

ALGEBRE LINEAIRE

2026-2027

Correction

Correction des exercices du premier chapitre du cours

941

Exercice 1 (*X 2019, Ens 2023*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tq $b_0 < b_1 < \dots < b_n$.

Montrer :

$$\exists!(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tq } \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \int_0^1 f(x)P(x) \, dx = \sum_{k=0}^n a_k P(b_k)$$

Correction

Plusieurs méthodes sont possibles.

- **Première méthode : utilisation des polynômes de Lagrange**

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \text{ soit } L_i = \frac{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - b_j)}{\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (b_i - b_j)}.$$

$(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^n P(b_k) L_k$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 f(x)P(x) \, dx = \sum_{k=0}^n P(b_k) \int_0^1 f(x)L_k(x) \, dx$$

D'où l'existence.

Supposons :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 f(x)P(x) \, dx = \sum_{k=0}^n a_k P(b_k)$$

On a :

$$\forall l \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \int_0^1 f(x)L_l(x) \, dx = \sum_{k=0}^n a_k L_l(b_k) = \sum_{k=0}^n a_k \delta_{k,l} = a_l$$

D'où l'unicité.

- **Deuxième méthode**

Soit E l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$. E est un $\mathbb{R}$ -ev de même

dimension que $\mathbb{R}_n[X]$ donc $n + 1$.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ soit $\phi_i \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto P(a_i) \end{cases}$.

Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, ϕ_i appartient à E .

La famille $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est libre : se donner une combinaison linéaire nulle et l'évaluer en $P_i = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - a_j)$.

Au vu de son cardinal, c'est une base de E .

On conclut en remarquant que $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 f(x)P(x) \, dx \end{cases}$ appartient à E .

• **Troisième méthode**

$\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \int_0^1 f(x)P(x) \, dx \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \sum_{k=0}^n a_k P(b_k) \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.

Or, deux applications linéaires de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ sont égales si, et seulement si, elles coïncident sur une base.

Si on prend comme base, $(1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$\begin{aligned} (a_0, \dots, a_n) \text{ convient} &\iff \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \sum_{k=0}^n a_k b_k^i = \int_0^1 x^i f(x) \, dx \\ &\iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \int_0^1 f(x) \, dx \\ a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \int_0^1 x f(x) \, dx \\ \vdots \\ a_0 b_0^n + a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + \dots + a_n b_n^n = \int_0^1 x^n f(x) \, dx \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice du système est la transposée de la matrice de Vandermonde construite avec les nombres $b_0, \dots, b_n$.

Elle est donc inversible. On en déduit que le système a une et une seule solution, ce qui achève l'exercice.

Exercice 2 (*X 2016*)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie ; $x \in E, y \in F$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(x) = y$.

Correction

Si $x \neq 0$, la famille (x) est libre et on la complète (si la dimension n de E est supérieure ou égale à 2) en $(x = e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E .

$\exists! f \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket f(e_i) = y$

En particulier $f(x) = y$.

Si $x = 0$, l'existence de f impose $y = 0$.

Réciproquement, si $y = 0$ toute application linéaire de E dans F (et il en existe toujours au moins une) envoie x sur y .

La CNS cherchée est

$$(x \neq 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y = 0)$$

Remarque

On n'écrit pas $x = y = 0$ car x vit dans E et y dans F .

Exercice 3 (X 2011)

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } u$ si et seulement si $\text{Im } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$.

Correction

$$\text{Im}(v \circ u) = (v \circ u)(E) = v(u(E)) = v(\text{Im } u)$$

La formule du rang appliquée à la restriction de v à $\text{Im } u$ donne :

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u) - \dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } v)$$

On conclut facilement.

Exercice 4

Soit E un ev de dimension finie.

Soient F et N 2 sev de E .

Trouver une CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$$\begin{cases} \text{Ker}(u) = N \\ \text{Im}(u) = F \end{cases}.$$

Correction

Si u existe alors, d'après la formule du rang, $\dim N + \dim F = \dim E$.

Réciproquement, on suppose $\dim N + \dim F = \dim E$.

Si $N = \{0\}$ alors $F = E$ et $u = Id_E$ convient.

Si $N = E$ alors $F = \{0\}$ et $u = 0$ convient.

