

ALGEBRE LINEAIRE

TD

2026-2027

Chapitre 1

Correction

941

1 Révisions de première année

Exercice 1 (CCP 2022)

1. Montrer :
 $\forall n \in \mathbb{Z} \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$
2. Soit $P = \frac{X(X+1)}{2}$.
On a $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Les coefficients de P sont-ils des entiers relatifs ?
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_k(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-(k-1))}{k!}$.
On pose $H_0(X) = 1$.
Trouver une relation entre $H_k(X+1)$, $H_k(X)$ et $H_{k-1}(X)$.
4. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.
5. Calculer $H_k(n)$ en distinguant différents cas : $k = 0$, $0 \leq n \leq k-1$, $n \geq k$...
En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_k[X]$.
Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si, et seulement si, les coordonnées de P dans la base $(H_0, \dots, H_k)$ sont entières.

Correction

1. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$ et $\frac{n(n+1)}{2} = p(2p+1) \in \mathbb{Z}$.
Si n est impair alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p+1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = (p+1)(2p+1) \in \mathbb{Z}$.
2. $\frac{X(X+1)}{2} = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$ n'est pas à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
3. Soit $k \in \llbracket 2; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
H_k(X+1) - H_k(X) &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{l=0}^{k-1} (X+1-l) - \prod_{l=0}^{k-1} (X-l) \right) \\
&= \frac{1}{k!} \left(\prod_{l=-1}^{k-2} (X-l) - \prod_{l=0}^{k-1} (X-l) \right) \\
&= (X+1 - (X-k+1)) \frac{1}{k!} \left(\prod_{l=0}^{k-2} (X-l) \right) \\
&= \frac{k}{k!} \left(\prod_{l=0}^{k-2} (X-l) \right) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\prod_{l=0}^{k-2} (X-l) \right) \\
&= H_{k-1}(X)
\end{aligned}$$

$$H_1(X+1) - H_1(X) = X+1 - X = 1 = H_0(X)$$

Autre méthode

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \llbracket k; +\infty \rrbracket H_k(n) = \binom{n}{k}$$

La formule du triangle de Pascal donne :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

Donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \geq k \quad H_k(n) + H_{k-1}(n) = H_k(n+1)$$

$\llbracket n; +\infty \rrbracket$ étant infini, on en déduit :

$$H_k(X+1) = H_k(X) + H_{k-1}(X)$$

4. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, H_l est de degré l .

Les polynômes $H_0, \dots, H_k$ sont donc tous dans $\mathbb{R}_k[X]$.

Comme leurs degrés sont deux à deux distincts, la famille $(H_0, \dots, H_k)$ est libre. Comme elle a $k+1 = \dim(\mathbb{R}_k[X])$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

5. $\forall n \in \mathbb{N} \quad H_0(n) = 1$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket H_k(n) = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \llbracket k; +\infty \rrbracket H_k(n) = \binom{n}{k}$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{Z}_- \quad H_k(n) &= \frac{-m(-m-1) \dots (-m-(k-1))}{k!} \text{ avec } m = -n \in \mathbb{N}^* \\
&= (-1)^k \frac{(m+k-1)(m+k-2) \dots m}{k!} = (-1)^k \binom{m+k-1}{m-1}
\end{aligned}$$

Comme dans tous les cas on trouve un entier relatif, $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

6. D'après la question précédente, si les coordonnées de P dans la base $(H_0, \dots, H_k)$ sont entières alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

On montre la réciproque par récurrence sur k .

Soit $P \in \mathbb{C}_0[X]$ tq $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

$$P = c_0 H_0 = c_0.$$

$c_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(k-1)$ vraie.

Soit $P = \sum_{l=0}^k c_l H_l \in \mathbb{C}_k[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{l=1}^k c_l H_{l-1}(X) = \sum_{l=0}^{k-1} c_{l+1} H_l$$

$P(X+1) - P(X)$ est également à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\forall l \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad c_l \in \mathbb{Z}.$$

Enfin $c_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$ ($\forall l \geq 1 \quad H_0(l) = 0$)

Exercice 2 (Centrale 2008)

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto \sin^n x$.

Quel est le rang de la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$? ($n \in \mathbb{N}^*$)

Correction

La réponse est n ie qu'il s'agit de montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^n a_i f_i = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^n a_i (\sin(x))^i = 0$$

Or lorsque x décrit $\mathbb{R}$, $\sin(x)$ décrit $[-1; 1]$ donc :

$$\forall t \in [-1; 1] \quad \sum_{i=1}^n a_i t^i = 0$$

Le polynôme $\sum_{i=1}^n a_i X^i$ a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.

Donc tous ses coefficients sont nuls ie :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad a_i = 0$$

La famille est bien libre.

Pour aller plus loin :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : x \mapsto \sin(nx)$.

Quel est le rang de la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$?

On va montrer que cette famille aussi est libre.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{k=1}^n a_k g_k = 0$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 &= \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{ikx} - \sum_{k=1}^n a_k e^{-ikx} \right) \\ &= \frac{e^{-inx}}{2i} \left(\sum_{k=1}^n a_k e^{i(k+n)x} - \sum_{k=1}^n a_k e^{i(n-k)x} \right) \\ &= \frac{e^{-inx}}{2i} \left(\sum_{k=n+1}^{2n} a_{k-n} e^{ikx} - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} e^{ikx} \right) \\ &= \frac{e^{-inx}}{2i} P(e^{ix}) \end{aligned}$$

avec $P = \sum_{k=n+1}^{2n} a_{k-n} X^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} X^k \in \mathbb{C}[X]$

Tous les complexes de module 1 sont racines de P donc P a une infinité de racines.

On en déduit que P est le polynôme nul. Ses coefficients sont donc tous nuls et $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Autre méthode

$$\begin{aligned} \forall l \in \llbracket 1; k \rrbracket \quad 0 &= \int_0^{2\pi} \sin(lt) \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(kt) \right) dt = \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{2\pi} \sin(lt) \sin(kt) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{2\pi} (\cos((l-k)t) - \cos((l+k)t)) dt \\ &= \frac{a_l}{2} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^n a_k \left[\frac{\sin((l-k)t)}{l-k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \left[\frac{\sin((l+k)t)}{l+k} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi a_l \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $h_n : x \mapsto \sin(n+x)$.

Quel est le rang de la famille $(h_i)_{1 \leq i \leq n}$?

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(n+x) = \sin(n) \cos(x) + \cos(n) \sin(x)$

Les fonctions h_i sont toutes combinaisons linéaires de $\sin$ et de $\cos$ donc le rang cherché est inférieur ou égal à 2.

Si $n = 1$, alors h_1 n'étant pas la fonction nulle, le rang cherché est 1.

