}$$

   Donc $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.
   ϕ est bien linéaire.
   Par restriction, ϕ_n est linéaire pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La matrice de ϕ_2 dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Comme elle est triangulaire supérieure, on lit directement les valeurs propres de ϕ_2 sur la diagonale : ϕ_2 a une seule valeur propre : 1, de multiplicité $3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
   Mais $\phi_2 \neq id_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc ϕ_2 n'est pas diagonalisable.
3. On a déjà justifié la linéarité de ϕ_n.
   Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \phi(P) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \left((X+1)^{k+1} - X^{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \binom{k+1}{l} X^l \right) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{n} \frac{a_k}{k+1} \binom{k+1}{l} \right) X^l \end{aligned}$$

   Sous cette forme, on voit que $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   ϕ_n est bien un endommorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   La matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1.
   $\phi_0 = id_{\mathbb{R}_0 X}$ est diagonalisable mais pour $n \geq 1$, ϕ_n n'est pas diagonalisable.
4. Soit λ une valeur propre de ϕ.
   $\exists P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\phi(P) = \lambda P$
   Soit n le degré de P.
   $\phi_n(P) = \lambda P$ avec P non nul donc λ est valeur propre de ϕ_n. On en déduit $\lambda = 1$.
   $\phi(1) = 1$ donc 1 est valeur propre de ϕ.
   ϕ a une et une seule valeur propre : 1.
   Reste à déterminer le sous-espace propre de ϕ associé à la valeur propre 1.
   Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \phi(P) = P &\iff \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=l}^{n} \frac{a_k}{k+1} \binom{k+1}{l} \right) X^l = \sum_{l=0}^{n} a_l X^l \\ &\iff \forall l \in [\![0; n]\!]\ a_l = \sum_{k=l}^{n} \frac{a_k}{k+1} \binom{k+1}{l} = a_l + \sum_{k=l+1}^{n} \frac{a_k}{k+1} \binom{k+1}{l} \\ &\iff \forall l \in [\![0; n-1]\!]\ \sum_{k=l+1}^{n} \frac{a_k}{k+1} \binom{k+1}{l} = 0 \end{aligned}$$

   $l = n-1$ donne $a_n = 0$, $l = n-2$ donne ensuite $a_{n-1} = 0$ et ainsi de suite jusque $a_1 = 0$.
   Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est donc $\mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 2 *(CCP 2024)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $T_n(P) = (nX+1)P + (1-X^2)P'$.

1. Calculer $T_n(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
2. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Écrire la matrice de T_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. T_2 est-il diagonalisable ?
4. Soit λ une valeur propre de T_n. On considère $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un vecteur propre de T_n associée à λ.
   Pour $x \in]-1,1[$, on pose $g_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{nt+1-\lambda}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Vérifier que $x \mapsto P(x)\,\mathrm{e}^{g_\lambda(x)}$ est constante sur $]-1,1[$.
   (b) Vérifier que $\dfrac{nt+1-\lambda}{1-t^2} = \dfrac{n+1-\lambda}{2}\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1-n-\lambda}{2}\dfrac{1}{1+t}$ et en déduire l'expression de $g_\lambda(x)$.
5. Déterminer les éléments propres de T_n et montrer que T_n est diagonalisable.

Correction

1. Pour $P(X) = X^k$, nous avons :

$$T_n(X^k) = (nX+1)X^k + (1-X^2)kX^{k-1}$$

Simplifions cette expression :

$$T_n(X^k) = nX^{k+1} + X^k + kX^{k-1} - kX^{k+1}$$

$$T_n(X^k) = (n-k)X^{k+1} + X^k + kX^{k-1}$$

2. Un endomorphisme est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
   On commence par montrer que T_n est linéaire.
   Pour montrer que T_n est linéaire, nous devons vérifier que T_n satisfait les deux propriétés suivantes pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout scalaire $a \in \mathbb{R}$:
   (a) **Additivité** : $T_n(P+Q) = T_n(P) + T_n(Q)$
   (b) **Homogénéité** : $T_n(aP) = aT_n(P)$

