Centrale Maths 2

Planche 1 *(Maé)*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Soit $\mathcal{C} \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \end{cases}$

1. Montrer que $\begin{cases} E^2 \to \mathbb{R} \\ (A, B) \to \operatorname{tr}(A^T B) \end{cases}$ est un produit scalaire.
2. Donner les définitions de $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\mathcal{C}$ admet un maximum et un minimum sur $O_n(\mathbb{R})$ et sur $SO_n(\mathbb{R})$ (on suppose que ce sont des fermés bornés).
3. Coder $\mathcal{C}$ sur Python.
4. Le code suivant permet de générer une matrice orthogonale aléatoire à n lignes et n colonnes avec probabilité $\frac{1}{2}$ d'appartenir à $SO_n(\mathbb{R})$.
   ```
   from scipy.stats import ortho_group
   def ortho(n):
       return ortho_group.rvs(dim=n)
   ```
   En utilisant $N = 8000$ appels à cette fonction pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$, effectuer une conjecture sur le maximum et le minimum de $\mathcal{C}$ sur $O_n(\mathbb{R})$ et sur $SO_n(\mathbb{R})$.
5. Ecrire $\mathcal{C}(M)$ à l'aide de J_n et de M.
6. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $PJ_nP^T = \operatorname{Diag}(n, 0, \dots, 0)$.
7. Montrer que $M \mapsto P^T MP$ établit une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur $O_n(\mathbb{R})$ et une bijection de $SO_n(\mathbb{R})$ sur $SO_n(\mathbb{R})$.
8. Démontrer la conjecture de la question 4.
9. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des fermés bornés de E.

Correction

1. Cela a été traité en cours.
2. Les définitions de $O_n(\mathbb{R})$ et de $SO_n(\mathbb{R})$ sont dans le cours.
   $\mathcal{C}$ est continue car linéaire entre espaces de dimensions finies.
   Si on suppose que $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont fermés et bornés alors le théorème des bornes atteintes permet d'affirmer que $\mathcal{C}$ admet un maximum et un minimum sur $O_n(\mathbb{R})$ et sur $SO_n(\mathbb{R})$ (ces ensembles étant bien non vides car ils contiennent la matrice I_n)

3. ```
   import numpy as np
   import numpy.linalg as alg

   def C(M):
       n=M.shape[0]
       s=0
       for i in range(n):
           for j in range(n):
               s+=M[i,j]
       return s
   ```
4. ```
   N=80000
   n=2
   minO,maxO,minSO,maxSO=n,n,n,n#valeurs de C pour I_n
   for i in range(N):
       M=ortho(n)
       c=C(M)
       if c<minO:
           minO=c
       elif c>maxO:
           maxO=c
       if alg.det(M)==1 and c<minSO:
           minSO=c
       elif alg.det(M)==1 and c>maxSO:
           maxSO=c
   print(minO,maxO,minSO,maxSO)
   ```
   permet de conjecturer que le minimum de $\mathcal{C}$ sur $O_n(\mathbb{R})$ et sur $SO_n(\mathbb{R})$ vaut $-n$ et le maximum n.
5. Les calculs faits dans la première question donnent $\mathcal{C}(M) = (J_n \mid M)$.
6. J_n est symétrique réelle donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $D = PJ_nP^T$ est diagonale avec sur la diagonale de D la liste des valeurs propres de J_n comptées avec leurs multiplicités.
   J_n est de rang 1 donc avec la formule du rang 0 est valeur propre de J_n, le sous-espace propre associé étant dee dimension $n-1$ (on suppose $n \geq 2$, le cas $n = 1$ étant de peu d'intérêt vu que $O_1(\mathbb{R}) = \{(-1);(1)\}$ et $SO_1(\mathbb{R}) = \{(1)\}$).
   J_n étant diagonalisable, $n-1$ est aussi la multiplicité de 0.
   J_n a une dernière valeur propre, qu'on calcule avec la trace de J_n : c'est n.
   D'où le résultat.
7. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $f(M) = P^TMP \in O_n(\mathbb{R})$ comme produit de 3 matrices orthogonales.
   Si $f(M_1) = f(M_2)$ alors $P^TM_1P = P^TM_2P$. Les matrices P^T et P étant inversibles, on en déduit $M_1 = M_2$. f est donc injective.
   Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$.
   $M' = PMP^T \in O_n(\mathbb{R})$ et $f(M') = M$ donc f est surjective.

   Si $M \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $g(M) = P^TMP \in O_n(\mathbb{R})$ comme produit de 3 matrices orthogonales.
   De plus $\det(g(M)) = \det(P^T)\det(M)\det(P) = \det(M)\det(P)^2 = \det(M) = 1$ car $\det(P) = \pm 1$
   Si $g(M_1) = g(M_2)$ alors $P^TM_1P = P^TM_2P$. Les matrices P^T et P étant inversibles, on

en déduit $M_1 = M_2$. g est donc injective.
Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$.
$M' = PMP^T \in SO_n(\mathbb{R})$ et $g(M') = M$ donc g est surjective.

8.

$$\begin{aligned}
\max_{M\in O_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(M)) &= \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(P^TMP)) \text{ d'après la question précédente}\\
&= \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}\left((J_n \mid P^TMP)\right) = \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}\left(\mathrm{tr}\left(J_nP^TMP\right)\right) \text{ car } J_n^T = J_n\\
&= \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}\left(\mathrm{tr}\left(PJ_nP^TM\right)\right) = \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}(\mathrm{tr}\,(DM))\\
&= \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}(nm_{1,1}) = n \max_{M\in O_n(\mathbb{R})}(m_{1,1})
\end{aligned}$$

Les coefficients d'une matrice orthogonale sont compris entre -1 et 1 : la somme des carrés des coefficients de chaque colonne vaut 1. Comme c'est une somme de nombres positifs, on en déduit que le carré de chaque coefficient est majoré par 1.
De plus pour $M = I_n$, $m_{1,1} = 1$ donc $\max\limits_{M\in O_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(M)) = n$.
On montre de même $\min\limits_{M\in O_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(M)) = -n$, (cas d'égalité $M = -I_n$), $\max\limits_{M\in SO_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(M)) = n$ (cas d'égalité $M = I_n$) et $\min\limits_{M\in SO_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(M)) = -n$ (cas d'égalité $M = \mathrm{Diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$)
On observera que la matrice $-I_n$ n'appartient à $SO_n(\mathbb{R})$ que dans le cas n pair. On observera également que si $n = 1$ alors $\min\limits_{M\in SO_n(\mathbb{R})}(\mathcal{C}(M)) = 1$, $SO_1(\mathbb{R})$ se réduisant à la seule matrices I_1.

9. Comme remarqué dans la question précédente, les coefficients d'une matrice orthogonale sont compris entre -1 et 1 donc $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont bornés.
Pour montrer qu'ils sont bornés, on utilise la caractérisation séquentielle.
Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $M \in E$.
$\forall p \in \mathbb{N}\ M_p^TM_p = I_n$
En passant à la limite $M^TM = I_n$ et $M \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $M \in E$.
$\forall p \in \mathbb{N}\ M_p^TM_p = I_n$ et $\det(M_p) = 1$
En passant à la limite $M^TM = I_n$ et $\det(M) = 1$ donc $M \in SO_n(\mathbb{R})$.

Planche 2

1. Montrer que la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$ converge et trouver sa limite.

2. (a) On pose $u_0 = 0,2$ et $v_0 = 0,7$.
On prend x dans $\{0,25; 0,5; 0,9\}$.
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-x)u_n + xv_n \\ v_{n+1} = xu_n + (1-x)v_n \end{cases}$$

Tracer les 30 premiers termes des deux suites grâce à un programme Python et conjecturer leurs limites.

(b) Démontrer cette conjecture.
Indication : on pourra commencer par étudier $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3. (a) On pose $u_0 = 0,2$ et $v_0 = 0,7$.
On prend x dans $\{0,25; 0,5; 0,9\}$.
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-x)u_n + \dfrac{x}{2}v_n \\ v_{n+1} = \dfrac{x}{2}u_n + (1-x)v_n \end{cases}$$

Tracer les 30 premiers termes des deux suites grâce à un programme Python et conjecturer leurs limites.

(b) Démontrer cette conjecture.
Indication : on pourra commencer par étudier $(\max(|u_n|, |v_n|))_{n\in\mathbb{N}}$

4. Il restait 4 autres questions où on démontrait les mêmes résultats en utilisant des normes. Il me paraît plus intéressant de redémontrer les résultats précédents avec la réduction des endomorphismes.

Correction

1. La fonction $x \mapsto x^2$ étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite ne pose aucun problème de définition.
$\forall x \in]0;1[\; x^2 \in]0;1[$
Donc par une récurrence facile :
$\forall n \in \mathbb{N} \; u_n \in]0;1[$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n = u_n(u_n - 1) < 0$
La suite (u_n) est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge et sa limite l vérifie $0 \leq l \leq u_0 < 1$
Par ailleurs en passant à la limite dans $u_{n+1} = u_n^2$, on obtient $l = l^2$ ie $l \in \{0;1\}$.
Finalement, $l = 0$.

2. (a)
```
import matplotlib.pyplot as plt

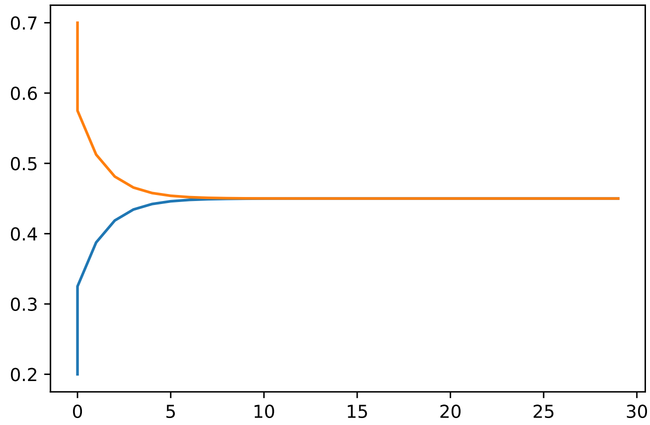
u_0,v_0=0.2,0.7

x=0.9

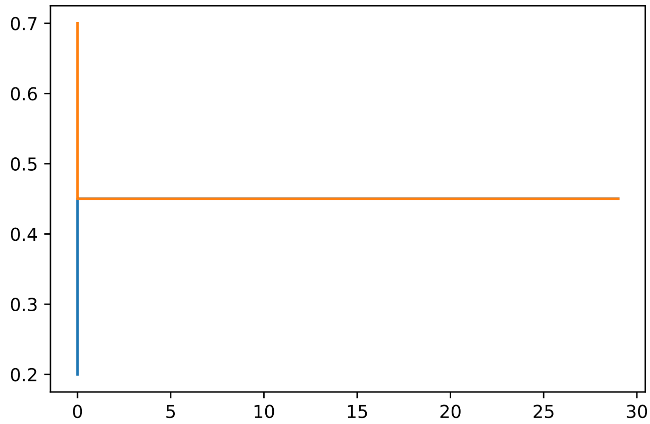
uv=[u_0,v_0]
les_i,les_u,les_v=[0],[u_0],[v_0]
for i in range(30):
    ui,vi=uv[0],uv[1]
    uv=[(1-x)*ui+x*vi,x*ui+(1-x)*vi]
    les_i.append(i)
    les_u.append(uv[0])
    les_v.append(uv[1])

plt.plot(les_i,les_u)
plt.plot(les_i,les_v)
plt.show()
```

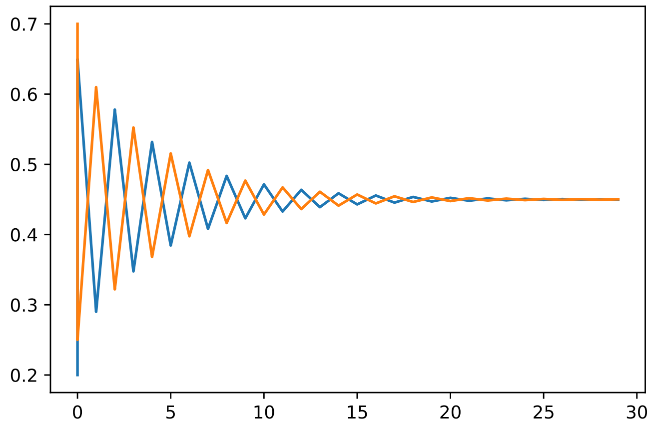
On obtient pour $x = 0,25$:



pour $x = 0.5$:



pour $x = 0.9$:



On conjecture que les deux suites convergent vers $0,45 = \dfrac{u_0 + v_0}{2}$.