On suppose désormais $d = \dim N \in \{1; \dots; n-1\}$ (où $n = \dim E$) (ce qui suppose $n \geq 2$).

Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de N .

On la complète en $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .

Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-d})$ une base de F .

$$\exists (!) u \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \begin{cases} \forall i \in \{1; \dots; d\} & u(e_i) = 0 \\ \forall i \in \{d+1; \dots; n\} & u(e_i) = \epsilon_{i-d} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Im } u &= \text{Vect}(u(e_i), 1 \leq i \leq n) \\ &= \text{Vect}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-d}) = F \end{aligned}$$

On a trivialement $N \subset \text{ker } u$.

De plus, d'après la formule du rang :

$$\dim N = \dim E - \dim F = \dim E - \dim \text{Im } u = \dim \text{ker } u$$

donc $\text{ker } u = N$.

Finalement la CNS cherchée est :

$$\boxed{\dim N + \dim F = \dim E}$$

Exercice 5 (*Mines 2019*)

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Soit F un espace vectoriel de dimension p .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang $r < n$.

Quelle est la dimension de $\{g \in \mathcal{L}(F, E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$?

Correction

Même si cela n'est pas demandé, on peut commencer par montrer que $G = \{g \in \mathcal{L}(F, E) \text{ tq } f \circ g = 0\}$ est un espace vectoriel.

Pour cela on montre que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$:

- $G \subset \mathcal{L}(F, E)$: clair
- $0_{\mathcal{L}(F, E)} \begin{cases} F \rightarrow E \\ x \mapsto 0_E \end{cases}$ appartient à G : clair.

En effet f est une application linéaire de E dans F donc $f(0_E) = 0_F$

- G est stable par combinaisons linéaires :

Soit $(g_1, g_2) \in G^2$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}^2$.

$$f \circ (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) = \mu_1 f \circ g_1 + \mu_2 f \circ g_2 = \mu_1 0 + \mu_2 0 = 0$$

Soit $g \in G$.

$f \circ g = 0$ donc :

$$\forall x \in F \quad f(g(x)) = 0$$

Mais lorsque x décrit F , $g(x)$ décrit $\text{Im}(g)$ donc $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

On peut donc définir $\phi_g \begin{cases} F \rightarrow \text{Ker}(f) \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$.

ϕ_g est clairement une application linéaire de F dans $\text{Ker}(f)$, ce qui permet de définir :

$$\phi \begin{cases} G \rightarrow \mathcal{L}(F, \text{Ker}(f)) \\ g \mapsto \phi_g \end{cases}$$

ϕ elle-même est linéaire :

Soit $(g_1, g_2) \in G^2$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in F \quad \phi(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2)(x) &= \phi_{\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2}(x) = (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2)(x) \\ &= \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x) = \mu_1 \phi_{g_1}(x) + \mu_2 \phi_{g_2}(x) \\ &= \mu_1 \phi(g_1)(x) + \mu_2 \phi(g_2)(x) \end{aligned}$$

Donc $\phi(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2) = \mu_1 \phi(g_1) + \mu_2 \phi(g_2)$.

ϕ est injective :

Soit $g \in \text{Ker}(\phi)$.

$$\forall x \in F \quad 0 = \phi(g)(x) = g(x)$$

donc g est nulle.

Comme signalé dans le paragraphe précédent, le raisonnement suivant est faux :

ϕ est une application linéaire injective de G dans $\mathcal{L}(F, \text{Ker}(f))$.

ϕ est un isomorphisme car on est en dimension finie.

En effet, il faudrait pour conclure ainsi que G et $\mathcal{L}(F, \text{Ker}(f))$ soient de même dimension finie, ce qui est précisément ce qu'on cherche à démontrer.

Il faut donc prouver la surjectivité en revenant à la définition.

Soit $h \in \mathcal{L}(F, \text{Ker}(f))$.

Soit $g \begin{cases} F \rightarrow E \\ x \mapsto h(x) \end{cases}$: bien défini car $h(x) \in \text{Ker}(f) \subset E$.

La linéarité de g découle directement de celle de h .

$\forall x \in F (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(h(x)) = 0$ car $h(x) \in \text{Ker}(f)$

Donc $g \in G$.