Additivité

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Nous avons :

$$T_n(P+Q) = (nX+1)(P+Q) + (1-X^2)(P+Q)'$$

En utilisant la distributivité, nous obtenons :

$$T_n(P+Q) = (nX+1)P + (nX+1)Q + (1-X^2)P' + (1-X^2)Q'$$

$$T_n(P+Q) = (nX+1)P + (1-X^2)P' + (nX+1)Q + (1-X^2)Q'$$

$$T_n(P+Q) = T_n(P) + T_n(Q)$$

Homogénéité

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Nous avons :

$$T_n(aP) = (nX+1)(aP) + (1-X^2)(aP')$$

En utilisant la distributivité des scalaires, nous obtenons :

$$T_n(aP) = a(nX+1)P + a(1-X^2)P'$$
$$T_n(aP) = a[(nX+1)P + (1-X^2)P']$$
$$T_n(aP) = aT_n(P)$$

Ainsi, T_n satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité, ce qui montre que T_n est linéaire.

Ensuite :
$T_n(\mathbb{R}_n[X]) = T_n\left(\mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)\right) = \mathrm{Vect}\left(T_n(1), T_n(X), \ldots, T_n(X^n)\right)$
$\forall k \in [\![0; n-1]\!]$ $\deg(T_n(X^k)) = \deg((n-k)X^{k+1} + X^k + kX^{k-1}) = k+1 \leq n$
$\deg(T_n(X^n)) = \deg(X^n + nX^{n-1}) = n \leq n$
Donc $T_n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$

3. La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\{1, X, X^2\}$. Calculons T_2 pour chaque élément de cette base :
- $T_2(1) = (2X+1)1 + (1-X^2)0 = 2X+1$
- $T_2(X) = (2X+1)X + (1-X^2)1 = 2X^2 + X + 1 - X^2 = X^2 + X + 1$
- $T_2(X^2) = (2X+1)X^2 + (1-X^2)2X = 2X^3 + X^2 + 2X - 2X^3 = X^2 + 2X$

La matrice de T_2 dans la base $\{1, X, X^2\}$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_{T_2}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-1)
\end{aligned}$$

χ_{T_2} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc T_2 est diagonalisable.

4. (a) Soit $P(x)\mathrm{e}^{g_\lambda(x)} = f(x)$. Calculons la dérivée de $f(x)$: $f'(x) = P'(x)\mathrm{e}^{g_\lambda(x)} + P(x)\mathrm{e}^{g_\lambda(x)}g'_\lambda(x)$
Sachant que $g'_\lambda(x) = \dfrac{nx+1-\lambda}{1-x^2}$, nous avons :
$f'(x) = P'(x)\mathrm{e}^{g_\lambda(x)} + P(x)\mathrm{e}^{g_\lambda(x)}\dfrac{nx+1-\lambda}{1-x^2} = \dfrac{(T_n(P)(x) - \lambda P(x))\,\mathrm{e}^{g_\lambda(x)}}{1-x^2}$ Puisque $T_n(P) = \lambda P$, cela implique que $f'(x) = 0$, donc f est constante.

(b)

$$\begin{array}{rl} & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}\ \dfrac{n+1-\lambda}{2}\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1-n-\lambda}{2}\dfrac{1}{1+t} \\ = & \dfrac{1}{2(1-t^2)}\left((n+1-\lambda)(1+t)+(1-n-\lambda)(1-t)\right) \\ = & \dfrac{1}{2(1-t^2)}\left((n+1-\lambda+n+\lambda-1)t+n+1-\lambda+1-n-\lambda\right) \\ = & \dfrac{1}{2(1-t^2)}(2nt+2-2\lambda) \\ = & \dfrac{nt+1-\lambda}{1-t^2} \end{array}$$

On en déduit :
$\forall x \in]-1;1[\ g(x) = \dfrac{\lambda-n-1}{2}\ln(1-x) + \dfrac{1-n-\lambda}{2}\ln(1+x)$