Si $n \geq 2$, les fonctions h_1 et h_2 étant linéairement indépendantes, le rang cherché est 2.

Il reste à montrer que (h_1, h_2) est libre. Si ce n'était pas le cas, on aurait :

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(x+2) = \lambda \sin(x+1)$

$x = -1$ donnerait alors : $\sin(1) = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 3 (Centrale 2004)

Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les polynômes ont même degré.
2. Idem avec des degrés strictement croissants.

Correction

1. Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une base de F .

On peut toujours ranger ces polynômes par degré croissant de sorte que :

$$d(P_1) \leq \dots \leq d(P_i) < d(P_{i+1}) = \dots = d(P_n)$$

$(P_1 + P_n, \dots, P_i + P_n, P_{i+1}, \dots, P_n)$ convient.

2. Cela peut se faire par récurrence sur la dimension de F .

On note donc n la dimension de F .

Si $n \leq 1$, il n'y a rien à dire.

Supposons $n = 2$.

Soit (P_1, P_2) avec $d(P_1) \leq d(P_2)$ une base de F .

Si $d(P_1) < d(P_2)$, c'est bon.

Si $d(P_1) = d(P_2)$, on pose $Q_1 = P_1 - \frac{\text{dom}(P_1)}{\text{dom}(P_2)} P_2$.

(Q_1, P_2) convient.

Supposons enfin la propriété vraie au rang $n - 1$.

Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une base de F .

On peut toujours ranger ces polynômes par degré croissant de sorte que :

$$d(P_1) \leq \dots \leq d(P_i) < d(P_{i+1}) = \dots = d(P_n)$$

Pour j compris entre $i + 1$ et $n - 1$, on pose $Q_j = P_j - \frac{\text{dom}(P_j)}{\text{dom}(P_n)} P_n$.

Pour $j \leq i$, on pose $Q_j = P_j$.

On a :

$$\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad d(Q_j) < d(P_n)$$

La famille $(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ est libre car $(Q_1, \dots, Q_{n-1}, P_n)$ est une base de F .

On applique ensuite l'hypothèse de récurrence à $\text{Vect}(Q_1, \dots, Q_{n-1})$.

Il existe $(R_1, \dots, R_{n-1})$ base de $\text{Vect}(Q_1, \dots, Q_{n-1})$ tq $d(R_1) < \dots < d(R_{n-1})$.

$F = \text{Vect}(Q_1, \dots, Q_{n-1}) \oplus \mathbb{K}P_n$ donc $(R_1, \dots, R_{n-1}, P_n)$ est une base de F telle que $d(R_1) < \dots < d(R_{n-1}) < d(P_n)$.

Exercice 4 (Mines 2018)

$$\text{Soit } A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0 \right\}$$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.
2. Déterminer $A \cap \{(X-1)^k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ puis $A \cap \text{Vect}(\{(X-1)^k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\})$.
3. Donner une base de A .

Correction

$$1. \text{ Soit } \varphi \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ P \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) \end{cases}.$$

φ est une application linéaire.

Elle est surjective : $\varphi(c) = c$.

Par la formule du rang, $A = \text{Ker}(\varphi)$ est un sev de dimension n de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$2. \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall l \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \frac{d^l}{dX^l} ((X-1)^k) = \begin{cases} \frac{k!}{(k-l)!} (X-1)^{k-l} & \text{si } l \leq k \\ 0 & \text{si } l > k \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi((X-1)^k) &= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)!} 0^{k-l>0} + k! + \sum_{l=k+1}^n 0 \\ &= k! \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A \cap \{(X-1)^k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\} = \emptyset$$

Remarque importante :

Tout vecteur de A est combinaison linéaire des polynômes $(X-1)^k$ mais ces polynômes ne forment pas pour autant une famille génératrice de A .

$$\text{Vect}(\{(X-1)^k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}) = \mathbb{R}_n[X] \text{ donc } A \cap \text{Vect}(\{(X-1)^k, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}) = A$$

3. $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (X-1)^k - k! \in A$.
 $\left((X-1)^k - k! \right)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille libre, car échelonnée en degré, de $n = \dim(A)$ vecteurs de A , c'en est donc une base.

Autre méthode

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$$

Donc dans la base $(\epsilon_k)_{0 \leq k \leq n} = \left(\frac{(X-1)^k}{k!} \right)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$, A est l'hyperplan d'équation

$c_0 + \dots + c_n = 0$ (en notant $(c_0, \dots, c_n)$ les coordonnées de P)

Les éléments de A sont donc les polynômes :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^n c_k \epsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \epsilon_k - (c_0 + \dots + c_{n-1}) \epsilon_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k (\epsilon_k - \epsilon_n) \end{aligned}$$

La famille $(\epsilon_k - \epsilon_n)_{0 \leq k \leq n-1} = \left(\frac{(X-1)^k}{k!} - \frac{(X-1)^n}{n!} \right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est donc une base de A .

Exercice 5 (CCP 2016)

Soit n un entier ≥ 2 . Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0) = P'(0) = 0$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Calculer la dimension de E .
2. Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Correction

1. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$P(0) = a_0 \text{ et } P'(0) = a_1 \text{ donc :}$$

$$P \in E \iff a_0 = a_1 = 0$$

$$\text{Donc : } E = \text{Vect}(X^2, \dots, X^n).$$

E est donc un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n-1$.

2. La linéarité de φ est claire :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (P, Q) \in E$$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - 2(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(X-1) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - 2\lambda P(X) - 2\mu Q(X) + \lambda P(X-1) + \mu Q(X-1) \\ &= \lambda (P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)) + \mu (Q(X+1) - 2Q(X) + Q(X-1)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \end{aligned}$$

Si $P \in \text{Ker}(\varphi)$ alors la suite $(u_n) = (P(n))$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire à 2 pas.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une racine double : 1.

On a donc :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = an + b$$

$\mathbb{N}$ est infini donc $P(X) = aX + b$

$P \in E$ donc $P(0) = P'(0) = 0$, ce qui donne $a = b = 0$.

φ est donc injective.

φ est un isomorphisme de E sur $\varphi(E)$ qui est donc dimension $n - 1$.

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2 \quad \varphi(X^k) &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} X^l - 2X^k + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} X^l \\ &= X^k - 2X^k + X^k + kX^{k-1} - kX^{k-1} + \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l \\ &= \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l \end{aligned}$$

Donc $\varphi(E) = \text{Vect}((\varphi(X^k))_{2 \leq k \leq n}) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$ de dimension $n - 1$.

Donc $\varphi(E) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 6 (Mines 2024)

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$.