(b)

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}+v_{n+1} &= (1-x)u_n + xv_n + xu_n + (1-x)v_n \\ &= (1-x+x)u_n + (x+1-x)v_n \\ &= u_n + v_n\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n + v_n = u_0 + v_0$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1}-v_{n+1} &= (1-x)u_n + xv_n - xu_n - (1-x)v_n \\ &= (1-x-x)u_n + (x-1+x)v_n = (1-2x)u_n + (2x-1)v_n \\ &= (1-2x)(u_n - v_n)\end{aligned}$$

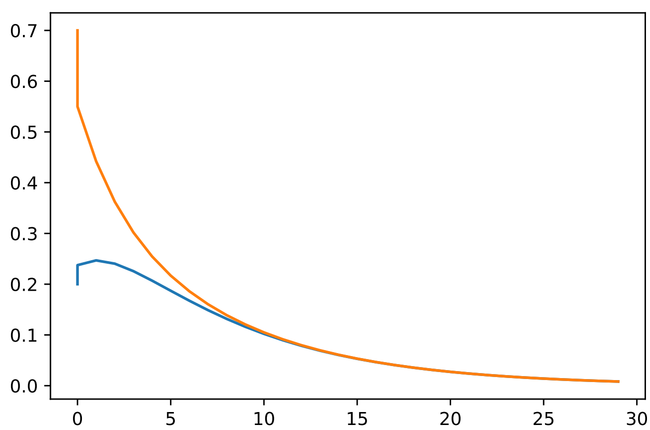
On en déduit par récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n - v_n = (1-2x)^n(u_0+v_0)$
Si $x \in]0;1[$ alors $1-2x \in]-1;1[$ donc $(1-2x)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On en déduit $u_n = \frac{1}{2}\left((u_n+v_n)+(u_n-v_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{u_0+v_0}{2}$ ainsi que $v_n = \frac{1}{2}\left((u_n+v_n)-(u_n-v_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{u_0+v_0}{2}$
On utilise donc uniquement l'hypothèse $x \in]0;1[$, u_0 et v_0 étant quelconques.

Autre méthode
On note $s = u_0 + v_0$.

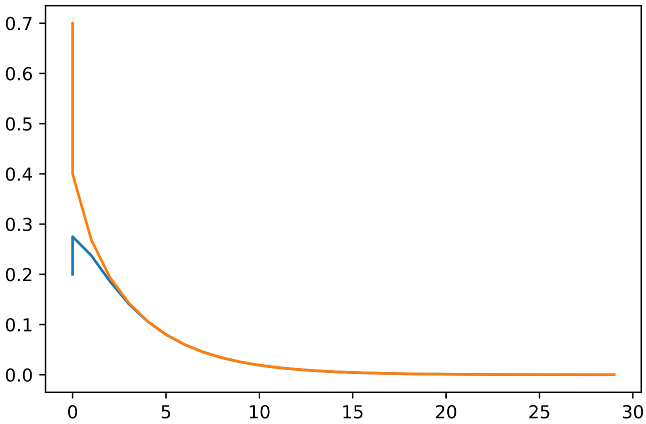
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} &= (1-x)u_n + xv_n = (1-x)u_n + x(s-u_n) \\ &= (1-2x)u_n + xs\end{aligned}$$

et on reconnaît une suite arithmético-géométrique dont l'étude est classique.

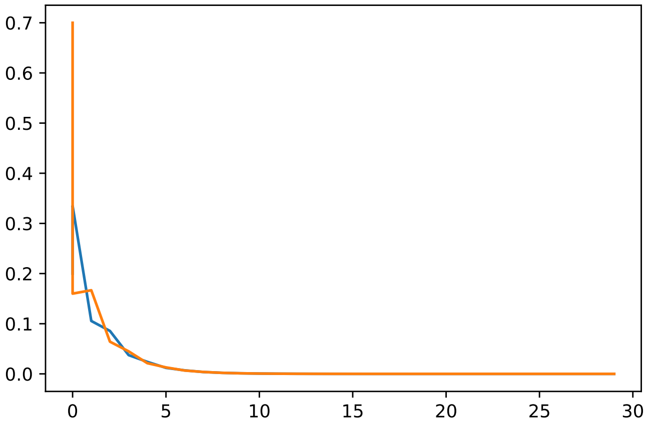
3. (a) On obtient pour $x = 0,25$:



pour $x = 0.5$:



pour $x = 0.9$:



On conjecture que les deux suites convergent vers 0.

(b) On suppose toujours $x \in]0;1[$ et on note $M_n = \max(|u_n|, |v_n|)$.
$\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1}| \leq (1-x)|u_n| + \frac{x}{2}|v_n| \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right) M_n$
$\forall n \in \mathbb{N}\ |v_{n+1}| \leq \frac{x}{2}|u_n| + (1-x)|v_n| \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right) M_n$
On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}\ M_{n+1} \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right) M_n$
puis par récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq M_n \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n M_0$
Si $x \in]0;1[$ alors $1 - \frac{x}{2} \in \left]\frac{1}{2};0\right[\subset]-1;1[$ donc $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$
On en déduit $M_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$ puis avec les inégalités $0 \leq |u_n| \leq M_n$ et $0 \leq |v_n| \leq M_n$, $u_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$.

Planche 3 *(Clarisse)*

Une puce peut se déplacer le long d'un axe gradué en faisant 3 sauts vers la droite : de 1

graduation, de 2 graduations ou de 3 graduations.
On suppose qu'en $t=0$, la puce est en 0. Le temps est supposé infini. Les sauts sont indépendants.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n : "la puce est allée sur la graduation n" et $u_n = P(A_n)$

1. Calculer u_0, u_1, et u_2.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, G_n la variable aléatoire qui vaut la graduation où est la puce à l'instant n.
   Donner $G_n(\Omega)$ et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(G_n \geq n) = 1$.
3. (a) Ecrire la fonction `Estimation(n,s)` qui réalise une estimation de $P(A_n)$, notée $p_n^{(s)}$, en répétant s fois la simulation réalisée $\mathrm{Sim}(n)$.
   $\mathrm{Sim}(N)$ fait une simulation des $N+1$ premiers instants du trajets de la puce et renvoie la liste des graduations où elle est allée *(fonction fournie)*.
   Par exemple

```
import numpy.random as rd
def sim(N):
    res=[0]
    for i in range (N):
        X=rd.randint(1,4)
        res.append(res[-1]+X)
    return res
```

   Estimer u_{10} avec $s = 1000$.

   (b) Ecrire la fonction Suite(n) qui renvoie v_n sachant que :
   $v_0 = 1, v_1 = \frac{1}{3}, v_2 = \frac{4}{9}$ et $v_{n+3} = \frac{v_n+v_{n+1}+v_{n+2}}{3}$.
   Calculer v_{10}.

   (c) A l'aide de la fonction Compare *(fonction fournie)*, qui trace $(p_n^{(s)} - v_n)_{n\in[\![0;9]\!]}$ pour $s \in \{10, 100, 1000, 10000\}$.
   Conjecturer le lien entre u_n et v_n.

   (d) Tracer v_n sur ses 100 première valeurs.
   En déduire le comportement asymptotique de v.
4. Montrer la conjecture de la 3.(c) en utilisant G_1
5. (a) On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.
   Montrer que $Y_n = A^n Y_0$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, z, \overline{z}\}$ avec z un complexe à préciser.
   Calculer le module de z
6. *Des questions supplémentaires non traitées*
7. Montrer que la suite (u_n) converge.
8. Donner un vecteur propre Z de la matrice A^T pour la valeur propre 1.
9. Montrer :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ Z^T Y_n = Z^T Y_0$
10. Conclure.

Correction

1. On note X_i la valeur du i-éme déplacement.
   $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{1;2;3\}$.
   D'après l'énoncé, $u_0 = 1$.
   $u_1 = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{3}$
   $u_2 = P\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cup (X_1 = 2)\right) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$
   A_2 signifie que la puce s'est trouvée à la graduation 2 mais pas forcément à l'instant 2.
2. $G_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   On en déduit $G_n(\Omega) \subset [\![n;3n]\!]$.
   $G_n \geq n$ donc $P(G_n \geq n) = 1$.
   Reste une question : un nombre compris entre n et $3n$ peut -il s'écrire comme somme de n nombres égaux à 1, 2 ou 3 ?
   Quand a décrit $[\![0;n]\!]$, $a + 2(n-a) = 2n - a$ décrit $[\![n;2n]\!]$ et $2a + 3(n-a) = 3n - a$ décrit $[\![2n;3n]\!]$.
   On a bien $G_n(\Omega) = [\![n;3n]\!]$.
   On observera que $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} (G_k = n)$ puisque à partir de l'instant $n+1$ la puce est passé à droite de la graduation n.
3. (a)
```
def estimation(n,s):
    c=0
    for i in range(s):
        if n in sim(n):
            c+=1
    return (c/s)
print(estimation(10,1000))
0.495
```
   (b)
```
def Suite(n):
    if n==0:
        return 1
    if n==1:
        return 1/3
    if n==2:
        return 4/9
    return (Suite(n-1)+Suite(n-2)+Suite(n-3))/3

print(Suite(10))
0.49795932191908415
```
   (c)
```
import matplotlib.pyplot as plt

les_n=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]
s=10000
les_p=[estimation(n,s)-Suite(n) for n in range(10)]
plt.plot(les_n,les_p)
plt.show()
```
   On conjecture $u_n = v_n$.