5. Soit λ une valeur propre de T_n et P un vecteur propre associé.
$\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)(1-x)^{\frac{\lambda-n-1}{2}}(1+x)^{\frac{1-n-\lambda}{2}} = C$
Mais P est un polynôme nul donc $\dfrac{n+1-\lambda}{2}$ et $\dfrac{\lambda+n-1}{2} \in \mathbb{N}$
λ est donc un entier de même parité que $n+1$ compris entre $-(n-1)$ et $n+1$ ie : $\lambda \in \{n+1-2k, 0 \leq k \leq n\}$
Réciproquement, soit $k \in [\![0;n]\!]$.
Soit $P_n = (1-X)^k(1+X)^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{array}{rcl} T_n(P_n) & = & (1-X^2)P_n'(X) + (nX+1)P_n(X) \\ & = & (1-X)(1+X)\left(-k(1-X)^{k-1}(1+X)^{n-k} + (n-k)(1-X)^k(1+X)^{n-k-1}\right) \\ & & +(nX+1)(1-X)^k(1+X)^{n-k} \\ & = & P_n(X)\left(-k(1+X)+(n-k)(1-X)+nX+1\right) = (n+1-2k)P_n(X) \end{array}$$

Donc $n+1-2k$ est valeur propre de T_n.
Les valeurs propres de T_n sont donc les nombres $n+1-2k$, $0 \leq k \leq n$.
Il y en a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ donc T_n est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
On en déduit que le sous-espace propre de T_n associé à la valeur propre $n+1-2k$ est la droite dirigée par $(1-X)^k(1+X)^{n-k}$.

Exercice 3 *(Centrale 2024)*

Soit F sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$\forall M \in F \setminus \{0\}\ M \in GL_n(\mathbb{K})$

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\dim(F) \leq 1$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair, que dire de F ?
3. Dans le cas n pair, trouver un exemple où F est de dimension 2.

Correction

1. Si $F = \{0\}$, F est évidemment de dimension inférieure ou égale à 1.
On suppose donc $F \neq \{0\}$.
Soit A un élément non nul de F.

A est donc inversible.
Soit $B \in F$.
$\forall x \in C \ \det(xA - B) = \det\left(A(xI_n - A^{-1}B)\right) = \det(A)\chi_{A^{-1}B}(x)$
$\chi_{A^{-1}B}$ est un polynôme de degré $n \geq 1$ donc il possède au moins une racine z.
$zA - B$ n'est donc pas inversible. Mais F est stable par combinaison linéaire donc $zA - B$ est un élément non inversible de F.
On en déduuit $zA - B = 0$ ie $B = zA$.
D'où $F \subset \mathbb{C}A$, puis $F = \mathbb{C}A$ de dimension 1.

2. Le résultat est le même puisque tout polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.
3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $P(a, b) = \text{Diag}\,(M(a, b), \dots, M(a, b))$.
   $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \ \det(P(a, b)) = (\det(M(a, b)))^{n/2} = \left(a^2 + b^2\right)^{n/2}$
   $F = \left\{P(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ convient.

Exercice 4 *(Mines 2024)*

Soit $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P_i^2 = P_i$ pour tout i compris entre 1 et k.
Soit $A = P_1 + \cdots + P_k$.
On suppose A antisymétrique.
Montrer que $A = 0$.

Correction
A est antisymétrique donc sa diagonale est remplie de 0.
Donc $\text{tr}\,(A) = 0$.
Mais $\text{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{k} \text{tr}\,(P_i) = \sum_{i=1}^{k} \text{rg}(P_i)$ est une somme de nombres positifs donc :
$\forall i \in [\![1; k]\!] \ \text{rg}(P_i) = 0$
Donc :
$\forall i \in [\![1; k]\!] \ P_i = 0$

Exercice 5 *(Ens 2025)*

Soient M et N deux matrices non nulles telles que :

$$M^2 = N^2 = 0 \text{ et } MN + NM = I_2$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible A telle que

$$M = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \text{ et } N = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1}$$

Correction
Soit u (resp. v) l'endomorphisme canoniquement associé à M (resp. à N).
Il s'agit de prouver qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$, $v(e_1) = e_2$ et $v(e_2) = 0$.
Classiquement, u étant non nulle, on se donne $e_2 \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(e_2) \neq 0$ et on pose $e_1 = u(e_2)$.
On montre facilement que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $u(e_1) = 0$.
On a $v(u(e_1)) + u(v(e_1)) = e_1$.