Soit $\varphi \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$

Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction

La linéarité de φ est claire :

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (P, Q) \in E$

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - 2(\lambda P + \mu Q)(X) + (\lambda P + \mu Q)(X-1) \\ &= \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) - 2\lambda P(X) - 2\mu Q(X) + \lambda P(X-1) + \mu Q(X-1) \\ &= \lambda (P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)) + \mu (Q(X+1) - 2Q(X) + Q(X-1)) \\ &= \lambda \varphi(P) + \mu \varphi(Q) \end{aligned}$$

Si $P \in \text{Ker}(\varphi)$ alors la suite $(u_n) = (P(n))$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire à 2 pas.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une racine double : 1.

On a donc :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = an + b$$

$\mathbb{N}$ est infini donc $P(X) = aX + b$

$P \in E$ donc $P(0) = P'(0) = 0$, ce qui donne $a = b = 0$.

φ est donc injective.

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2 \quad \varphi(X^k) &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} X^l - 2X^k + \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-1)^{k-l} X^l \\
&= X^k - 2X^k + X^k + kX^{k-1} - kX^{k-1} + \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l \\
&= \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l \\
&= k(k-1)X^{k-2} + \sum_{l=0}^{k-3} \binom{k}{l} (1 + (-1)^{k-l}) X^l
\end{aligned}$$

Or $(X^k)_{k \geq 2}$ est une base de E donc $\varphi(E) = \text{Vect}((\varphi(X^k))_{k \geq 2})$ avec $\varphi(X^k)$ de degré $k-2$.
Donc $\varphi(E) = \mathbb{R}[X]$ (cf familles échelonnées en degré)

Exercice 7 (Mines 2015)

Soient E un espace vectoriel (de dimension quelconque) et f un endomorphisme de E .

1. Montrer :
 $\ker(f) = \ker(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$
2. Montrer :
 $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Im}(f) + \ker(f) = E$

Correction

1. • On suppose $\ker(f) = \ker(f^2)$.
 Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$.
 $\exists y \in E$ tq $x = f(y)$.
 $x \in \ker(f)$ donc $f^2(y) = f(x) = 0$.
 Donc $y \in \ker(f^2) = \ker(f)$
 Donc $x = f(y) = 0$
- On suppose $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
 $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est toujours vrai.
 Soit $x \in \ker(f^2)$.
 $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$ donc $f(x) = 0$ et $x \in \ker(f)$.
 D'où $\ker(f^2) \subset \ker(f)$ puis $\ker(f) = \ker(f^2)$.
2. • On suppose $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.
 Soit $x \in E$.
 $f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y) = f(f(y))$.
 $x - f(y) \in \ker(f)$ et $x = x - f(y) + f(y) \in \ker(f) + \text{Im}(f)$.
- On suppose $\text{Im}(f) + \ker(f) = E$.
 $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ est toujours vrai.
 Soit $x \in \text{Im}(f)$.
 $\exists y \in E$ tq $x = f(y)$.
 $\exists (z_1, z_2) \in \ker(f) \times \text{Im}(f)$ tq $y = z_1 + z_2$.
 $x = f(y) = f(z_2) \in \text{Im}(f^2)$.

Exercice 8 (Mines 2016)

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.

Montrer que $p \begin{cases} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x - (x_1 + x_2 + x_3)v \end{cases}$ est une projection.

Donner son noyau et son image.

Correction

On commence par vérifier la linéarité de p .

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$.

φ est linéaire.

Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ c'est facile car $\phi(x) = \langle (1, 1, 1), x \rangle$.

Les produits scalaires complexes ne sont pas au programme.

Soient x et $y \in \mathbb{C}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^2$.

Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y) &= \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3 \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} p(\lambda x + \mu y) &= \lambda x + \mu y - \varphi(\lambda x + \mu y)v \\ &= \lambda x + \mu y - (\lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y))v \\ &= \lambda(x - \varphi(x)v) + \mu(y - \varphi(y)v) = \lambda p(x) + \mu p(y) \end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que $p(v) = v - v = 0$.

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{C}^3 \quad p^2(x) = p(x - (x_1 + x_2 + x_3)v) = p(x)$$

p est bien une projection.

Si $p(x) = 0$ alors $x = (x_1 + x_2 + x_3)v \in \mathbb{C}v$.

De plus $p(v) = 0$ donc $\ker(p) = \mathbb{C}v$

Soit $H = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

H est un sev de dimension 2 de $\mathbb{C}^3$.

$$\forall x \in H \quad p(x) = x$$

Donc $H \subset \text{Im}(p)$.

On conclut avec la formule du rang : $H = \text{Im}(p)$.

Exercice 9 (Mines 2024)

Soit S_n l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

1. Soit $\sigma \in S_n$.

Montrer que $u \begin{cases} S_n \rightarrow S_n \\ s \mapsto s \circ \sigma \end{cases}$ est une permutation de S_n .

2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

$$\text{Soit } p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$$

Montrer que p_n est une projection, déterminer son noyau et son image.

3. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Soit v un élément non nul de H .

Montrer que les vecteurs $f_\sigma(v)$, $\sigma \in S_n$ engendrent H .

Correction

1. La composée de deux permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ étant une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$, l'application u est bien définie.

De même, $v \begin{cases} S_n \rightarrow S_n \\ s \mapsto s \circ \sigma^{-1} \end{cases}$ est bien définie.

$$\begin{aligned} \forall s \in S_n \quad (u \circ v)(s) &= u(v(s)) = u(s \circ \sigma^{-1}) = (s \circ \sigma^{-1}) \circ \sigma \\ &= s \circ (\sigma \circ \sigma^{-1}) = s \\ (v \circ u)(s) &= v(u(s)) = v(s \circ \sigma) = (s \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} \\ &= s \circ (\sigma \circ \sigma^{-1}) = s \end{aligned}$$

Donc $u \circ v = v \circ u = id_{S_n}$.

On en déduit que u est une bijection de S_n sur S_n de bijection réciproque v .

2. Plusieurs méthodes sont possibles.

Commençons par celle qui utilise la première question.

On remarque tout d'abord que :

$$\forall (s, \sigma) \in S_n^2 \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (f_s \circ f_\sigma)(e_i) = f_s(f_\sigma(e_i)) = f_s(e_{\sigma(i)}) = e_{s(\sigma(i))}$$

$f_s \circ f_\sigma$ et $f_{s \circ \sigma}$ coïncident sur une base donc $f_s \circ f_\sigma = f_{s \circ \sigma}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in S_n \quad p_n \circ f_\sigma &= \frac{1}{n!} \left(\sum_{s \in S_n} f_s \right) \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} (f_s \circ f_\sigma) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} f_{s \circ \sigma} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{s_1 \in S_n} f_{s_1} \text{ d'après la première question} \\ &= p_n \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} p_n^2 &= p_n \circ \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (p_n \circ f_\sigma) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_n \\ &= \frac{1}{n!} n! p_n = p_n \end{aligned}$$

Donc p_n est un projecteur.