(d) On est obligé de programmer récursivement la fonction `suite` :

```
def suite(n):
    if n==0:
        return 1
    if n==1:
        return 1/3
    if n==2:
        return 4/9
    l=[1,1/3,4/9]
    for i in range(3,n+1):
        l=[l[1],l[2],sum(l)/3]
    return(l[-1])

print(suite(10),Suite(10))

les_n=[n for n in range(100)]
les_v=[suite(n) for n  in range(100)]
plt.plot(les_n,les_v)
plt.show()
```

On conjecture que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

4. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((G_1 = 1), (G_1 = 2), (G_1 = 3))$
Une justification orale suffisait pour affirmer que $P(A_{n+3} \,|\, G_1 = 1) = P(A_{n+2})$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 3 \; P(A_n) &= P(A_n \mid G_1 = 1)P(G_1 = 1) + P(A_n \mid G_1 = 2)P(G_1 = 2) + P(A_n \mid G_1 = 3)P(G_1 = 3) \\ &= \frac{1}{3}\left(P(A_{n-1}) + P(A_{n-2}) + P(A_{n-3})\right) \end{aligned}$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) vérifient la même relation de récurrence avec les mêmes conditions initiales : elles sont égales.

5. (a) On commence par observer que $Y_{n+1} = AY_n$ et on en déduit le résultat par récurrence.

(b) Classiquement pour une matrice compagne $\chi_A = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$.
1 est racine évidente et $\chi_A = (X-1)\left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right)$
$\Delta = \frac{4}{9} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{9} < 0$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1; z; \overline{z}\}$ avec $z = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$ de module $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1$

6. χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.
$\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$ tq $A = P\mathrm{Diag}(1, z, \overline{z})P^{-1}$
$\forall n \in \mathbb{N}\; Y_n = P\mathrm{Diag}(1, z^n, \overline{z}^n)P^{-1}Y_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\mathrm{Diag}(1, 0, 0)P^{-1}Y_0$
En particulier la suite (u_n) converge.

7.

$$A^T Z = Z \iff \begin{cases} \frac{1}{3} z_3 = z_1 \\ z_1 + \frac{1}{3} z_3 = z_2 \\ z_2 + \frac{1}{3} z_3 = z_3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z_1 = \frac{1}{3} z_3 \\ z_2 = \frac{2}{3} z_3 \\ z_2 = \frac{2}{3} z_3 \end{cases}$$

Le vecteur $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ convient.

8.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}\ Z^T Y_{n+1} &= Z^T A Y_n = \left(A^T Z\right)^T Y_n \\ &= Z^T Y_n \end{aligned}$$

et on conclut par récurrence.

9. A la limite, on a $Z^T \begin{pmatrix} l \\ l \\ l \end{pmatrix} = Z^T Y_0 = Z^T \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

Donc $6l = 3$ et $l = \frac{1}{2}$

Planche 4 *(Antoine)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et si la série de terme général u_n converge, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. On suppose que la série de terme général u_n converge. Donner la limite de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Donner la nature des séries $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Dans les questions 3 à 6, $u_n = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

3. Sur Python, tracer $\ln(S_n)$ en fonction de $\ln(n)$ pour $n \in [\![1, 1001]\!]$.
   Conjecturer la valeur de α telle que $S_n = O(n^\alpha)$.
4. Tracer $\frac{S_n}{n^\alpha}$ en fonction de n pour $n \in \{1; 101; 201; \ldots; 10001\}$.
   Conjecturer un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.
5. A l'aide de Taylor-Lagrange, montrer : $\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

6. Prouver la conjecture de la question 4.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes positifs telle que $u_0 > 0$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

   En étudiant $\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$ donner la nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ pour $\alpha \in]0;1]$.
8. 3 autres questions

Correction

1. C'est du cours : $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. $n+1 \sim n$ et ce sont des infiniment grands donc $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

   On en déduit : $n^{3/2}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Classiquement la série $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$ converge (absolument).

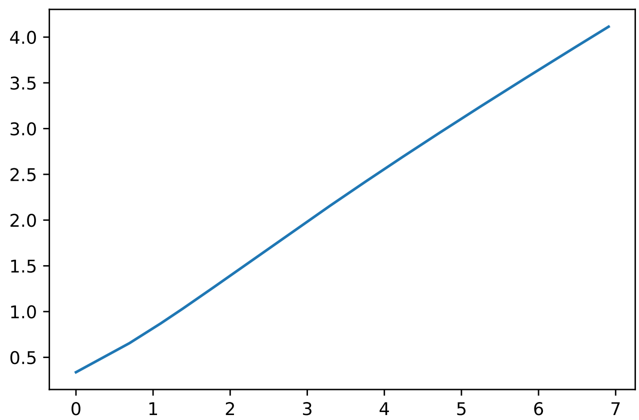
   $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{n^{1/2}}$, tout est positif et la série de terme général $\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge donc la série $\sum_{n\geq 0} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ diverge.
3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as pypl

def u(n):
    return np.arctan(1/np.sqrt(n+1))

def S(n):
    return sum(u(k) for k in range(n+1))

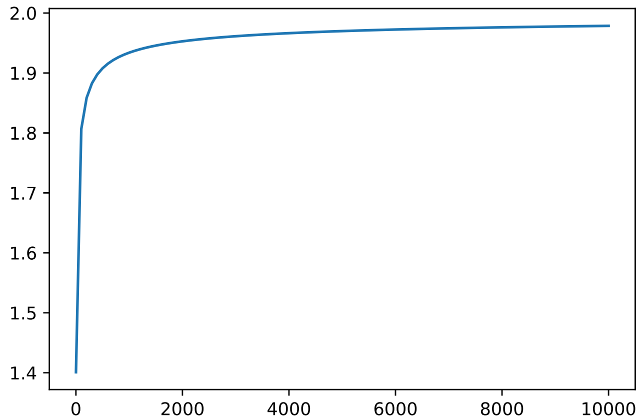

les_x=[np.log(n) for n in range(1,1002)]
les_y=[np.log(S(n)) for n in range(1,1002)]

pypl.plot(les_x,les_y)
```



La question est ensuite mal posée : si $S_n = O\left(n^{\alpha}\right)$ on a aussi $S_n = O\left(n^{\beta}\right)$ pour tout $\beta > \alpha$.
Graphiquement, les points de coordonnées $(\ln(n), \ln(S_n)))$ semblent alignés.
Il faudrait faire une régression linéaire mais celle-ci n'est pas dans les notices.
$\dfrac{\ln(S_{1001}) - \ln(S_{500})}{\ln(1001) - \ln(500)} \simeq 0,52$
On a donc, naïvement, en posant $\alpha = 0,52$, $\ln(S_n) = \alpha \ln(n) + \beta$ puis $S_n = \mathrm{e}^{\beta} n^{\alpha} = O\left(n^{\alpha}\right)$.
On peut aussi penser que la bonne valeur est $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

4. ```
les_n=[1+k*100 for k in range(101)]
les_y=[S(1+k*100)/(1+k*100)**.5 for k in range(101)]
pypl.plot(les_n,les_y)
```




On conjecture $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ ie $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

5. S'agissant de séries à termes positifs divergentes, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
La fonction arctan est $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
$\arctan(0) = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
En particulier, $\arctan'(0) = 1$
arctan est impaire donc $\arctan''$ aussi et $\arctan''(0) = 0$
Enfin par le théorème des bornes atteintes :
$\exists M_3 \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in [0;1]\ \left|\arctan^{(3)}(x)\right| \leq M_3$
Par l'inégalité de Taylor-Lagrange :
$\forall x \in [0;1]\ \left|\arctan(x) - x\right| \leq \dfrac{M_3}{6} x^3 \leq M_3 x^3$
Donc :
$\forall k \in \mathbb{N}^*\ \left|\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right| \leq \dfrac{M_3}{(k+1)^{3/2}}$
```

On en déduit avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \ \left|\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\left|\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right| \\ &\leq M_3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{3/2}} \leq M_3 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{3/2}} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = O(1) = o\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \sim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$.

6. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable en 0 donc :
   $\displaystyle\forall k \in \mathbb{N} \ \int_{k+1}^{k+2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
   Donc :
   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N} \ \int_{1}^{n+2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_{0}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
   Donc :
   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N} \ 2\sqrt{n+2} - 2 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$
   Mais $2\sqrt{n+2} - 2 \sim 2\sqrt{n}$ et $2\sqrt{n+1} \sim 2\sqrt{n}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \sim 2\sqrt{n}$ et on conclut avec la question 5.
7. (u_n) est à termes positifs donc :
   $\forall n \in \mathbb{N} \ S_n \geq u_0 > 0$
   De plus la série de terme général u_n diverge donc : $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
   $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_n - u_n}{S_n}\right) = \ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)$
   $\ln(S_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc par le lien suite série, la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ diverge.
   Si la suite $\left(\dfrac{u_n}{S_n}\right)$ ne converge pas vers 0, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ diverge grossièrement.
   Si la suite $\left(\dfrac{u_n}{S_n}\right)$ converge vers 0, $\dfrac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \dfrac{u_n}{S_n}\right)$ et tout est de signe constant.
   Donc la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ diverge.
   Soit $\alpha \in]0; 1]$.
   $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc :
   $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0 \ S_n \geq 1$
   On a alors :
   $\forall n \geq n_0 \ S_n^{\alpha} \leq S_n$
   On en déduit :

$\forall n \geq n_0 \ \dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \geq \dfrac{u_n}{S_n} \geq 0$

Donc la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ diverge.

Planche 5 *(Julien)*

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
On pose $q = 1 - p$.
Soit M_n la variable aléatoire $\max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
   Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut $P(X \leq k)$?
   Rappeler l'espérance et la variance de X.
2. Que vaut $P(M_n \geq k)$?
3. La fonction suivante simule la variable aléatoire M_n :