$u(e_1) = 0$ donc $u(v(e_1)) = e_1 = u(e_2)$ mais on peut pas en déduire $v(e_1) = e_2$.
On pose $\epsilon_1 = e_1$ et $\epsilon_2 = v(\epsilon_1)$.
$v^2 = 0$ donc $v(\epsilon_2) = 0$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 = 0$.
On applique v : $\lambda_1 v(\epsilon_1) = 0$
$v(\epsilon_1) \neq 0$ car $u(v(\epsilon_1)) = u(v(e_1)) = e_1 \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
Il reste $\lambda_2\epsilon_2 = 0$ avec $\epsilon_2 = v(\epsilon_1) \neq 0$ donc $\lambda_2 = 0$.
Donc (ϵ_1, ϵ_2) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2.
On en déduit que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $v(\epsilon_2) = 0$.
De plus :
$u(\epsilon_1) = u(e_1) = 0$
$u(v(\epsilon_1)) + v(u(\epsilon_1)) = \epsilon_1$ donc $u(\epsilon_2) + v(0) = \epsilon_1$.
On en déduit $u(\epsilon_2) = \epsilon_1$.

Autre méthode
Soit u (resp. v) l'endomorphisme canoniquement associé à M (resp. à N).
Il s'agit de prouver qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$, $v(e_1) = e_2$ et $v(e_2) = 0$.
Classiquement, u étant non nulle, on se donne $e_2 \in \mathbb{R}^2$ tel que $u(e_2) \neq 0$ et on pose $e_1 = u(e_2)$.
On montre facilement que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $u(e_1) = 0$.
On a $v(u(e_1)) + u(v(e_1)) = e_1$.
$u(e_1) = 0$ donc $u(v(e_1)) = e_1 = u(e_2)$ mais on peut pas en déduire $v(e_1) = e_2$ ie $v(u(e_2)) = e_2$.
$u(v(e_1)) = e_1$ avec $e_1 = u(e_2) \neq 0$ donc 1 est valeur propre de $u \circ v$.
Mais $\chi_{v\circ u} = \chi_{u\circ v}$ (à redémontrer, ce n'est pas un théorème du programme) donc il existe $\epsilon_2 \neq 0$ tel que $v(u(\epsilon_2)) = \epsilon_2$.
On pose $\epsilon_1 = u(\epsilon_2)$.
On a donc $v(\epsilon_1) = \epsilon_2$.
$\epsilon_2 \neq 0$ donc $\epsilon_1 \neq 0$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 = 0$.
On applique v : $\lambda_1 u^2(\epsilon_2) + \lambda_2\epsilon_1 = 0$
$u^2 = 0$ donc $\lambda_2\epsilon_1 = 0$.
$\epsilon_1 \neq 0$ donc $\lambda_2 = 0$.
Il reste $\lambda_1\epsilon_1 = 0$ avec $\epsilon_1 \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
Donc (ϵ_1, ϵ_2) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2.
On en déduit que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ avec $u(\epsilon_1) = 0$ et $u(\epsilon_2) = \epsilon_1$.
De plus $v(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $v(\epsilon_2) = v^2(\epsilon_1) = 0$.

Exercice 6 *(Ens 2025)*

Montrer que pour tout $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$MN + NM - \mathrm{tr}\,(M)N - \mathrm{tr}\,(N)M + (\mathrm{tr}\,(N)\mathrm{tr}\,(M) - \mathrm{tr}\,(NM))\, I_2 = 0$$

(Indication : on pourra commencer par le cas $N = M$)

Correction
Dans le cas $N = M$, il s'agit de prouver $2M^2 - 2\mathrm{tr}\,(M)M + \left(\mathrm{tr}\,(M)^2 - \mathrm{tr}\,(M^2)\right) I_2 = 0$
Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$ donc :