Pour déterminer son noyau et son image, on a besoin d'expliciter $p_n(x)$ en fonction de x .

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$p_n(e_i) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)}$$

$$\begin{aligned} p_n^2(e_i) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_n(e_{\sigma(i)}) = \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{s \in S_n} e_{s(\sigma(i))} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{s' \in S_n} e_{s'(i)} \right) \text{ d'après la première question} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p_n(e_i) = \frac{1}{n!} n! p_n(e_i) \\ &= p_n(e_i) \end{aligned}$$

p_n et p_n^2 coïncident sur une base donc $p_n = p_n^2 : p_n$ est un projecteur.

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} p_n(e_i) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)} = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i)=j}} e_{\sigma(i)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i)=j}} e_j = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n \text{Card}(\{\sigma \in S_n \text{ tq } \sigma(i) = j\}) e_j \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (n-1)! e_j \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j \end{aligned}$$

On en déduit que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$f(x) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} (e_1 + \dots + e_n)$$

L'image de p_n est la droite dirigée par $e_1 + \dots + e_n$ ie l'ensemble des n -uplets de la forme $(x, \dots, x)$.

Le noyau de p_n est l'ensemble des n -uplets de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ avec $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

3. Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ un élément non nul de H .

Si les v_i étaient tous égaux, on aurait :

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i = n x_1 \text{ et } v \text{ serait nul.}$$

Donc, il existe $i < j$ tel que $v_i \neq v_j$.

Si on prend σ la permutation qui échange i et j alors $f_\sigma(v) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_i, v_{i+1}, \dots)$

$$\frac{1}{v_i - v_j} (v - f_\sigma(v)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0).$$

Soit $s \in S_n$ tel que $s(i) = 1$ et $s(j) = 2$ (un tel s existe bien).

$$\frac{1}{v_i - v_j} (f_s(v) - f_{s \circ \sigma}(v)) = (1, -1, 0, \dots, 0)$$

Si on prend $a \in S_n$ tel que $a(1) = 1$ et $a(2) = i \geq 3$, on a :

$$\frac{1}{v_i - v_j} (f_{a \circ s}(v) - f_{a \circ s \circ \sigma}(v)) = (1, 0, \dots, 0 - 1, 0, \dots, 0)$$

La famille des $f_\sigma(v)$ contient une famille échelonnée de $n-1$ vecteurs donc $\text{Vect}(\{f_\sigma(v), \sigma \in S_n\})$ est de dimension au moins $n-1$.

Mais les vecteurs $f_\sigma(v)$ appartiennent tous à H (permuter des nombres ne changent pas leur somme) qui est de dimension $n-1$ donc $\text{Vect}(\{f_\sigma(v), \sigma \in S_n\}) = H$.

Exercice 10 (Ens 2025)

On définit la fonction Rev de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\text{Rev}(0) = 0$$

si P est de degré $d \in \mathbb{N}$ ie $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors $\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^d a_{d-k} X^k$

1. Rev est-elle linéaire ? bijective ?
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{Q}_d = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } \deg(P) = d \text{ et } P(0) \neq 0\}$.
Montrer que Rev induit une bijection de $\mathcal{Q}_d$ dans lui même.
3. Déterminer les polynômes P tels que $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$.

Correction

1. $\text{Rev}(1) = \text{Rev}(X^0) = X^0 = 1$, $\text{Rev}(X) = 1$: Rev n'est pas injective donc n'est pas bijective.

$$\text{Rev}(1 + X) = 1 + X \neq 2 = \text{Rev}(1) + \text{Rev}(X)$$

2. Soit $P \in \mathcal{Q}_d$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k \text{ avec } a_0 \text{ et } a_d \text{ tous les deux non nuls.}$$

$$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^d a_{d-k} X^k$$

$a_0 \neq 0$ donc $\text{Rev}(P)$ est de degré d .

$$\text{Rev}(P)(0) = a_d \neq 0$$

On a bien $\text{Rev}(P) \in \mathcal{Q}_d$

Si on note $b_k = a_{d-k}$, $\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^d b_k X^k$ donc :

$$\text{Rev}(\text{Rev}(P)) = \sum_{k=0}^d b_{d-k} X^k = \sum_{k=0}^d a_k X^k = P$$

Donc Rev induit une bijection de $\mathcal{Q}_d$ dans lui même, égale à sa bijection réciproque.

3. Le polynôme nul convient.

Si $P = a$ est constant non nul, alors $P' = 0$ donc $\text{Rev}(P') = 0$, $\text{Rev}(P) = a$ et $(\text{Rev}(P))' = 0$: les polynômes constants non nuls sont solutions.

Soit P de degré $d \geq 1$ tel que $\text{Rev}(P') = (\text{Rev}(P))'$.

$$\text{On remarque que } \text{Rev}(P) = X^d P\left(\frac{1}{X}\right).$$

On a donc :

$$X^{d-1} P' \left(\frac{1}{X} \right) = d X^{d-1} P \left(\frac{1}{X} \right) - X^{d-2} P' \left(\frac{1}{X} \right)$$

Donc :

$$X^{1-d}P'(X) = dX^{1-d}P(X) - X^{2-d}P'(X)$$

En multipliant par X^{d-1} :

$$P'(X) = dP(X) - XP'(X)$$

On en déduit $(1+X)P'(X) = dP(X)$

On a donc :

$$\forall x > 0 \quad P'(x) = \frac{d}{1+x}P(x)$$

Donc :

$$\exists C \in \mathbb{R}^* \text{ tq } \forall x > 0 \quad P(x) = C(1+x)^d$$

$\mathbb{R}_+^*$ étant infini, $P(X) = C(1+X)^d$.

Réciproquement, en revenant à la définition :

$$P(X) = \sum_{k=0}^d C \binom{d}{k} X^k$$

$$\text{Rev}(P) = \sum_{k=0}^d C \binom{d}{d-k} X^k = \sum_{k=0}^d C \binom{d}{k} X^k = P$$

Donc $(\text{Rev}(P))' = P'$.

$P'(X) = Cd(1+X)^{d-1} = C'(1+X)^{d-1}$ donc comme pour P , $\text{Rev}(P') = P'$.

Finalement les polynômes cherchés sont les polynômes $C(1+X)^d$, $C \in \mathbb{R}$ ($C = 0$ donne le polynôme nul), $d \in \mathbb{N}$.

2 Produits et sommes d'espaces vectoriels

Exercice 11

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\omega \in \mathbb{K}^*$.