```
import numpy.random as rd

def M(n,p):
    X=rd.geometric(p,n)
    return(max(X))
```

   On estime l'espérance de M_n en effectuant la moyenne de 10^3 appels à cette fonction.
   Ecrire la fonction Python `Esp(n,p)` correspondante.
4. Ecrire la fonction Python `H(n)` qui calculer $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
5. Tracer pour différentes valeurs de p, sur un même graphe, les points d'abscisse $n \in [\![1;50]\!]$ et d'ordonnées $-\dfrac{H_n}{\ln(q)}$, $-\dfrac{H_n}{\ln(q)} + 1$ et `Esp(n,p)`.
   Quelle conjecture peut-on faire ?
6. Montrer que $E(M_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - q^{\lfloor t \rfloor}\right)\right)^n \mathrm{d}t$.
   Il y avait en tout 10 questions.
   Je propose la restitution suivante :
7. Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) \mathrm{d}t \leq E(M_n) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) \mathrm{d}t$
8. A l'aide du changement de variable $x = (1-p)^t$, montrer :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - (1-p)^t\right)^n\right) = \frac{-H_n}{\ln(1-p)}$
9. Conclure.

Correction

1. Deux méthodes sont possibles :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^* \ P(X \leq k) &= P\left(\bigcup_{l=1}^{k} (X = l)\right) = \sum_{l=1}^{k} P(X = l) \\
&= \sum_{l=1}^{k} pq^{l-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k
\end{aligned}$$

Cette formule reste valable pour $k=0$.

Ou bien on dit que $P(X \leq k) = 1 - P(X > k)$ où $P(X > k)$ est la probabilité d'échouer aux k premières tentatives soit q^k.

$E(X) = \dfrac{1}{p}$, $V(X) = \dfrac{q}{p^2}$

2.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^* \; P(M_n \geq k) &= 1 - P(M_n < k) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < k)\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq k-1) \text{ par indépendance} \\
&= 1 - \left(1 - q^{k-1}\right)^n
\end{aligned}$$

3.
```
def Esp(n,p):
    N=10**3
    s=0
    for i in range(N):
        s+=M(n,p)
    return s/N
```

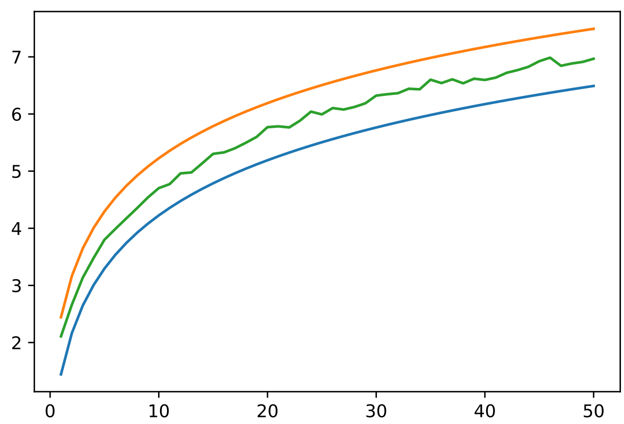
4.
```
def H(n):
    return sum(1/k for k in range(1,n+1))
```

5.
```
p=0.5
les_n=[n for n in range(1,51)]
les_y1=[-H(n)/np.log(1-p) for n in range(1,51)]

plt.plot(les_n,les_y1)

les_y2=[-H(n)/np.log(1-p)+1 for n in range(1,51)]
plt.plot(les_n,les_y2)

les_y3=[Esp(n,p) for n in range(1,51)]
plt.plot(les_n,les_y3)
```



On conjecture :
$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0;1[\ -\dfrac{H_n}{\ln(q)} \leq E(M_n) \leq -\dfrac{H_n}{\ln(q)} + 1$

6. Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1 - \left(1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor}\right)^n \end{cases}$.
f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (mais elle n'est pas continue).
$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^* \ \int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{l=0}^{k-1} \int_l^{l+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{l=0}^{k-1} \int_l^{l+1} \left(1-\left(1-q^l\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} P(M_n > l) \end{aligned}$$
On n'a pas encore justifié que M_n avait une espérance. M_n étant à valeurs entières positives, il suffit de prouver que la série de terme général $P(M_n > k)$ converge.
Lorsque k tend vers $+\infty$, q^k converge vers 0 donc :
$P(M_n > k) = 1 - \left(1 - nq^k + o\left(q^k\right)\right) = nq^k + o\left(qk\right) \sim nq^k$
On en déduit que la série $\sum_{k\geq 0} P(M_n > k)$ converge.
On déduit alors du début de cette question :
$\int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to+\infty]{} E(M_n)$
f étant à valeurs positives, on en déduit classiquement que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :
$E(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-(1-p)^{\lfloor t\rfloor}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t$

7. $\forall t \in \mathbb{R} \ t-1 \leq \lfloor t \rfloor \leq t$
$p \in]0;1[$ donc $\ln(q) < 0$ et :
$\forall t \in \mathbb{R} \ (t-1)\ln(q) \geq \lfloor t \rfloor \ln(q) \geq t\ln(q)$
On en déduit :
$\forall t \in \mathbb{R} \ q^{t-1} \geq q^{\lfloor t \rfloor} \geq q^t$
puis :
$\forall t \in \mathbb{R} \ 1-q^{t-1} \leq 1-q^{\lfloor t \rfloor} \leq 1-q^t$
Si $t \geq 1$, tout est positif et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :
$\forall t \geq 1 \ \left(1-q^{t-1}\right)^n \leq \left(1-q^{\lfloor t\rfloor}\right)^n \leq \left(1-q^t\right)^n$
D'où on tire :
$\int_1^{+\infty} \left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \left(1-\left(1-q^{\lfloor t\rfloor}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \left(1-\left(1-q^{t-1}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t$
Dans l'intégrale de droite, on fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone $s = t-1$ et on a :
$\int_1^{+\infty} \left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \left(1-\left(1-q^{\lfloor t\rfloor}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)\,\mathrm{d}t$
Pour t compris entre 0 et 1, on a :
$1-q^{t-1} \leq 0 \leq 1-q^{\lfloor t\rfloor} \leq 1-q^t$
Donc on écrit :
$0 \leq \left(1-q^{\lfloor t\rfloor}\right)^n \leq \left(1-q^t\right)^n$
D'où :
$1-\left(1-q^t\right)^n \leq 1-\left(1-q^{\lfloor t\rfloor}\right)^n \leq 1$

On en déduit :
$\displaystyle\int_0^1 \left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left(1-\left(1-q^{\lfloor t\rfloor}\right)^n\right)\,\mathrm{d}t \leq 1$
et on conclut facilement.

8. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant.
$x = q^t$ donne $t = \dfrac{\ln(x)}{\ln(q)}$ puis $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln(q)}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)\,\mathrm{d}t &= \int_1^0 \left(1-(1-x)^n\right)\frac{\mathrm{d}x}{x\ln(q)}\\
&= \frac{-1}{\ln(q)}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{-1}{\ln(q)}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{-1}{\ln(q)}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 (1-x)^k\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{-1}{\ln(q)}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{-(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1\\
&= \frac{-1}{\ln(q)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\\
&= \frac{-H_n}{\ln(q)}
\end{aligned}$$

9. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \dfrac{-H_n}{\ln(q)} \leq E(M_n) \leq \dfrac{-H_n}{\ln(q)} + 1$
Comme (H_n) diverge vers $+\infty$, on en déduit $E(M_n) \sim \dfrac{-H_n}{\ln(q)}$.
Enfin, on a très classiquement $H_n \sim \ln(n)$ donc on aboutira à $E(M_n) \sim \dfrac{-\ln(n)}{\ln(q)}$.

Planche 6 *(Nélia)*

Soit $E_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P(0) = P(1) = 0\}$.
Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0;1]) \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
E_n est un sous-espace vectoriel de E, on ne demande pas de le démontrer.
2. Déterminer une base de E_n et donner sa dimension.
3. L'application $\begin{cases} E\times E \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto < f,g >_1 = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est un produit scalaire : on ne demande pas de le prouver.
On note N_1 la norme euclidienne associée.
Montrer que l'application $\begin{cases} E_n\times E_n \to \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto < f,g >_2 = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ est un produit scalaire.
On note N_2 la norme euclidienne associée.

4. Une fonction `phi_alea` est donnée (sur papier ou directement sur la machine ?) qui calcule un polynôme aléatoire de E_3 et renvoie $\dfrac{N_1(P)}{N_2(P)}$.
Je propose la fonction suivante :

```
import numpy.random as rd
from numpy.polynomial import Polynomial
import scipy.integrate as integr
import numpy as np

def alea(N): #simule une va qui suit la loi uniforme sur [-N;N]
    x=rd.random()
    return N*(2*x-1)