$\operatorname{tr}(M)^2 - \operatorname{tr}(M^2) = (a+d)^2 - (a^2+d^2+2bc) = 2ad - 2bc = 2\det(M)$
Donc : $2M^2 - 2\operatorname{tr}(M)M + \left(\operatorname{tr}(M)^2 - \operatorname{tr}(M^2)\right) I_2 = 2\left(M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2\right)$ par Cayley-Hamilton).
L'application $\Phi \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (M,N) \mapsto MN + NM - \operatorname{tr}(M)N - \operatorname{tr}(N)M + (\operatorname{tr}(N)\operatorname{tr}(M) - \operatorname{tr}(NM)) I_2 \end{cases}$
est bilinéaire donc :
$\Phi(M+N, M+N) = \Phi(M,M) + \phi(M,N) + \Phi(N,M) + \Phi(N,N)$
ce qui donne compte tenu de ce qui précède : $\Phi(M,N) + \phi(N,M) = 0$
Mais au vu de la définition, $\Phi(M,N) = \Phi(N,M)$, ce qui permet de conclure facilement.

Exercice 7 *(Ens 2025)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(A) = A^{-1}$.

Correction
$\chi_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$ car A est inversible.

D'après Cayley-Hamilton, $a_0 I_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = 0$

On multiplie par A^{-1} : $a_0 A^{-1} + \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} A^l = 0$

Le polynôme $P = -\dfrac{1}{a_0} \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1} X^l$ convient.

Exercice 8 *(Ens 2024)*

On définit une suite de matrices par $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix}$
Montrer que la matrice A_n admet $n+1$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ avec λ_k de multiplicité $\dbinom{n}{k}$.

Correction
On montre par récurrence que la matrice A_n est bien définie et qu'elle a 2^n lignes et 2^n colonnes.
On peut également montrer par récurrence que A_n est symétrique réelle donc possède 2^n valeurs propres réelles (comptées avec leurs multiplicités).
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_{A_{n+1}}(\lambda) = \det(\lambda I_{2^{n+1}} - A_{n+1}) = \begin{vmatrix} \lambda I_{2^n} - A_n & -I_{2^n} \\ -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \end{vmatrix}$
Pour appliquer la méthode du pivot, il est commode d'échanger les deux lignes de blocs.
Cela revient à échanger dans la matrice sans blocs les lignes L_k et L_{k+2^n} pour k compris entre 1 et 2^n avec $n \geq 1$.
Il y a donc un nombre pair d'échange de lignes et le déterminant n'est pas modifié :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_{A_{n+1}}(\lambda) = \begin{vmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ \lambda I_{2^n} - A_n & -I_{2^n} \end{vmatrix}$
On veut ensuite ajouter à la deuxième ligne, $\lambda I_{2^n} - A_n$ fois la première pour faire apparaître un déterminant triangulaire par blocs.
On fait donc subir à la matrice $I_{2^{n+1}} = \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ 0 & I_{2^n} \end{pmatrix}$ la même opération.

On obtient $P = \begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ \lambda I_{2^n} - A_n & I_{2^n} \end{pmatrix}$
Le déterminant de P est facile à calculer il vaut 1.

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ \lambda I_{2^n} - A_n & -I_{2^n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ 0 & (\lambda I_{2^n} - A_n)^2 - I_{2^n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ 0 & ((\lambda-1)I_{2^n} - A_n)\left((\lambda+1)I_{2^n} - A_n\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ si A et B commutent.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \chi_{A_{n+1}}(\lambda) &= \det(P)\begin{vmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ \lambda I_{2^n} - A_n & -I_{2^n} \end{vmatrix} \text{ car } \det(P) = 1 \\ &= \det\left(P\begin{pmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ \lambda I_{2^n} - A_n & -I_{2^n} \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} -I_{2^n} & \lambda I_{2^n} - A_n \\ 0 & ((\lambda-1)I_{2^n} - A_n)\left((\lambda+1)I_{2^n} - A_n\right) \end{vmatrix} \\ &= \det(-I_{2^n}) \times \det\left(((\lambda-1)I_{2^n} - A_n)\left((\lambda+1)I_{2^n} - A_n\right)\right) \\ &= (-1)^{2^n} \times \det\left((\lambda-1)I_{2^n} - A_n\right)\det\left((\lambda+1)I_{2^n} - A_n\right) \\ &= \chi_{A_n}(\lambda-1) \times \chi_{A_n}(\lambda+1) \end{aligned}$$