Montrer : $\text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$

Correction

Attention :

Contrairement au cas des supplémentaires, montrer :

$\forall x \in \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E) \quad \exists!(y, z) \in \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) \times \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E) \text{ tq } x = y + z$

ne suffit pas. Cela ne suffit même pas à montrer que la somme est directe car on pourrait avoir $\text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$ strictement contenu dans $\text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) + \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$.

Soit $x \in \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E)$.

$u(x) = \omega x$ donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(\omega x) = \omega u(x) = \omega^2 x$ (on en reparlera en cours)

Donc $\text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$

Soit $x \in \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$.

$u(x) = -\omega x$ donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(-\omega x) = -\omega u(x) = \omega^2 x$ (on en reparlera en cours)

Donc $\text{Ker}(u + \omega \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$

$\text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$ est un sev de E contenant $\text{Ker}(u - \omega \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$ donc $\text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$ contient le plus petit sev de E contenant $\text{Ker}(u - \omega \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$ à savoir $\text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) + \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$.

En clair : $\text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) + \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$.

Soit $x \in \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$.

On suppose qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) \times \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$ tq $x = y + z$

$$u(x) = u(y) + u(z) = \omega y - \omega z$$

$$u(x) + \omega x = \omega y - \omega z + \omega y + \omega z = 2\omega y$$

$$\text{Donc } y = \frac{u(x) + \omega x}{2\omega}.$$

$$u(x) - \omega x = \omega y - \omega z - \omega y - -\omega z = -2\omega z$$

$$\text{Donc } z = \frac{-u(x) + \omega x}{2\omega}.$$

On a donc prouvé l'unicité de y et de z si ils existent.

Soit $x \in \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E)$.

$$\text{On pose } y = \frac{u(x) + \omega x}{2\omega} \text{ et } z = \frac{-u(x) + \omega x}{2\omega}.$$

$$y + z = x \text{ (facile)}$$

$$u(y) = \frac{u^2(x) + \omega u(x)}{2\omega} = \frac{\omega^2 x + \omega u(x)}{2\omega} = \omega y \text{ donc } y \in \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E).$$

$$u(z) = \frac{-u^2(x) + \omega u(x)}{2\omega} = \frac{-\omega^2 x + \omega u(x)}{2\omega} = -\omega z \text{ donc } z \in \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E).$$

$$\text{Donc } x \in \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) + \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E).$$

$$\text{On a donc prouvé } \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) + \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E).$$

$$\text{Par double inclusion, on a donc : } \text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) + \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E).$$

D'après la phase d'analyse ci-dessus, on peut alors dire :

$$\text{Ker}(u^2 - \omega^2 \text{id}_E) = \text{Ker}(u - \omega \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \omega \text{id}_E)$$

Exercice 12 (Mines 2018)

Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - u^2 + u - \text{id}_E = 0$.

Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E) = E$.

Correction

E n'est pas supposé de dimension finie.

Soit $x \in E$.

On suppose $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $z \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$.

$$u(x) = u(y) + u(z) = y + u(z)$$

$$u^2(x) = u(y) + u^2(z) = y - z.$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{2}(x + u^2(x)).$$

$$\text{Puis } z = x - y = \frac{1}{2}(x - u^2(x)).$$

D'où l'unicité.

Réciproquement, soit $x \in E$.

$$\text{On pose } y = \frac{1}{2}(x + u^2(x)) \text{ et } z = x - y = \frac{1}{2}(x - u^2(x)).$$

On montre ensuite que $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

A ce stade de l'année, je privilégie une solution élémentaire ie sans polynôme d'endomorphisme, notion qui sera vue plus tard.

$$(u - \text{id})(y) = u(y) - y = \frac{1}{2}(u(x) + u^3(x) - x - u^2(x)) = \frac{1}{2}(u^3 - u^2 + u - \text{id})(x) = 0$$

$$(u^2 + \text{id})(z) = u^2(z) + z = \frac{1}{2}(u^2(x) - u^4(x) + x - u^2(x)) = \frac{1}{2}(x - u^4(x))$$

$u^3 - u^2 + u - id = 0$ donc $u^3 = u^2 - u + id$ et en composant par u :

$$u^4 = u^3 - u^2 + u$$

Donc :

$$(u^2 + id)(z) = \frac{1}{2} (x - u^3(x) + u^2(x) - u(x)) = -\frac{1}{2} (u^3 - u^2 + u - id)(x) = 0$$

D'où l'existence.

Exercice 13 (X 20 ?)

Soient E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soient F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F .

Quel est le rang de la famille $((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$?

Correction

Que faire quand on ne sait pas quoi faire ? Comment intuitiver le résultat ?

On étudie un cas particulier avec des petites valeurs de n et de p .

On prend $n = 2$ et $p = 3$ (le cas $n = p$ pouvant a priori être particulier).

On prend $E = \mathbb{K}^2$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

On prend $F = \mathbb{K}^3$, $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 0, 1)$.

$E \times F = \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^3$ est identifié à $\mathbb{K}^5$.

Il s'agit de déterminer le rang de la famille $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_6)$ avec :

$$\epsilon_1 = (e_1, f_1) = (1, 0, 1, 0, 0)$$

$$\epsilon_2 = (e_1, f_2) = (1, 0, 0, 1, 0)$$

$$\epsilon_3 = (e_1, f_3) = (1, 0, 0, 0, 1)$$

$$\epsilon_4 = (e_2, f_1) = (0, 1, 1, 0, 0)$$

$$\epsilon_5 = (e_2, f_2) = (0, 1, 0, 1, 0)$$

$$\epsilon_6 = (e_2, f_3) = (0, 1, 0, 0, 1)$$

La matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^5$ de cette famille est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On va calculer son rang avec la méthode du pivot.

On va pivoter sur les colonnes afin d'obtenir une base de $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$.

Le rang cherché est donc celui de la famille $(\epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_1, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6)$ ou encore

$((e_1, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2), (e_2, f_3))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi celui de la famille $((e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2), (e_2, f_3), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est aussi celui de la famille

$((e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2) - (e_2, f_1) = (0, f_2 - f_1), (e_2, f_3) - (e_2, f_1) = (0, f_3 - f_2), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Après suppression des doublons ; c'est le rang de la famille

$((e_1, f_1), (e_2, f_1), (e_2, f_2) - (e_2, f_1) = (0, f_2 - f_1), (e_2, f_3) - (e_2, f_1) = (0, f_3 - f_1))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, c'est le rang de la famille $((e_1, f_1), (e_2, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_1) - (0, f_2 - f_1) = (0, f_3 - f_2))$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang est donc 4 et on a une base de $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$.