def phi_alea(n):
    c=[]
    for i in range(n-1):
        c.append(alea(10))
    P=Polynomial(c)*Polynomial([-1,1])*Polynomial([0,1])
    def f(x):
        return P(x)**2
    N1=integr.quad(f,0,1)
    def g(x):
        return ((P.deriv(1))(x))**2
    N2=integr.quad(g,0,1)
    return N1[0]/N2[0]
```

On demande ensuite d'importer les modules convenables :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

et d'écrire un code Python qui trace sur un graphe les valeurs de la suite $\left(\dfrac{\pi^2 N_1(P_i)^2}{N_2(P_i)^2}\right)_{i\in[\![0;9999]\!]}$
où les P_i sont 10000 polynômes aléatoires appartenant à E_3.
Quelle conjecture peut-on faire ?
5. Prouver votre conjecture.
6. Montrer :
$\forall f \in E \quad \int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$
7. Montrer pour tout $n \geq 2$:
$\exists M_n \in \mathbb{R}_+^* \text{ tq } \forall P \in E_n \; N_1(P) \leq M_n N_2(P)$

Correction

1. On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0;1])$.
   - $E \subset \mathcal{C}^1([0;1])$: clair.
   - La fonction nulle appartient à E.
   - E est stable par combinaison linéaire :
     Soit $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
     $(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda\, 0 + \mu\, 0 = 0$
     $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda\, 0 + \mu\, 0 = 0$

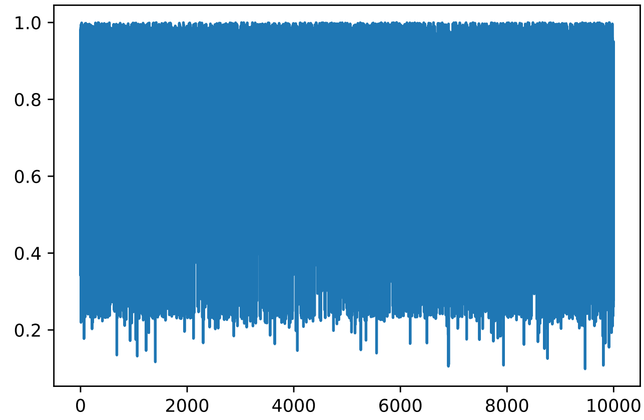
2. E_n est l'ensemble des multiples du polynôme $X(X-1)$ qui sont de degré inférieur ou égal à n.
   Par conséquent, si $n = 0$ ou 1 alors E_n est réduit au polynôme nul et E_n est de dimension nulle.
   Si $n \geq 2$, E_n a pour base par exemple $\left(X^{k+1}(X-1)\right)_{0\leq k\leq n-2}$ et E_n est de dimension $n-1$.

3.
   - $\forall (f,g) \in E_n^2 \; < f, g >_2 = \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g'(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = < g, f >_2$
   - Soit $(f, g_1, g_2) \in E_n^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
< f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 >_2 &= \int_0^1 f'(t)(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)\left(\lambda_1 g_1'(t) + \lambda_2 g_2'(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\lambda_1 f'(g) g_1'(t) + \lambda_2 f'(t) g_2'(t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \int_0^1 f'(t)g_1'(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^1 f'(t)g_2'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 < f, g_1 >_2 + \lambda_2 < f, g_2 >_2
\end{aligned}$$

   - De la symétrie et de la linéarité à droite, on déduit la linéarité à gauche.
   - $\forall f \in E_n \; < f, f >_2 = \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ car $(f')^2$ est une fonction positive.
   - Soit $f \in E_n$ tel que $< f, f >_2 = 0$.
     $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$ avec $(f')^2$ fonction continue et positive donc :
     $\forall t \in [0;1] \; f'(t)^2 = 0$
     On en déduit :
     $\forall t \in [0;1] \; f'(t) = 0$
     Mais f est une fonction polynomiale donc f' aussi et :
     $\forall t \in \mathbb{R} \; f'(t) = 0$
     On en déduit :
     $\forall t \in \mathbb{R} \; f(t) = f(0) = 0$

4.
```
les_i=[]
les_quotients=[]
for i in range(10**4):
    les_i.append(i)
    les_quotients.append((np.pi*phi_alea(3))**2)
plt.plot(les_i,les_quotients)
```



On conjecture :
$\forall P \in E_3 \; N_1(P) \leq \frac{1}{\pi} N_2(P)$

5. Soit $P \in E_3$.
$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $P(X) = aX^2(X-1) + bX(X-1) = X(X-1)(aX+b)$.
$N_1(P)^2 = a^2 \left\| X^2(X-1) \right\|_1^2 + 2ab < X^2(X-1), X(X-1) >_1 + b^2 \left\| X(X-1) \right\|_1^2$

$$\begin{aligned} \left\| X^2(X-1) \right\|_1^2 &= \int_0^1 x^4(x-1)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^6 - 2x^5 + x^4 \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| X(X-1) \right\|_1^2 &= \int_0^1 x^2(x-1)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2 \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < X^2(X-1), X(X-1) >_1 &= \int_0^1 x^3(x-1)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^5 - 2x^4 + x^3 \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Donc $N_1(P)^2 = \frac{1}{15} \left(\frac{a^2}{7} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{2} \right)$

$P' = a(2X(X-1) + X^2) + b(X-1+X) = a(3X^2 - 2X) + b(2X-1)$

$$\begin{aligned} N_2(P)^2 &= N_1(P')^2 = a^2 N_1(3X^2-2X)^2 + 2ab < 3X^2-2X, 2X-1 >_1 + b^2 N_1(2X-1) \\ &= a^2 \int_0^1 \left(9x^4 - 12x^3 + 4x^2 \right) \, \mathrm{d}x + 2ab \int_0^1 \left(6x^3 - 7x^2 + 2x \right) \, \mathrm{d}x + b^2 \int_0^1 \left(4x^2 - 4x + 1 \right) \, \mathrm{d}x \\ &= a^2 \left(\frac{9}{5} - 3 + \frac{4}{3} \right) + 2ab \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{3} + 1 \right) + b^2 \left(\frac{4}{3} - 2 + 1 \right) \\ &= \frac{2a^2}{15} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2a^2}{5} + ab + b^2 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{10}N_2(P)^2 - N_1(P)^2 = \frac{2}{525}a^2 \geq 0$$

Donc $N_1(P) \leq \frac{1}{\sqrt{10}}N_2(P)$ pour tout polynôme P de E_3.
On ne peut pas faire mieux car il y a égalité pour $P = X(X-1)$.
$\pi^2 \simeq 9,87$ donc $10 > \pi^2$ et par conséquent :
$\forall P \in E_3\ N_1(P) \leq \frac{1}{\pi}N_2(P)$

6. Soit $f \in E$.
$\forall x \in [0;1]\ f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$
Par application de Cauchy-Schwarz :
$\forall x \in [0;1]\ f(x)^2 \leq \left(\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right) = x\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = N_2(f)^2$
On en déduit :
$N_1(f)^2 = \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 N_2(f)^2\,\mathrm{d}x = N_2(f)^2$

7. D'après la question précédente, $M_n = 1$ convient.
On peut également dire que E_n étant de dimension finie, toutes les normes sur E_n sont équivalentes.
On peut faire mieux :
$\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\ f(x)^2 \leq x\int_0^{1/2} f'(t)^2$
Donc :
$\int_0^{1/2} f(x)^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{8}\int_0^{1/2} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$
$\forall x \in [0;1]\ -f(x) = f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$
Par application de Cauchy-Schwarz :
$\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right]\ f(x)^2 \leq (1-x)\int_x^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leq (1-x)\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$
Donc :
$\int_{1/2}^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_{1/2}^1 (1-x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{8}\int_{1/2}^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$
On en déduit :
$\forall P \in E_n\ \|P\|_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{4}N_2(P)$
mais $\frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{\pi}$
Pour aller plus loin :

Exercice 1 *(Centrale 2015, planche complète)*

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
On pose $I_1 = \int_0^1 f(x)f'(x)\,\mathrm{cotan}\,(\pi x)\,\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_0^1 f^2(x)\left(1 + \mathrm{cotan}^2\,(\pi x)\right)\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I_1 et I_2 sont définies et trouver une relation entre I_1 et I_2.

(b) Montrer que $\pi^2\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Correction

(a)
- I_1 converge.

  Soit $g \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x) \end{cases}$.

  cotan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi[$ donc g est continue sur $]0;1[$.

  $\forall x \in]0;1[\ g(x) = \dfrac{f'(x)}{\pi}\dfrac{f(x)}{x}\pi x \operatorname{cotan}(\pi x) = \dfrac{f'(x)\cos(\pi x)}{\pi}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)}$

  On en déduit $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{f'(0)^2}{\pi}$.

  Pour étudier g au voisinage de 1, on pose $x = 1-h$.

  $\operatorname{cotan}(\pi x) = \operatorname{cotan}(\pi - \pi h) = -\operatorname{cotan}(\pi h)$.

  $g(x) = \dfrac{f'(1-h)\cos(\pi h)}{\pi}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{1-h-1}\dfrac{\pi h}{\sin(\pi h)}$

  On en déduit $g(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{f'(1)^2}{\pi}$.

  g est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$ donc g est intégrable sur $]0;1[$ et I_1 converge absolument donc converge.

- I_2 converge.

  Soit $h \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f^2(x)\left(1+\operatorname{cotan}^2(\pi x)\right) \end{cases}$.

  $h(x) = f^2(x) + \left(f(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\right)^2$.

  En reprenant les calculs précédents, on voit que h est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$.

- Relation entre I_1 et I_2.

  Soient $u \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f^2(x)}{2} \end{cases}$ et $v \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{cotan}(\pi x) \end{cases}$.

  u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$.

  $u(x)v(x) = \dfrac{f(x)}{2}f(x)\operatorname{cotan}(\pi x) \xrightarrow[x\to 0 \text{ ou } 1]{} 0$ en reprenant les calculs précédents.

  L'IPP est justifiée et donne :

  $I_1 = \dfrac{\pi}{2} I_2$.

(b) Soit $\phi \begin{cases}]0;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)\operatorname{cotan}(\pi x) \end{cases}$.

ϕ est prolongeable en une fonction continue sur $[0;1]$.

$$\int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 \phi(x)f'(x)dx\right)^2 = I_1^2$$

Mais $I_1^2 = \dfrac{\pi^2}{4} I_2^2 = \dfrac{\pi^2}{4}\left(\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

Donc : $\displaystyle\int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$.

Mais :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

Donc :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x+y)^2 = 4xy + (x-y)^2 \geq 4xy$.

On en déduit :

$$\int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\,4\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi^2\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \times$$

$\int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x$

Si $\int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x > 0$, on en déduit l'inégalité voulue.
Si $\int_0^1 \phi^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors :
$\forall x \in]0;1[\ f(x)\,\mathrm{cotan}\,(\pi x) = 0$.
D'où :
$\forall x \in]0;1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}\ f(x) = 0$
et par continuité f est la fonction nulle.
L'inégalité de l'énoncé est alors triviale.

Planche 7 *(Alexandre)*

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la même loi sur $\{-1;1\}$ définie par $P(Z_n = 1) = p$.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + Z_n$.

1. Prouver l'existence et déterminer la valeur de l'espérance et de la variance de Z_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{X_n - a + n}{2}$ suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Trouver l'espérance et la variance de X_n.
4. Ecrire une fonction Python prenant en entrée a, p et n et renvoyant X_n.
   Indication : utiliser `rd.binomial`
   Ecrire une fonction Python calculant 10000 réalisations de X_n et prenant la fréquence de l'évènement "$X_n \leq 0$" comme estimation de $P(X_n \leq 0)$.
5. Tracer tous les couples $(n, P(X_n \leq 0))$ pour $n \in \{0;50;100;150;200;250;300\}$ avec $a = 3$ et $p \in \{0,35;0,45;0,55;0,65\}$.
   Faire une conjecture.
6. On suppose dans cette question que $p > \frac{1}{2}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n \leq 0) \leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)\right)$.
   Prouver votre conjecture.
7. On suppose dans cette question que $p < \frac{1}{2}$.
   Montrer que pour tout n assez grand , $P(X_n > 0) \leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq |E(X_n)|\right)$.
   Prouver votre conjecture.
8. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.
   Prouver votre conjecture.

Correction

1. $Z_n^2 = 1$ donc Z_n^2 a une espérance ie Z_n a une variance. D'après le cours, Z_n a une espérance.
   Par le théorème de transfert, $E(Z_n) = -P(Z_n = -1) + P(Z_n = 1) = -(1-p) + p = 2p - 1$.
   $V(Z_n) = E(Z_n^2) - E(Z_n)^2 = 1 - (2p-1)^2 = (1 - (2p-1))(1 + 2p - 1) = 4p(1-p)$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \dfrac{1+Z_n}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Les variables Z_n étant mutuellement indépendantes, les variables aléatoires Y_n le sont aussi donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_k \sim \mathcal{B}(n+1,p)$.
$X_{n+1} - X_n = Z_n$ donc $X_n - X_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$
On en déduit $X_n - a = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(2Y_n - 1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} Y_k - n$.
Donc $\dfrac{X_n - a + n}{2} \sim \mathcal{B}(n,p)$.
3. D'après la question précédente, $\dfrac{E(X_n) - a + n}{2} = np$ et $E(X_n) = a + (2p-1)n$.
De plus $\dfrac{1}{4}V(X_n) = np(1-p)$ donc $V(X_n) = 4np(1-p)$
4.
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd


def Xn(a,p,n):
    Y=rd.binomial(n,p)
    return 2*Y+a-n

def estime(a,p,n):
    c=0
    N=10**4
    for i in range(N):
        z=Xn(a,p,n)
        if z<=0:
            c+=1
    return(c/N)

les_n=[0,50,100,150,200,250,300]
a=3
p=0.35
les_P=[estime(a,p,n) for n in les_n]
plt.plot(les_n,les_P)
```
5. On conjecture $P(X_n \leq 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } p > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \text{ si } p = \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$
6. $a \in \mathbb{N}^*$ et $2p - 1 > 0$ donc :
$\forall n \in \mathbb{N}\ E(X_n) > 0$
Par conséquent si $X_n \leq 0$, $|X_n - E(X_n)| = E(X_n) - X_n \geq E(X_n)$.
D'où $P(X_n \leq 0) \leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq E(X_n)\right)$.
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, on en déduit :

$P(X_n \leq 0) \leq \dfrac{V(X_n)}{E(X_n)^2} = \dfrac{4np(1-p)}{(a+(2p-1)n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
D'où le résultat.