$\chi_{A_1} = X^2 - \operatorname{tr}(A_1)X + \det(A_1) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

$$\begin{aligned} \chi_{A_2} &= \chi_{A_1}(X-1)\chi_{A_1}(X+1) = (X-2)X \times X(X+2) \\ &= (X-2)X^2(X+2) \end{aligned}$$

Cela suggère l'hypothèse de récurrence : $\chi_{A_n} = \prod_{k=0}^{n} (X - (n-2k))^{\binom{n}{k}}$.
Si on démontre cette propriété, on aura répondu à la question.
$\mathcal{P}(1)$ est vraie (ainsi que $\mathcal{P}(2)$).
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \chi_{A_{n+1}}(X) &= \chi_{A_n}(X-1)\chi_{A_n}(X+1) \\ &= \prod_{k=0}^{n} (X - 1 - (n-2k))^{\binom{n}{k}} \times \prod_{k=0}^{n} (X + 1 - (n-2k))^{\binom{n}{k}} \\ &= \prod_{k=0}^{n} (X - (n+1-2k))^{\binom{n}{k}} \times \prod_{k=0}^{n} (X - (n-2k-1))^{\binom{n}{k}} \\ &= \prod_{k=0}^{n} (X - (n+1-2k))^{\binom{n}{k}} \times \prod_{k=1}^{n+1} (X - (n+1-2k))^{\binom{n}{k-1}} \\ &= (X - (n+1))^1 \times \prod_{k=1}^{n} (X - (n+1-2k))^{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}} \times (X - (n+1-2(n+1)))^1 \\ &= (X - (n+1))^{\binom{n+1}{0}} \times \prod_{k=1}^{n} (X - (n+1-2k))^{\binom{n+1}{k}} \times (X - (n+1-2(n+1)))^{\binom{n+1}{n+1}} \\ &= \prod_{k=0}^{n+1} (X - (n+1-2k))^{\binom{n+1}{k}} \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Exercice 9 *(Centrale 2024)*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :
$(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

1. Soit $u \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{cases}$.
   Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u^* de E tel que :
   $\forall (f,g) \in E^2 \ (u(f) \mid g) = (f \mid u^*(g))$
2. Donner les éléments propres de $u^* \circ u$

Correction

1. u est un endomorphisme de E : la preuve est facile et ne semble pas avoir été demandée.

   L'unicité de u^* (en cas d'existence) est facile à prouver.
   Soit v un endomorphisme de E qui possède la même propriété que u^*.
   $\forall (f,g) \in E^2 \ (f \mid v(g) - u^*(g)) = (f \mid v(g)) - (f \mid u^*(g)) = (u(f) \mid g) - (u(f) \mid g) = 0$
   Donc :
   $\forall g \in E \ v(g) - u^*(g) = 0$
   puis $v = u^*$.

   Pour l'existence, on procède à une intégration par parties.
   Soit $(f,g) \in E^2$.

$$\begin{aligned} (u(f) \mid g) &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\left(\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\left(\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

   Donc $u^* \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ convient (on vérifie facilement que u^* est un endomorphisme de E).
2. Soit $f \in E$.
   $u(f)$ est la primitive nulle en 0 de f : c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 0.
   $u^*(g)$ est l'opposée de la primitive nulle en 1 de g : c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en 1.
   $(u^* \circ u)(f)$ est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, nulle en 1 et de dérivée nulle en 0.
   Sa dérivée première est $-u(f)$ et sa dérivée seconde est $-f$.
   On part donc de $(u^* \circ u)(f) = \lambda f$ et on dérive deux fois.
   Mais à droite f n'est pas supposée de classe $\mathcal{C}^2$ mais seulement continue.
   Si $\lambda \neq 0$ alors $f = \dfrac{1}{\lambda}(u^* \circ u)(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
   Mais cet argument ne fonctionne pas si λ est nul.