Dans le cas général, on intuite comme base de $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$:

$((e_1, f_1), (e_2, f_1), \dots, (e_n, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_2), \dots, (0, f_p - f_{p-1}))$

Ces vecteurs sont bien dans $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$:

$(0, f_j - f_{j-1}) = (e_1, f_j) - (e_1, f_{j-1})$.

Tout vecteur (e_i, f_j) est combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle famille :

$$\forall j \in \llbracket 2; n \rrbracket (e_i, f_j) = \sum_{k=2}^j (0, f_k - f_{k-1}) + (e_i, f_1)$$

Enfin, la nouvelle famille est libre :

$$\text{Soit } (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \text{ tq } \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, f_1) + \sum_{j=2}^p \mu_j (0, f_j - f_{j-1}) = (0, 0)$$

La première composante donne : $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$

$(e_1, \dots, e_n)$ est libre car c'est une base de E donc les λ_i sont nuls et il reste :

$$\sum_{j=2}^p \mu_j (f_j - f_{j-1}) = 0$$

$$\text{Donc } 0 = \sum_{j=2}^p \mu_j f_j - \sum_{j=2}^p \mu_j f_{j-1} = \sum_{j=2}^p \mu_j - \sum_{j=1}^{p-1} \mu_{j+1} f_j = \mu_p f_p + \sum_{j=1}^{p-1} (\mu_j - \mu_{j+1}) f_j$$

La famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre donc $\mu_p = 0$ et $\mu_j = \mu_{j+1}$ pour tout j compris entre 1 et $p - 1$.

Les μ_j sont donc tous nuls.

Donc la famille $((e_1, f_1), (e_2, f_1), \dots, (e_n, f_1), (0, f_2 - f_1), (0, f_3 - f_2), \dots, (0, f_p - f_{p-1}))$ est libre.

C'est donc une base de $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$ et le rang cherché est $n + p - 1$.

D'autres méthodes sont possibles :

• **Première méthode**

$\mathcal{B} = ((e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p))$ est une base de $E \times F$.

La matrice de la famille $((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ I_p & I_p & \dots & I_p \end{pmatrix}$$

où A_i est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la i -ème ligne qui sont égaux à 1. L'écriture par blocs est naturelle mais n'aura pas encore été vue.

Le rang de M est égal à celui de $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 - A_1 & \dots & A_n - A_1 \\ I_p & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Donc la rang de M vaut $p +$ le rang de $\begin{pmatrix} A_2 - A_1 & \dots & A_n - A_1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$A_i - A_1 = \begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \text{ a ses } p \text{ colonnes identiques.}$$

Donc la rang de M vaut $p +$ le rang de $\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots \\ 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}$

Finalement le rang cherché vaut $p + n - 1$.

• **Deuxième méthode**

$\mathcal{C} = ((e_1, f_1), \dots, (e_1, f_p), (e_2, f_1), \dots, (e_n, f_1))$ est une base de $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$

En effet pour $i, j \geq 2$:

$$(e_i, f_j) = (e_1, f_j) + (e_i, f_1) - (e_1, f_1)$$

donc $\mathcal{C}$ est génératrice de $\text{Vect} \left(((e_i, f_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \right)$

Montrons que $\mathcal{C}$ est libre.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_2, \dots, \mu_n$ des scalaires tels que

$$\lambda_1(e_1, f_1) + \dots + \lambda_p(e_1, f_p) + \mu_2(e_2, f_1) + \dots + \mu_n(e_n, f_1) = (0, 0).$$

On en déduit :

$$(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n, \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + \mu_2 f_1 + \dots + \mu_n f_1) = (0, 0)$$

On en déduit :

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_p) e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n = 0$$

et

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p + (\mu_2 + \dots + \mu_n) f_1 = 0$$

Avec la première, on obtient : $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$.

On reporte dans la deuxième : $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0$.

On en déduit $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$

Exercice 14 (Centrale 98)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$ -ev de dimensions finies non nulles.

Soit $(E_1, \dots, E_n)$ une famille de sev de E .

Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$.

On définit l'application φ par $\varphi(h) = (h|_{E_1}, \dots, h|_{E_n})$ où, pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$ $h|_{E_i}$ désigne la restriction de h à E_i .

1. Montrer que φ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_n, F)$.
2. Montrer :

$$\varphi \text{ injective} \iff E = \sum_{i=1}^n E_i$$
3. Condition pour que φ soit surjective ?

Correction

1. Il est notoire que la restriction d'une application linéaire de E dans F à un sev de E est encore linéaire. Par conséquent, φ est bien définie de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_n, F)$.

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(h_1, h_2) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) &= (((\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)|_{E_1}, \dots)) \\ &= (\lambda_1 h_1|_{E_1} + \lambda_2 h_2|_{E_1}, \dots) \\ &= \lambda_1 (h_1|_{E_1}, \dots) + \lambda_2 (h_2|_{E_1}, \dots) \\ &= \lambda_1 \varphi(h_1) + \lambda_2 \varphi(h_2) \end{aligned}$$

φ est donc linéaire.

2. Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} h \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(h) = (h|_{E_1}, \dots, h|_{E_n}) = (0, \dots, 0) \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad h|_{E_i} = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad E_i \subset \text{Ker}(h) \end{aligned}$$

Mais $\text{Ker}(h)$ est un sous-espace vectoriel de E et $E_1 + \dots + E_n$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les E_i donc :

$$\text{Ker}(\varphi) = \{h \in \mathcal{L}(E, F) \text{ tq } E_1 + \dots + E_n \subset \text{Ker}(h)\}$$

On en déduit immédiatement que si $E = E_1 + \dots + E_n$ alors $\text{Ker}(\varphi) = \{h \in \mathcal{L}(E, F) \text{ tq } E \subset \text{Ker}(h)\} = \{0\}$ de sorte que φ est injective.

Il reste à montrer que si φ est injective alors $E = E_1 + \dots + E_n$.

On démontre plutôt la contraposée :

$$\sum_{i=1}^n E_i \neq E \implies \varphi \text{ non injective}$$

Pour cela on suppose que $\sum_{i=1}^n E_i$ est strictement contenu dans E et on construit $h \neq 0$ qui appartient à $\text{Ker} \varphi$ ie $h \neq 0$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $h|_{E_i} = 0$ ou encore $h \neq 0$ telle que $h|_{\sum E_i} = 0$.

Soit S un supplémentaire de $\sum_{i=1}^n E_i$. $S \neq \{0\}$.

Soit p la projection sur S parallèlement à $\sum_{i=1}^n E_i$.

$S \neq \{0\}$ donc $p \neq 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p|_{E_i} = 0$.

Problème : p va de E dans E alors qu'on veut p de E dans S .