7. $E(X_n) = a + (2p-1)n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc à partir d'un certain rang n_0, l'espérance de X_n est négative.
Si $n \geq n_0$ et $X_n > 0$ alors $|X_n - E(X_n)| = X_n - E(X_n) \geq -E(X_n) = |E(X_n)|$
Donc :
$\forall n \geq n_0\ P(X_n > 0) \leq P\left(|X_n - E(X_n)| \geq |E(X_n)|\right)$
puis par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :
$P(X_n > 0) \leq \dfrac{V(X_n)}{E(X_n)^2} = \dfrac{4np(1-p)}{(a+(2p-1)n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Donc $P(X_n > 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $P(X_n \leq 0) = 1 - P(X_n > 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

8. La méthode précédente ne marche plus car l'espérance de X_n est constante et son carré ne tend plus vers l'infini.
$Y_n = \dfrac{X_n - a + n}{2} \sim \mathcal{B}(n,p)$

$$\begin{aligned}
P(X_{2n} > a) &= P(2Y_{2n} + a - 2n > a) = P\left(Y_{2n} > n\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\binom{2n}{k} + \binom{2n}{k} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\binom{2n}{k} + \binom{2n}{2n-k} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \left(2^{2n} - \binom{2n}{n} \right)
\end{aligned}$$

Avec Stirling :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n! \times n!} \\
&\sim \frac{2\sqrt{\pi n}\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

On en déduit que $P(X_{2n} > a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
P(X_{2n+1} > a) &= P(2Y_{2n+1} + a - 2n - 1 > a) = P\left(Y_{2n+1} > n + \frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left(\binom{2n+1}{k} + \binom{2n+1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \left(\binom{2n+1}{k} + \binom{2n+1}{2n+1-k}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \left(\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \times 2^{2n+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $P(X_n > a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
P(X_n > 0) &= \sum_{k=1}^{a} P(X_n = k) + P(X_n > a) \\
&= \sum_{k=1}^{a} P\left(Y_n = \frac{n-a+k}{2}\right) + P(X_n > a) \\
&= \sum_{l=0}^{a-1} P\left(Y_n = \frac{n-l}{2}\right) + P(X_n > a) \quad l = a - k
\end{aligned}$$

Si $n - l$ est impair alors $P\left(Y_n = \dfrac{n-l}{2}\right) = 0$

Si $n - l$ est pair alors $P\left(Y_n = \dfrac{n-l}{2}\right) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$ où k est un entier inférieur à $\dfrac{n}{2}$.

Mais $\dfrac{\dbinom{n}{k+1}}{\dbinom{n}{k}} = \dfrac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \dfrac{n-k}{k+1}$ et $n - k - (k+1) = n - 1 - 2k$ donc si $k \leq \dfrac{n-1}{2}$ alors $\dbinom{n}{k+1} \geq \dbinom{n}{k}$

Si $n = 2m$ est pair :

Si $0 \leq k \leq m - 1$ alors $\dbinom{n}{k} \leq \dbinom{2m}{m}$

D'où :

$0 \leq \displaystyle\sum_{l=0}^{a-1} P\left(Y_n = \frac{n-l}{2}\right) \leq \frac{a}{2^{2m}}\binom{2m}{m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ avec Stirling comme vu ci-dessus.

Si $n = 2m + 1$ est pair :

Si $0 \leq k \leq m$ alors $\dbinom{n}{k} \leq \dbinom{2m+1}{m+1} = \dbinom{2m+1}{m}$

D'où :

$0 \leq \displaystyle\sum_{l=0}^{a-1} P\left(Y_n = \frac{n-l}{2}\right) \leq \frac{a}{2^{2m+1}}\binom{2m+1}{m} = \frac{a}{2^{2m+1}}\frac{2m+1}{m+1}\binom{2m}{m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

Donc dans les deux cas : $\sum_{l=0}^{a-1} P\left(Y_n = \frac{n-l}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On en déduit $P(X_n > 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ puis $P(X_n \leq 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$

Planche 8 *(Théo Pollier)*

Pour tout $x \in [0,1[$, on pose $t_n(x) = \lfloor 3^n x\rfloor - 3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor$.
Soit $T = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \in [\![0;2]\!]\}$.
Soit $\sigma : (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}$.

1. Montrer que σ est définie sur T.
2. Montrer :
   $\forall x \in [0;1[\ (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$
3. Avec Python, tracer sur $[0;0,99]$ la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{t_n(x)}{3^n}$ pour $N = 100$ et faire une conjecture.
4. Soit $x \in [0;1[$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{\lfloor 3^n x\rfloor}{3^n}$ et $y_n = x_n + \frac{1}{3^n}$.
   Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   Prouver la conjecture de la question 3.
5. On suppose disposer d'une famille $(T_{n,N})_{(n,N)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que :
   - $\forall (n,N) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ T_{n,N}(\Omega) = [\![0;2]\!]$
   - $\forall (n,N) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\ P(T_{n,N} = 0) = P(T_{n,N} = 1) = \frac{1}{N}$

   Pour tout $N \geq 2$, on pose $X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}$.
   Ecrire un programme Python qui calcule X_N.
6. Montrer que X_N admet un moment d'ordre 2.
7. Calcul de $E(X_N)$ et de $V(X_N)$.
8. Avec Python :
   On prend $N = 1000$ et $\epsilon = 0.01$.
   Calculer X_N, $M = 10^4$ fois, compter le nombre de fois où $|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon$ et diviser par M.
   Faire une conjecture.
9. Prouver votre conjecture.

Correction

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 0 \leq \frac{u_n}{3^n} \leq \frac{2}{3^n}$
   et la série géométrique de terme général $\frac{2}{3^n}$ converge.
   On en déduit que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ converge et :
   $0 \leq \sigma\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$

2. Soit $x \in [0;1[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $a = \lfloor 3^{n-1}x \rfloor \in \mathbb{N}$.
$a \leq 3^{n-1}x < a+1$ qu'on multiplie par 3 :
$3a \leq 3^n x < 3a+3$
Donc s'agissant d'entiers n peut écrire :
$3a \leq \lfloor 3^n x \rfloor \leq 3a+2$
ou encore :
$0 \leq t_n(x) \leq 2$
$t_n(x)$ étant un entier, $t_n(x) \in [\![0;2]\!]$.

3.
```
from matplotlib import pyplot as pypl
from math import floor

def t(n,x):
    return floor(3**n*x)-3*floor(3**(n-1)*x)

les_x=[i/100 for i in range(100)]
N=100
les_t=[sum(t(n,x)/3**n for n in range(N+1)) for x in les_x]
pypl.plot(les_x,les_t)
```
On conjecture :
$\forall x \in [0;1[\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x$

4.
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_{n+1} - x_n &= \frac{\lfloor 3^{n+1}x \rfloor}{3^{n+1}} - \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \left(\lfloor 3^{n+1}x \rfloor - 3\lfloor 3^n x \rfloor \right) \\
&= \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} \geq 0 \\
y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} + \frac{1}{3^{n+1}} - x_n - \frac{1}{3^n} = x_{n+1} - x_n - \frac{2}{3^{n+1}} \\
&= \frac{t_{n+1}(x) - 2}{3^{n+1}} \leq 0
\end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
De plus $y_n - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
Elles convergent donc vers une même limite $l(x)$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \lfloor 3^n x \rfloor \leq x < \lfloor 3^n x \rfloor + 1$
Donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ x_n \leq x < x_n + \dfrac{1}{3^n} = y_n$
En passant à la limite, on a $l(x) \leq x \leq l(x)$ donc $l(x) = x$.

Mais :

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)+x_1=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{t_{k+1}(x)}{3^{k+1}}+\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{t_k(x)}{3^k}+\frac{\lfloor 3x\rfloor}{3}-\lfloor x\rfloor \text{ car } \lfloor x\rfloor=0\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{t_k(x)}{3^k}+\frac{t_1(x)}{3}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{t_k(x)}{3^k}
\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t_n(x)}{3^n}$

5.
```
import numpy.random as rd

def T(N):
    x=rd.random()
    if x<1/N:
        return 0
    elif x<2/N:
        return 1
    else:
        return 2

def X(N):
    return sum(T(N)/3**n for n in range(1,N+1))
```

6. Les variables aléatoires $T_{n,N}$ qui ne prennent que trois valeurs ont un moment d'ordre 2.
$E(T_{n,N})=\dfrac{1}{N}\times 0+\dfrac{1}{N}\times 1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)\times 2=2-\dfrac{3}{N}$
$E(T_{n,N}^2)=\dfrac{1}{N}\times 0+\dfrac{1}{N}\times 1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)\times 4=4-\dfrac{7}{N}$
$V(T_{n,N})=4-\dfrac{7}{N}-\left(2-\dfrac{3}{N}\right)^2=\dfrac{5}{N}-\dfrac{9}{N^2}$
Par linéarité, X_N a un moment d'ordre 2.

7.

$$\begin{aligned}
E(X_N) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3^n}E(T_{n,N}) \text{ par linéarité}\\
&= \left(2-\frac{3}{N}\right)\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3^n}=\left(2-\frac{3}{N}\right)\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N}{1-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Donc $E(X_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.

$$\begin{aligned} V(X_N) &= \sum_{n=1}^{N} V\left(\frac{1}{3^n}T_{n,N}\right) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{9^n}V(T_{n,N}) \\ &= \left(\frac{5}{N}-\frac{9}{N^2}\right)\frac{1}{9}\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^N}{1-\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

Donc $V(X_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

8.
```
N=10**4
epsilon=10**(-2)
M=10**3
c=0
E=(2/3-1/N)*(1-(1/3)**N)/(1-1/3)
for i in range(M):
    if abs(X(N)-E)>=epsilon:
        c+=1
print(c/M)
```
   On conjecture :
   $\forall \epsilon > 0 \; P\left(|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$
9. Par Bienaymé-Tchebychev :
   $\forall \epsilon > 0 \; \forall N \geq 2 \; P\left(|X_N - E(X_N)| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{V(X_N)}{\epsilon^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

   Remarque
   La suite naturelle de l'exercice consiste à montrer que :
   $\forall \epsilon > 0 \; P\left(|X_N - 1| \geq \epsilon\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
   Soit $\epsilon > 0$.
   $E(X_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ donc :
   $\exists N_0 \geq 2$ tq $\forall N \geq N_0 \; |E(X_N) - 1| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$
   Si $|X_N - 1| \geq \epsilon$ alors $|X - E(X_N)| \geq \dfrac{\epsilon}{2}$ donc :
   $P\left(|X_N - 1| \geq \epsilon\right) \leq P\left(|X_N - E(X_N)| \geq \dfrac{\epsilon}{2}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Planche 9 *(Baptiste)*

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   Montrer qu'elle est prolongeable par continuité en 1.
   On note φ la fonction prolongée.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
   On note I_2 sa valeur.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que pour tout $a > -1$, $\displaystyle\int_0^1 x^a \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
   A l'aide du changement de variable $x = t^\beta$, trouver sa valeur.
5. Ecrire la fonction python `Zeta(s)` qui calcule $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^4} \frac{1}{n^s}$.
   Est-ce une bonne approximation de $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$?
6. Calculer une valeur approchée de $\sqrt{6\zeta(2)}$.
   Quelle conjecture peut-on faire ?
7. Ecrire une fonction Python `phi(x)` qui calcule $\varphi(x)$.
   Il restait 5 questions.