On commence donc par le cas $\lambda = 0$.
Soit $f \in \text{Ker}\,(u^* \circ u)$.
$(u^* \circ u)(f) = 0$
On dérive une première fois (ce qui est bien possible) : $-u(f) = 0$
On dérive une seconde fois : $-f = 0$ ie $f = 0$
0 n'est pas valeur propre de $u^* \circ u$.
On examine ensuite le cas $\lambda < 0$.
Soit $f \in E$ tel que $(u^* \circ u)(f) = \lambda f$.
Evalué en 1, cela donne $f(1) = 0$.
On dérive : $-u(f) = \lambda f'$.
Evalué en 0, cela donne $f'(0) = 0$.
On dérive : $-f = \lambda f''$.
Soit $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ de sorte que $\lambda = \dfrac{-1}{\omega^2}$.
$-f = -\dfrac{1}{\omega^2} f''$ donc $f'' = \omega^2 f$.
$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in [0; 1]$ $f(x) = A\,\mathrm{e}^{\omega x} + B\,\mathrm{e}^{-\omega x}$
$f(1) = 0$ donne $A\,\mathrm{e}^{\omega} + B\,\mathrm{e}^{-\omega} = 0$.
$f'(0) = 0$ donne $\omega A - \omega B = 0$.
On en déduit $A = B$ puis $A\,(\mathrm{e}^{\omega} + \mathrm{e}^{-\omega}) = 0$ ce qui entraîne $A = 0$ puis $B = 0$.
La fonction f est donc la fonction nulle et λ n'est pas valeur propre de $u^* \circ u$.

On passe ensuite au cas $\lambda > 0$.
Soit $f \in E$ tel que $(u^* \circ u)(f) = \lambda f$.
Evalué en 1, cela donne $f(1) = 0$.
On dérive : $-u(f) = \lambda f'$.
Evalué en 0, cela donne $f'(0) = 0$.
On dérive : $-f = \lambda f''$.
Soit $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ de sorte que $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$.
$-f = \dfrac{1}{\omega^2} f''$ donc $f'' = -\omega^2 f$.
$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall x \in [0; 1]$ $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
$f(1) = 0$ donne $A \cos(\omega) + B \sin(\omega) = 0$.
$f'(0) = 0$ donne $\omega B = 0$.
On en déduit $B = 0$ puis $A \cos(\omega) = 0$.
Si $\omega \neq \dfrac{\pi}{2} (\pi)$ ie si λ n'est pas de la forme $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors A aussi est nul et comme ci-dessus λ n'est pas valeur propre de $u^* \circ u$.
Par contre, si $\lambda = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors le noyau de $u^* \circ u - \lambda id_E$ est inclus dans la droite dirigée par la fonction $f_n \begin{cases} [0; 1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) x\right) \end{cases}$
Réciproquement :

$$\forall x \in [0;1]\ u(f_n)(x) = \left[\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)t\right)}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right]_0^x = \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\right)}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$$

$$\forall x \in [0;1]\ (u^* \circ u)(f_n)(x) = \left[-\frac{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)t\right)}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}\right]_x^1 = \frac{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$$

f_n est un vecteur propre de $u^* \circ u$ asscié à la valeur propre $\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$.

Finalement les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont les nombres $\lambda_n = \dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Le sous-espace propre associé à λ_n est la droite dirigée par la fonction $f_n \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\right) \end{cases}$

Exercice 10 *(Ens 2025)*

Soient $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(A)$ est inversible.
Montrer que P est constant.

Correction
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ P(\lambda I_n) = P(\lambda) I_n$ est inversible
Donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ P(\lambda) \neq 0$
Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
$\chi_A = X^{n-2}\chi_M = X^{n-2}(X^2 - 2aX + a^2 + b^2) = X^{n-2}(X - z)(X - \overline{z})$
Les valeurs propres complexes de $P(A)$ sont donc $P(0)$ de multiplicité $n-2$, $P(z)$ et $P(\overline{Z})$ simples.
$P(A)$ étant inversible $P(z)$ est non nul.
P n'a donc pas de racine complexe.
On en déduit que P est constant non nul.
La réciproque est vraie : si $P = a_0 \neq 0$ alors :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ P(A) = a_0 I_n \in GL_n(\mathbb{R})$