De plus, on a :

$\forall x \in F \phi(g)(x) = g(x) = h(x)$ ie $\phi(g) = h$ Donc ϕ est surjective.

ϕ est donc un isomorphisme de G sur $\mathcal{L}(F, \text{Ker}(f))$.

On en déduit :

$\dim(G) = \dim(\mathcal{L}(F, \text{Ker}(f))) = \dim(F) \times \dim(\text{Ker}(f))$

Finalement, avec la formule du rang :

$\dim(G) = p(n - r)$.

Une solution matricielle sera vue plus tard.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

Soient F et G deux sev de E .

Donner une CNS portant sur F et G pour que $F \cup G$ soit un sev de E .

Proposer des généralisations de l'exercice.

Correction

La CNS cherchée est $(F \subset G)$ ou $(G \subset F)$.

Cette condition est suffisante :

Si F est inclus dans G alors $F \cup G = G$ est un sev de E .

Si G est inclus dans F alors $F \cup G = F$ est un sev de E .

Cette condition est nécessaire :

On suppose que $F \cup G$ est un sev de E .

On veut montrer que F est inclus dans G ou que G est inclus dans F .

On raisonne par l'absurde ie on suppose que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F .

Par conséquent, il existe $x_F \in F \setminus G$ et $x_G \in G \setminus F$.

x_F et x_G appartiennent à $F \cup G$ sev de E donc $x_F + x_G \in F \cup G$.

Si $x_F + x_G \in F$ alors $x_G = (x_F + x_G \in F) + (-x_F \in F) \in F$: absurde

Si $x_F + x_G \in G$ alors $x_F = (x_F + x_G \in G) + (-x_G \in G) \in G$: absurde

On a bien $(F \subset G)$ ou $(G \subset F)$.

Plus généralement soient $F_1, \dots, F_n$ n sev de E .

Si l'un des F_i , notons le F_{i_0} , contient tous les autres alors $\bigcup_{i=1}^n F_i = F_{i_0}$ est un sev de E .

Réciproquement supposons que $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est un sev de E .

On cherche à montrer que l'un des F_i contient tous les autres.

Si $\bigcup_{i=2}^n F_i \subset F_1$ alors F_1 contient tous les autres et on a terminé.

On suppose donc que $\bigcup_{i=2}^n F_i$ n'est pas inclus dans F_1 .

Si F_1 n'est pas contenu dans $\bigcup_{i=2}^n F_i$ alors :

il existe $x_1 \in F_1 \setminus \bigcup_{i=2}^n F_i$ et $y \in \bigcup_{i=2}^n F_i \setminus F_1$.

x_1 et y appartiennent à $\bigcup_{i=1}^n F_i$ sev de E donc pour tout k compris entre 0 et n , $kx_1 + y \in \bigcup_{i=1}^n F_i$

ie pour tout k compris entre 0 et n , il existe $\sigma(k)$ compris entre 1 et n tel que $kx_1 + y \in F_{\sigma(k)}$.

Il existe k et $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tels que $k \neq l$ et $\sigma(k) = \sigma(l)$.

On a donc $(k-l)x_1 = (kx_1 + y) - (lx_1 + y) \in F_{\sigma(k)}$ car $F_{\sigma(k)}$ est un sous-espace vectoriel de E .
 $k-l \neq 0$ donc $x_1 \in F_{\sigma(k)}$.

Or $x_1 \notin \bigcup_{i=2}^n F_i$ donc $\sigma(k) = 1$.

On a alors $kx_1 + y \in F_1$ donc $y = (kx_1 + y \in F_1) + (-kx_1 \in F_1) \in F_1$: absurde

On a donc $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^n F_i$.

On a alors $\bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=2}^n F_i$

Donc $\bigcup_{i=2}^n F_i$ est un sev de E .

Il faudrait donc reprendre le raisonnement en rédigeant une récurrence sur n mais on a prouvé :

$$\bigcup_{i=1}^n F_i \text{ sev de } E \iff \exists i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tq } \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket F_i \subset F_{i_0}$$

Par contre, la situation change avec un nombre infini de sev :

$\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$ mais il n'existe pas de $\mathbb{K}_{n_0}[X]$ qui contienne tous les autres.