Correction

1. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{1-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   Donc la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas.
   Donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

   Si on pose $x = 1 + h$ alors :
   $\dfrac{\ln(x)}{1-x} = \dfrac{\ln(1+h)}{-h} \sim \dfrac{h}{-h} = -1$
   On en déduit : $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right)^2 \xrightarrow[x\neq 1]{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{1}}(-1)^2 = 1$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right)^2$ est donc prolongeable par continuité en 1 en posant $\varphi(1) = 1$.
2. φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   En 0, $\varphi(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$.
   Donc $x^{3/4}\varphi(x) \sim x^{1/4}\ln^2(x) \to 0$ ie $\varphi(x) = o_0\left(\dfrac{1}{x^{3/4}}\right)$.
   On en déduit que φ est intégrable en 0.
   En $+\infty$, $\varphi(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{x^2\sqrt{x}}$.
   Donc $x^{3/2}\varphi(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{x} \to 0$ ie $\varphi(x) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.
   On en déduit que φ est intégrable en $+\infty$.
   Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ie $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
   On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

3. Il est mentionné dans le programme sue la fonction ln est intégrable sur $]0;1]$.
Si on ne connaît pas par coeur une primitive de la fonction ln, on fait une intégration par parties.
$u(x) = \ln(x)$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$
$v'(x) = 1$, $v(x) = x$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc l'IPP est justifiée.
Comme de plus $u(1)v(1) = 0$:
$\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{d}x = -1$
$\sqrt{x}\ln^2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc la fonction $\ln^2$ est intégrable sur $]0;1]$.
On procède de nouveau à une intégration par parties.
$u(x) = \ln^2(x)$, $u'(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x}$
$v'(x) = 1$, $v(x) = x$
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $u(x)v(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc l'IPP est justifiée.
Comme de plus $u(1)v(1) = 0$:
$\displaystyle\int_0^1 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 x\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = 2$
4. Soit $a > -1$.
La fonction $x \mapsto x^a\ln^2(x)$ est continue sur $]0;1]$.
Soit $b \in]-1;a[$.
$x^{-b} \times x^a\ln^2(x) = x^{a-b}\ln^2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ car $a - b > 0$
On en déduit $x^a\ln^2(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{-b}}\right)$.
Mais $b > -1$ donc $-b < 1$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-b}}$ est intégrable en 0.
On en déduit que la fonction $x \mapsto x^a\ln^2(x)$ est intégrable sur $]0;1]$.
Supposons $\beta > 0$.
On effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = t^\beta$:
$\displaystyle\int_0^1 x^a\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t^{a\beta}\beta^2\ln^2(t)\beta t^{\beta-1}\,\mathrm{d}t = \beta^3\int_0^1 t^{(a+1)\beta-1}\ln^2(t)\,\mathrm{d}t$
En prenant $\beta = \dfrac{1}{a+1} > 0$, on obtient :
$$\int_0^1 x^a\ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(a+1)^3}$$
5.
```
def zeta(s):
    return sum(n**(-s) for n in range(1,1+10**4))
```
Une comparaison série-intégrale classique donne :
$\displaystyle 0 \leq \zeta(s) - \sum_{n=1}^{10^4}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=10^4+1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \leq \int_{10^4}^{+\infty} x^{-s}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_{10^4}^{+\infty} = \frac{1}{(s-1)10^{4(s-1)}}$
Ce qui donne une erreur majorée par 10^{-4} si $s = 2$.
6.
```
from math import sqrt

print(sqrt(6*zeta(2)))
3.1414971639472147
```

On conjecture $\sqrt{6\zeta(2)} = \pi$ ie $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

7.
```
import numpy as np

def phi(x):
    return 1/np.sqrt(x)*(np.log(x)/(x-1))**2
```

Planche 10 *(Paul)*

Pour toutes les fonctions Python, on utilisera `from maths import *`.

1. On considère la fonction $\Theta \begin{cases} [0;+\infty[^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \arctan(x) - \arctan(y) - \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right) \end{cases}$.
   (a) Montrer que Θ est constante.
   (b) En déduire la relation :
   $\forall (x,y) \in [0;+\infty[^2 \ \arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$
2. On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :
   $\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} F_n x^n$.
   (b) Montrer :
   $\forall x \in]-R;R[\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$
3. On définit les suites (a_k) et (b_k) par :
   $\forall k \in \mathbb{N}\ a_k = \dfrac{1}{F_{2^k}}$ et $b_k = \arctan\left(\dfrac{1}{F_{2k+1}}\right)$.
   Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} b_k$ convergent.
   On notera $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $b = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.
4. Compléter la fonction suivante calculant les F_n.
```
def fibo(n):
    f0,f1=0,1
    for i in range(n):
        f0,f1=...,...
    return ...
```
5. (a) Calculer avec Python $\left(2\displaystyle\sum_{k=0}^{14} a_k - 7\right)^2$ et faire une conjecture.
   (b) Montrer la relation :
   $\dfrac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}} = \dfrac{1}{1-x^{2^k}} - \dfrac{1}{1-x^{2^{k+1}}}$ En déduire la valeur de a et valider la conjecture.
6. (a) Calculer avec Python $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{40} b_k$ et faire une conjecture.
   Pour la fonction arctan, on utilisera `atan`.

(b) Montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}\ F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = 1$

(c) Prouver votre conjecture en utilisant la première question de l'exercice.

Correction

1. (a) $D = \mathbb{R}_+ * \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.
Les fonctions $(x, y) \in D \mapsto x - y$ et $(x, y) \in D \mapsto 1 + xy$ sont $\mathcal{C}^1$ car polynômiales et la seconde ne s'annule pas donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \dfrac{x-y}{1+xy}$ est $\mathcal{C}^1$.
On la compose avec arctan qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D.
La fonction $(x, y) \in D \mapsto x$ est $\mathcal{C}^1$ car polynômiale.On la compose avec arctan qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \arctan(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D.
La fonction $(x, y) \in D \mapsto y$ est $\mathcal{C}^1$ car polynômiale.On la compose avec arctan qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $(x, y) \in D \mapsto \arctan(y)$ est $\mathcal{C}^1$ sur D.
Par combinaison linéaire, Θ est $\mathcal{C}^1$ sur D.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in D\ \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+xy-y(x-y)}{(1+xy)^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+2xy+x^2y^2+x^2-2xy+y^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y)^2} \\
&= 0 \\
\forall (x,y) \in D\ \Theta(x,y) &= -\Theta(y,x) \text{ qu'on dérive par rapport à } y \\
\forall (x,y) \in D\ \frac{\partial \Theta}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial \Theta}{\partial x}(y,x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc Θ est constante sur D.

(b) Un raisonnement similaire à celui du début de la question montre que Θ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
Donc Θ est constante sur $[0; +\infty[^2$ et :
$\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2\ \Theta(x, y) = \Theta(0, 0) = 0$

2. (a) L'équation caractéristique de la relation de récurrence $r^2 = r+1$ a deux racines réelles $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
Par conséquent, il existe deux réels a_1 et a_2 tels que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ F_n = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$
Les conditions initiales donnent $\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 r_1 + a_2 r_2 = 1 \end{cases}$ ce qui conduit à $a_1 = \dfrac{1}{r_1 - r_2}$ et

$a_2 = \dfrac{1}{r_2 - r_1}$
$|r_1| < |r_2|$ donc $F_n \sim a_2 r_2^n$ et :
$R = R_{CV}\left(\sum_{n\geq 0} a_2 r_2^n\right) = \dfrac{1}{r_2} = -r_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(b)

$$\begin{aligned}\forall x \in]-R;R[\ \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n x^n = x + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} = x + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (F_n + F_{n+1}) x^n \\ &= x + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+1} \\ &= x + x^2 F(x) + x(F(x) - F_0) = x + (x^2 + x) F(x)\end{aligned}$$

Donc :
$\forall x \in]-R;R[\ (1-x-x^2)F(x) = x$
D'où le résultat.
En effet $1 - X - X^2 = X^2\left(\left(\dfrac{1}{X}\right)^2 - \dfrac{1}{X} - 1\right)$ a pour racines $\dfrac{1}{r_2} = R$ et $\dfrac{1}{r_1} < -R$

3. $\forall n \in \mathbb{N}\ F_n = \dfrac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$ avec $|r_1| < |r_2|$.
   On en déduit $F_n \sim \dfrac{r_2^n}{r_2 - r_1}$.
   $\forall k \in \mathbb{N}\ a_k > 0$
   $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \sim r_2^{-2^{k+1}+2^k} = r_2^{-2^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1$
   D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général a_k converge.
   $\forall k \in \mathbb{N}\ b_k > 0$
   $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} \sim r_2^{2k+1-(2k+3)} = r_2^{-2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} r_2^{-2} < 1$
   D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général b_k converge.

4.
```
def fibo(n):
    f0,f1=0,1
    for i in range(n):
        f0,f1=f1,f0+f1
    return f0
```

5. (a)
```
a=sum(1/fibo(2**k) for k in range(15))
print((2*a-7)**2)
5.000000000000001
```
   On conjecture $(2a-7)^2 = 5$ donc $a = \dfrac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$.
   Avec Python, on voit que $2a - 7 < 0$ donc $a = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$.

   (b) Les deux expressions sont bien définies pour x réel différent de 1 et de -1.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^{2^k}} - \frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} &= \frac{1 - x^{2^{k+1}} - 1 + x^{2^k}}{\left(1-x^{2^k}\right)\left(1-x^{2^{k+1}}\right)} = \frac{x^{2^k}\left(1-x^{2^k}\right)}{\left(1-x^{2^k}\right)\left(1-x^{2^{k+1}}\right)} \\ &= \frac{x^{2^k}}{1-x^{2^{k+1}}}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{r_2 - r_1}{r_2^{2^k} - r_1^{2^k}} = \frac{r_2 - r_1}{r_2^{2^k}} \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2^k}} \\
&= \sqrt{5} \frac{(-1)^{2^k} r_1^{2^k}}{1 - (-r_1^2)^{2^k}} \text{ car } r_1 r_2 = -1 \\
\forall k \in \mathbb{N}^*\ \frac{1}{F_{2^k}} &= \sqrt{5} \frac{r_1^{2^k}}{1 - r_1^{2^{k+1}}} \\
&= \sqrt{5} \left(\frac{1}{1 - r_1^{2^k}} - \frac{1}{1 - r_1^{2^{k+1}}} \right)
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sqrt{5} \left(\frac{1}{1 - r_1^2} - 1 \right) = \sqrt{5} \frac{r_1^2}{1 - r_1^2} = \sqrt{5} \frac{r_1^2}{1 - r_1 - 1} = -r_1 \sqrt{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$
Et finalement :
$\displaystyle a = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$

6. (a)
```
b=sum(atan(1/fibo(2*k+1)) for k in range(41))
print(2*b/pi)
0.9999999999999997
```
On conjecture $b = \dfrac{\pi}{2}$.