Il faudrait donc introduire la corestriction $\hat{p} \begin{cases} E \rightarrow S \\ x \mapsto p(x) \end{cases}$.

Il existe $a \in \mathcal{L}(S, F)$ telle que $a \neq 0$.

Pour le montrer, on se donne $\mathcal{B}_S$ une base de S et $\mathcal{B}_F$ une base de F .

On définit alors a par $Mat_{\mathcal{B}_S, \mathcal{B}_F}(a) = (1)_{\substack{1 \leq i \leq \dim(F) \\ 1 \leq j \leq \dim(S)}}$.

On définit alors $h = a \circ p$ ($h \circ \hat{p}$ en toute rigueur).

Si $x_S \in S$ avec $a(x_S) \neq 0$ alors $h(x_S) \neq 0$.

(attention : a peut s'annuler même si $a(e_i) \neq 0$ pour tout i)

h convient.

Remarque

Une autre méthode est possible.

Si on note S un supplémentaire de $\sum_{i=1}^n E_i$ alors $\text{Ker}(\varphi)$ est naturellement isomorphe à $\mathcal{L}(S, F)$ donc :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(\varphi)) &= \dim(S) \times \dim(F) \\ &= \left(\dim(E) - \dim\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \right) \times \dim(F) \end{aligned}$$

La dimension de F étant non nulle :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ injective} &\iff \text{Ker}(\varphi) = \{0\} \\ &\iff \dim(\text{Ker}(\varphi)) = 0 \\ &\iff \left(\dim(E) - \dim\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \right) \times \dim(F) = 0 \\ &\iff \dim(E) = \dim\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \\ &\iff \sum_{i=1}^n E_i = E \text{ car } \sum_{i=1}^n E_i \subset E \end{aligned}$$

3. On va montrer :

$$\varphi \text{ surjective} \iff \sum_{i=1}^n E_i \text{ est directe}$$

• $\implies$

On démontre plutôt la contraposée.

Pour cela on suppose que $\sum_{i=1}^n E_i$ n'est pas directe.

Il existe donc une décomposition $0 = x_1 + \dots + x_n$ non triviale.

On peut supposer $x_1 \neq 0$ sans perte de généralité.

Il existe $a \in \mathcal{L}(E_1, F)$ telle que $a(x_1) \neq 0$:

(x_1) est libre. On la complète en $\mathcal{B}_1 = (x_1, \dots)$ base de E_1 et on définit a par sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_F$ (plusieurs choix sont possibles).

Supposons que φ soit surjective et notons h un antécédent de $(a, 0, \dots, 0)$ par φ .

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ &= h\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n h(x_i) = h(x_1) \text{ car } h(x_i) = 0 \text{ pour } i \geq 2 \\ &= a(x_1) \neq 0 \end{aligned}$$

D'où une contradiction.

Donc φ n'est pas surjective.

• $\Leftarrow$

On ne suppose pas que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$ donc il faut introduire un supplémentaire S de $E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.

Soit $(h_1, \dots, h_n) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_n, F)$.

Soit $h \begin{cases} E \rightarrow F \\ x \mapsto \sum_{i=1}^n h_i(x_i) \end{cases}$ où $x = x_1 + \dots + x_n + x_S$ est **l'unique** décomposition de x .

h est bien définie. C'est une application de E dans F .

On montre ensuite que h est linéaire.

Soient x et y dans E et λ et μ dans $\mathbb{R}$.

Si $x = x_1 + \dots + x_n + x_S$ est la décomposition de x et $y = y_1 + \dots + y_n + y_S$ celle de y alors $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) + (\lambda x_S + \mu y_S)$ est celle de $\lambda x + \mu y$.

D'où :

$$\begin{aligned} h(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^n h_i(\lambda x_i + \mu y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda h_i(x_i) + \mu h_i(y_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x_i) + \mu \sum_{i=1}^n h_i(y_i) \\ &= \lambda h(x) + \mu h(y) \end{aligned}$$

En écrivant $x_i = 0 + \dots + 0 + x_i + 0 + \dots + 0$, on montre facilement que $h|_{E_i} = h_i$ ie $\varphi(h) = (h_1, \dots, h_n)$.

φ est donc surjective.

Remarque

On peut aussi utiliser des arguments de dimension :

$$\begin{aligned}
 \varphi \text{ surjective} &\iff \operatorname{Im}(\varphi) = \mathcal{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_n, F) \\
 &\iff \operatorname{rg}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \dim(\mathcal{L}(E_i, F)) \\
 &\iff \dim(\mathcal{L}(E, F)) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \sum_{i=1}^n (\dim(E_i) \times \dim(F)) \\
 &\iff \dim(F) \left(\dim(E) - \left(\dim(E) - \dim\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \right) \right) = \dim(F) \sum_{i=1}^n \dim(E_i) \\
 &\iff \dim\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i) \\
 &\iff \sum_{i=1}^n E_i \text{ est directe}
 \end{aligned}$$

Exercice 15 (Centrale 2023)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.

Montrer :

$$w \text{ isomorphisme de } E \text{ sur } G \iff \begin{cases} u \text{ injective} \\ v \text{ surjective} \\ \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v) = F \end{cases}$$

Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

Correction

On suppose w isomorphisme de E sur G .

Soit $x \in \operatorname{Ker}(u)$.

$w(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker}(w)$.

Mais w est injective donc $x = 0$.

$\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$ donc u est injective.

Soit $y \in G$.

w est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $w(x) = y$.

On a alors $u(x) \in F$ et $v(u(x)) = y$.

v est donc surjective.

On montre que $\operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(v) = F$ par analyse-synthèse.

Soit $x \in F$.

On suppose qu'il existe $y \in \operatorname{Im}(u)$ et $z \in \operatorname{Ker}(v)$ tels que $x = y + z$.

$y \in \operatorname{Im}(u)$ donc il existe $y_1 \in E$ tel que $y = u(y_1)$.

$v(x) = v(u(y_1) + z) = w(y_1)$

On en déduit $y_1 = w^{-1}(v(x))$ puis $y = u(y_1) = u(w^{-1}(v(x)))$ et $z = x - y = x - u(w^{-1}(v(x)))$.

D'où l'unicité en cas d'existence.

Réciproquement, on pose $y = u(w^{-1}(v(x)))$ et $z = x - u(w^{-1}(v(x)))$.

y est bien défini (w^{-1} l'est) ainsi donc que z .

On a clairement $y \in \operatorname{Im}(u)$ et $y + z = x$.

$v(z) = v(x - u(w^{-1}(v(x)))) = v(x) - v(u(w^{-1}(v(x)))) = v(x) - w(w^{-1}(v(x))) = v(x) - v(x) = 0$ donc $z \in \operatorname{Ker}(w)$.

D'où l'existence.

On remarquera qu'on ne s'est pas servi de l'hypothèse de dimension finie.

Réciproquement, on suppose $\begin{cases} u \text{ injective} \\ v \text{ surjective} \\ \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v) = F \end{cases}$

Soit $x \in \text{Ker}(w)$.

$v(u(x)) = w(x) = 0$ donc $u(x) \in \text{Ker}(v)$.

Mais $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc $u(x) = 0$.

Or u est injective donc $x = 0$.

On a donc montré que w est injective.

On montre ensuite que w est surjective.

Soit $z \in G$.

v est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$.

$\text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(v) = F$ donc il existe $x \in E$ et $y_1 \in \text{Ker}(v)$ tels que $y = u(x) + y_1$.

$z = v(y) = w(x)$ donc w est surjective.

On remarque ici aussi qu'on ne s'est pas servi de l'hypothèse de dimension finie.

Exercice 16 (Centrale 2023)

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que f admet un pseudo-inverse si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

1. Que dire de f si f est inversible ? est la fonction nulle ?
2. (a) On suppose que f admet un pseudo-inverse.
Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
(b) On suppose que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.
Montrer que la restriction de f à $\text{Im}(f)$ admet un pseudo-inverse.
En déduire que f admet un pseudo-inverse.
Conclure.
3. Montrer que f admet un pseudo-inverse si, et seulement si, f et f^2 ont le même rang.

Correction

1. • On suppose que f est inversible.
Si f admet un pseudo-inverse g alors $f \circ (g \circ f) = f \circ \text{id}_E$ avec f inversible donc $g \circ f = \text{id}_E$ et $g = f^{-1}$.
Réciproquement, si on pose $g = f^{-1}$ alors :
 $f \circ g \circ f = f \circ f^{-1} \circ f = f$
 $g \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$
 $g \circ f = f \circ g = \text{id}_E$
Donc f admet un pseudo-inverse.
• On suppose que f est la fonction nulle.
Si f admet un pseudo-inverse g alors $g = g \circ f \circ g = 0$ car $f = 0$
Réciproquement, on vérifie facilement que $g = 0$ est un pseudo-inverse de $f = 0$.
2. (a) Soit $x \in E$.
 $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f((g \circ f)(x))$.
Donc $x - (g \circ f)(x) \in \text{Ker}(f)$.
Mais $g \circ f = f \circ g$ donc $x = f(g(x)) + (x - (g \circ f)(x)) \in \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.
Donc $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.

La formule de Grassman donne alors :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f))$$

La formule du rang permet d'en déduire : $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)) = 0$ ie $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

$\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont bien supplémentaires.

- (b) $\operatorname{Im}(f)$ étant stable par f , f induit un endomorphisme de $\operatorname{Im}(f)$, qu'on notera h , et la question de l'existence d'un pseudo inverse de cet endomorphisme a bien un sens. $\operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$ donc h est injective.

Comme h est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, h est bijective.

D'après la première question, h admet un et un seul pseudo-inverse : h^{-1} .

Soit p la projection sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$.

On va montrer que $h^{-1} \circ p$ est un pseudo-inverse de f .

$$\begin{aligned} \forall x \in \operatorname{Im}(f) \quad (f \circ g \circ f)(x) &= f(h^{-1}(p(f(x)))) \\ &= f(h^{-1}(f(x))) \text{ car } f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) \\ &= f(h^{-1}(h(x))) \text{ car } x \in \operatorname{Im}(f) \\ &= f(x) \\ \forall x \in \operatorname{Ker}(f) \quad (f \circ g \circ f)(x) &= f(g(f(x))) \\ &= f(g(0)) \text{ car } x \in \operatorname{Ker}(f) \\ &= 0 = f(x) \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit $f \circ g \circ f = f$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \operatorname{Im}(f) \quad (g \circ f \circ g)(x) &= g(f(h^{-1}(p(x)))) \\ &= g(f(h^{-1}(x))) \text{ car } x \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) \\ &= g(h(h^{-1}(x))) \text{ car } h^{-1}(x) \in \operatorname{Im}(f) \\ &= g(x) \\ \forall x \in \operatorname{Ker}(f) \quad (g \circ f \circ g)(x) &= g(f(h^{-1}(p(x)))) \\ &= g(f(h^{-1}(0))) \text{ car } x \in \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(p) \\ &= 0 \\ g(x) &= h^{-1}(p(x)) \\ &= h^{-1}(0) \text{ car } x \in \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit $g \circ f \circ g = g$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \operatorname{Im}(f) \quad (f \circ g)(x) &= f(h^{-1}(p(x))) \\ &= f(h^{-1}(x)) \text{ car } x \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) \\ &= h(h^{-1}(x)) \text{ car } h^{-1}(x) \in \operatorname{Im}(f) \\ &= x \\ (g \circ f)(x) &= h^{-1}(p(f(x))) \\ &= h^{-1}(f(x)) \text{ car } f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(p) \\ &= h^{-1}(h(x)) \text{ car } x \in \operatorname{Im}(f) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \text{Ker}(f) \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(0) = 0 \\
(f \circ g)(x) &= f(h^{-1}(p(x))) \\
&= f(h^{-1}(0)) \text{ car } x \in \text{Ker}(f) = \text{Ker}(p) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires, on en déduit $g \circ f = f \circ g$.
 f admet bien un pseudo-inverse.

On déduit de cette question et de la précédente :

f admet un pseudo-inverse $\iff \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$.

3. On suppose que f admet un pseudo-inverse.

Soit $x \in \text{Im}(f)$.

Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.

D'après la question précédente, il existe $y_I \in \text{Im}(f)$ et $y_K \in \text{Ker}(f)$ tels que $y = y_I + y_K$.

$x = f(y) = f(y_I)$.

$y_I \in \text{Im}(f)$ donc il existe $z \in E$ tel que $y_I = f(z)$.

$x = f(y_I) = f^2(z) \in \text{Im}(f^2)$

D'où $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(f^2)$.

Mais on a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ donc $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$.

En passant aux dimensions, on a $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$

On suppose $\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2)$.

Comme $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$, on en déduit $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

Soit $x \in E$.

$f(x) \in \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ donc il existe $y \in E$ tel que $f(x) = f^2(y)$.

$x = x - f(y) + f(y)$ avec $x - f(y) \in \text{Ker}(f)$ et $f(y) \in \text{Im}(f)$ donc $E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f)$.

La formule de Grassman donne alors :

$\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) - \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f))$

La formule du rang permet d'en déduire : $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f))$ ie $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

$\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires et d'après la question précédente, f admet un pseudo-inverse.