(b)

$$\begin{aligned}
& \forall n \in \mathbb{N}\ F_{2n+1}^2 - F_{2n} F_{2n+2} \\
= & \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \left(\left(r_2^{2n+1} - r_1^{2n+1} \right)^2 - \left(r_2^{2n} - r_1^{2n} \right) \left(r_2^{2n+2} - r_1^{2n+2} \right) \right) \\
= & \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \left(r_2^{4n+2} + r_1^{4n+2} - 2(r_1 r_2)^{2n+1} - r_2^{4n+2} - r_1^{4n+2} + (r_1 r_2)^{2n} (r_1^2 + r_2^2) \right) \\
= & \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} (r_1 r_2)^{2n} \left(r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \right) = (r_1 r_2)^{2n} = (-1)^{2n} \\
= & 1
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}\ \frac{1}{F_{2k+1}} &= \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+1}^2} = \frac{F_{2k+2} - F_{2k}}{1 + F_{2k} F_{2k+2}} \\
b_k &= \arctan F_{2k+2} - \arctan F_{2k}
\end{aligned}$$

On en déduit :
$\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{k=0}^{n} b_k = \arctan(F_{2n+2}) - \arctan(F_0) = \arctan(F_{2n+2}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$

Planche 11

Soit $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi uniforme sur $\{-1; 1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \epsilon_k$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier l'existence et donner une expression simplifiée de l'espérance et de la variance de X_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2$.
   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On notera S sa limite.
3. Montrer :
   $\forall a > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ P(X_n \geq a) \leq \frac{S_n}{a^2} \leq \frac{S}{a^2}$
4. On donnait

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_vect(n):
    L=rd.binomial(1,0.5,n)
    for i in range(n):
        L[i]=2*L[i]-1
    X=[0]
    for i in range(2,n+1):
        X.append(X[-1]+L[i-1]*np.log(i)/i)
    return X
```

   qui permet de simuler $(X_1, \ldots, X_n)$.
   Ecrire une fonction `estim(a,n)` permettant d'estimer la valeur de $P(M_n \geq a)$. On effectuera 10000 simulations.
   Faire une conjecture sur le signe de $P(M_n \geq a) - \frac{S_n}{a^2}$ en prenant $n \in \{20; 30; 50\}$ et $a \in \{2; 3; 4\}$.
5. Exprimer l'évènement $(M_n \geq a)$ au moyen des A_k définis par :
   $A_1 =?$
   $\forall k \geq 2\ A_k = (X_k \geq a) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i < a)\right)$

Correction

1. Les variables aléatoires ϵ_k ne prenant que deux valeurs ont une espérance et une variance.
   $\forall k \in \mathbb{N}\ E(\epsilon_k) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = 0$
   $\forall k \in \mathbb{N}\ E(\epsilon_k^2) = E(1) = 1$
   $\forall k \in \mathbb{N}\ V(\epsilon_k) = E(\epsilon_k^2) - E(\epsilon_k)^2 = 1$
   X_n est une combinaison linéaire d'un nombre fini de ces variables donc X_n a une espérance et une variance.
   Par linéarité :
   $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} E(\epsilon_k) = 0$
   Par indépendance :
   $V(X_n) = \sum_{k=1}^{n} V\left(\frac{\ln(k)}{k}\epsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2 V(\epsilon_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln(k)}{k}\right)^2$
2. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$.

$n^{3/2}\frac{\ln^2(n)}{n^2} = \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ie $\frac{\ln^2(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Mais $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série à termes positifs convergente donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^2(n)}{n^2}$ converge.

3. Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $X_n > a$ alors $|X_n - E(X_n)| = |X_n| \geq a$.
   Donc par croissance des probabilités et Bienaymé-Chebyshev :
   $P(X_n > a) \leq \frac{V(X_n)}{a^2} = \frac{S_n}{a^2} \leq \frac{S}{a^2}$
4.
```
def estim(a,n):
    N=10**4
    c=0
    for i in range(N):
        X=simul_X_vect(n)
        M=max(X)
        if M>=a:
            c+=1
    return c/N

def S(n):
    return sum((np.log(k)/k)**2 for k in range(1,n+1))

for a in [2,3,4]:
    for n in [20,30,50]:
        print('n=',n,'a=',a,'P(M_n>=a)',estim(a,n),'S_n/a**2',S(n)/a**2)
```

```
n= 20 a= 2 P(M_n>=a) 0.0503 S_n/a**2 0.28801997671136814
n= 30 a= 2 P(M_n>=a) 0.0695 S_n/a**2 0.3291596569710886
n= 50 a= 2 P(M_n>=a) 0.0893 S_n/a**2 0.37244160764690276
n= 20 a= 3 P(M_n>=a) 0.0042 S_n/a**2 0.12800887853838583
n= 30 a= 3 P(M_n>=a) 0.006 S_n/a**2 0.14629318087603937
n= 50 a= 3 P(M_n>=a) 0.0114 S_n/a**2 0.16552960339862344
n= 20 a= 4 P(M_n>=a) 0.0 S_n/a**2 0.07200499417784204
n= 30 a= 4 P(M_n>=a) 0.0001 S_n/a**2 0.08228991424277216
n= 50 a= 4 P(M_n>=a) 0.0005 S_n/a**2 0.09311040191172569
```

   On conjecture : $P(M_n \geq a) \leq \frac{S_n}{a^2}$
5. Si on définit A_1 par $(X_1 \geq a)$, $(M \geq a)$ est la réunion des évènements $A_1, \ldots, A_k$ qui sont deux à deux disjoints.
   Donc $P(M_n \geq a) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

Planche 12 *(Damien)*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ X_l=\begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{l\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\dfrac{nl\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$$

$$T_p=\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{pk\pi}{n+1}\right),\ S_{p,q}=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{kq\pi}{n+1}\right)$$

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$
2. Justifier la diagonalisabilité de A. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?
3. Ecrire une fonction Python `A(n)` qui renvoie la matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Ecrire une fonction Python `P(n)` qui renvoie la matrice dont la l-ième colonne est X_l.
5. Calculer $P^{-1}AP$ avec Python et conjecturer $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A))$.
   Qu'est $(X_1,\dots,X_n)$ pour A ?
6. En déduire $S_{p,q}$ pour $1\leq p<q\leq n$.
7. Calculer T_p pour $p\in\mathbb{Z}$.
8. Retrouver le résultat de la question 6 et calculer $S_{p,q}$ pour $p=q\in[\![1;n]\!]$.
9. Calculer, sans Python cette fois, $P^{-1}AP$.

Correction

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right) &= \exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)=\exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\right)^k \\
&= \exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\frac{1-\left(\exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\right)^n}{1-\exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)}\ \text{car}\ \exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\neq 1 \\
&= \exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\frac{1-\exp\left(\frac{in\pi}{n+1}\right)}{1-\exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)} \\
&= \exp\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)\frac{\exp\left(\frac{in\pi}{2(n+1)}\right)\left(\exp\left(\frac{-in\pi}{2(n+1)}\right)-\exp\left(\frac{in\pi}{2(n+1)}\right)\right)}{\exp\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\left(\exp\left(\frac{-i\pi}{2(n+1)}\right)-\exp\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right)\right)} \\
&= \exp\left(\frac{i(n+2-1)\pi}{2(n+1)}\right)\frac{-2i\sin\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)} \\
&= i\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)}
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0$

2. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

3. ```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

def A(n):
    M=np.zeros((n,n))
    for i in range(n-1):
        M[i,i+1]=1
        M[i+1,i]=1
    return(M)
```

4. ```
def P(n):
    M=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i,j]=np.sin((i+1)*(j+1)*np.pi/(n+1))
    return(M)
```

5. Le code suivant "montre" que $P^{-1}AP$ est diagonale :

```
for n in range(2,8):
    M=alg.inv(P(n)).dot(A(n)).dot(P(n))
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i!=j:
                s+=M[i,j]**2
    print(s)
```

```
7.703719777548943e-32
1.3576688915426406e-31
1.370125280462812e-31
7.354542239748784e-31
4.0044910333659996e-30
8.159483062740898e-30
```

Le code suivant "montre" que la spectre de A est de cardinal n :

```
for n in range(2,8):
    M=alg.inv(P(n)).dot(A(n)).dot(P(n))
    m=abs(M[1,1]-M[0,0])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if j!=i and abs(M[j,j]-M[i,i])<m:
                m=abs(M[j,j]-M[i,i])
    print(m)
```

```
2.0
1.414213562373095
1.0
0.7320508075688773
0.5549581320873704
0.4335455026494781
```

$P^{-1}AP$ est diagonale donc $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

6. Les valeurs propres de A étant toutes simples, si $p \neq q$ alors X_p et X_q ne sont pas associés à la même valeur propre.
   A étant symétrique réelle, X_p et X_q sont orthogonaux et $S_{p,q} = 0$.
7. Si p est de la forme $2(n+1)l$ alors $T_n = n$.
   On suppose désormais que p n'est pas de la forme $2(n+1)l$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{ikp\pi}{n+1}\right) &= \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{ikp\pi}{n+1}\right) = \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\right)^k \\
&= \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\frac{1-\left(\exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\right)^n}{1-\exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)} \text{ car } \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right) \neq 1 \\
&= \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\frac{1-\exp\left(\frac{inp\pi}{n+1}\right)}{1-\exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)} \\
&= \exp\left(\frac{ip\pi}{n+1}\right)\frac{\exp\left(\frac{inp\pi}{2(n+1)}\right)\left(\exp\left(\frac{-inp\pi}{2(n+1)}\right)-\exp\left(\frac{inp\pi}{2(n+1)}\right)\right)}{\exp\left(\frac{ip\pi}{2(n+1)}\right)\left(\exp\left(\frac{-ip\pi}{2(n+1)}\right)-\exp\left(\frac{ip\pi}{2(n+1)}\right)\right)} \\
&= \exp\left(\frac{ip(n+2-1)\pi}{2(n+1)}\right)\frac{-2i\sin\left(\frac{np\pi}{2(n+1)}\right)}{-2i\sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)} \\
&= i^p\frac{\sin\left(\frac{np\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)} = i^p\frac{\sin\left(\frac{p\pi}{2}-\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right) = 0$ si p est impair.

Par contre si $p = 2l$ alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right) = (-1)^l\frac{(-1)^{l+1}\sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}{\sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)} = -1$$

8.

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{kq\pi}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(T_{p-q} - T_{p+q}\right) \end{aligned}$$

Si $1 \leq p < q \leq n$ alors $0 < q-p < n$ et $0 < p+q < 2(n+1)$. De plus $p+q$ et $p-q$ o,t la même parité donc $S_{p,q} = 0$.
Si $p = q$ alors $S_{p,q} = \dfrac{n+1}{2}$.

9. Soit $l \in [\![1; n]\!]$.
On pose $x_k = \sin\left(\dfrac{kl\pi}{n+1}\right)$ y compris pour $k = 0$ et $k = n+1$.
Cela permet d'écrire pour $Y = AX_l$:

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1; n]\!]\ y_k &= x_{k+1} + x_{k-1} = 2\sin\left(\frac{(k+1+k-1)l\pi}{2(n+1)}\right)\cos\left(\frac{(k+1-k+1)l\pi}{2(n+1)}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right)x_k \end{aligned}$$

Donc X_l est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_l = 2\cos\left(\dfrac{l\pi}{n+1}\right)$.
cos étant strictement décroissante sur $[0; \pi]$, les λ_l sont deux à deux distincts.
A a au moins n valeurs propres mais ne peut pas en avoir plus donc A a n valeurs propres simples.
On peut également affirmer que $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, ce qui assure l'inversibilité de P.
Enfin, les formules de changement de base donnent $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Pour finir, on peut dire que $\sqrt{\dfrac{2}{n+1}}P$ est une matrice orthogonale.