

ALGEBRE LINEAIRE

TD

2026-2027

Chapitre 2

Correction

941

1 Recherche d'éléments propres

Exercice 1 (*Centrale, ancien mais classique*)

Soit $\theta : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(P)(X) = P(X) - P(X-1)$. Déterminer le noyau, l'image et les valeurs propres de θ .

Correction :

Soit $P \in \text{Ker}(\theta)$.

$$P(X) = P(X-1).$$

Par une récurrence triviale, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = P(0)$$

Donc $Q(X) = P(X) - P(0)$ a une infinité de racines.

D'où $Q = 0$ ie $P(X) = P(0)$

Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$.

La réciproque est triviale.

$$\text{ker}(\theta) = \mathbb{R}_0[X]$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

P s'écrit $P = a_n X^n + (\deg \leq n-1)$ avec a_n éventuellement nul.

$$\begin{aligned} \theta(P)(X) &= a_n X^n + (\deg \leq n-1) - a_n (X-1)^n - (\deg \leq n-1) \\ &= a_n \left(X^n - (X^n - nX^{n-1} + \deg \leq n-2) \right) + \deg \leq n-1 \\ &= a_n (nX^{n-1} + \deg \leq n-2) + \deg \leq n-1 \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(\theta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

De plus :

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(\theta) &= \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \mathbb{R}_0[X] \\ &= n+1-1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(\theta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\theta(P) = \lambda P$.

$\theta(P)$ est de degré inférieur ou égal à $\deg(P) - 1$ en adaptant ce qui précède. (le degré de $\theta(P)$ vaut $-\infty$ si $P = Cte$).

Donc $\lambda = 0$ ou $P = 0$.

Donc $\text{Sp}(\theta) \subset \{0\}$.

Réciproquement 0 est bien valeur propre de θ car $\ker(\theta) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\}$.

Finalement : $\text{Sp}(\theta) = \{0\}$.

Exercice 2 (Centrale 2003, 2018)

$$A = X^4 - 1, B = X(X^3 - 1)$$

$$h \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow ? \\ P \mapsto R \end{cases} \quad \text{où } R \text{ est le reste de la division euclidienne de } AP \text{ par } B.$$

Montrer que h est un endomorphisme.

Déterminer son noyau, ses valeurs propres, ses vecteurs propres.

Correction :

Par définition de la division euclidienne :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \deg(h(P)) < \deg(B) = 4$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] h(P) \in \mathbb{R}_3[X]$$

h est une application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même.

Montrons que h est linéaire.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$AP = P_1B + h(P)$$

$$AQ = Q_1B + h(Q)$$

$$A(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P_1 + \mu Q_1)B + \lambda h(P) + \mu h(Q) \text{ avec } \lambda h(P) + \mu h(Q) \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$\text{Donc } h(\lambda P + \mu Q) = \lambda h(P) + \mu h(Q)$$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $h(P) = 0$.

$$\exists P_1 \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } AP = P_1B$$

$$\text{Or } B(0) = B(i) = B(j) = B(j^2) = 0$$

$$\text{Donc } A(0)P(0) = A(1)P(1) = A(j)P(j) = A(j^2)P(j^2) = 0$$

$$A(0) \neq 0, A(j) = j^4 - 1 = j - 1 \neq 0 \text{ et } A(j^2) = A(j) \neq 0 \text{ mais } A(1) = 0.$$

$$\text{Donc } P(0) = P(j) = P(j^2) = 0.$$

Donc $X(X^2 + X + 1)$ divise P (a priori dans $\mathbb{C}$ mais à cause de la division euclidienne dans $\mathbb{R}$).

Réciproquement, si P est de la forme $P = \alpha X(X^2 + X + 1)$:

$$\begin{aligned} AP &= (X^4 - 1)\alpha X(X^2 + X + 1) = (X^3 + X^2 + X + 1)(X - 1)\alpha X(X^2 + X + 1) \\ &= \alpha(X^3 + X^2 + X + 1)X(X - 1)(X^2 + X + 1) = \alpha(X^3 + X^2 + X + 1)X(X^3 - 1) \\ &= QB + 0 \end{aligned}$$

Donc $h(P) = 0$ et finalement :

$$\boxed{\text{Ker } h = \mathbb{R}X(X^2 + X + 1)}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $P \in \text{Ker}(h - \lambda Id)$.

$$\exists P_1 \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } (X^4 - 1)P(X) = P_1(X)X(X^3 - 1) + \lambda P(X)$$

On évalue en 1 : $P(1) = 0$ (car $\lambda \neq 0$)

On évalue en j : $(j - 1)P(j) = \lambda P(j)$ et $(\lambda + 1 - j)P(j) = 0$

$\lambda \in \mathbb{R}$ donc $\lambda + 1 - j \notin \mathbb{R}$ donc $\lambda + 1 - j \neq 0$

Donc $P(j) = 0$.

P est à coefficients réels donc $P(j^2) = 0$.

On évalue en 0 : $-P(0) = \lambda P(0)$ et $(\lambda + 1)P(0) = 0$.

Si $\lambda \neq -1$ alors $P(0) = P(1) = P(j) = P(j^2) = 0$ et $P = 0$ ($\deg(P) \leq 3$). λ n'est pas valeur propre de h .

Si $\lambda = -1$ alors $\text{Ker}(h + \text{Id}) \subset \mathbb{R}(X^3 - 1)$.

$A(X^3 - 1) + X^3 - 1 = (X^3 - 1)(X^4 - 1 + 1) = X^3 B(X)$

Donc $A(X^3 - 1) = X^3 B(X) + (-(X^3 - 1))$ avec $\deg(-(X^3 - 1)) < 4$.

Donc $h(X^3 - 1) = -(X^3 - 1)$.

Donc -1 est valeur propre de h et $E_{-1}(h) = \mathbb{R}(X^3 - 1)$.

Finalement :

- $\text{Sp}(h) = \{-1; 0\}$
- $E_0(h) = \text{Ker}(h) = \mathbb{R}X(X^2 + X + 1)$
- $E_{-1}(h) = \text{Ker}(h + \text{Id}) = \mathbb{R}(X^3 - 1)$

Exercice 3 (Centrale 2005)

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}[X]$ défini par :

$$f(P) = X P' + P(1)$$

Correction

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.

Il est commode d'écrire $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec $a_k = 0$ APCR.

$$f(P) = X \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k$$

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P &\iff \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^k = \lambda a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda a_k X^k \\ &\iff \begin{cases} \lambda a_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \\ \forall k \in \mathbb{N}^* (\lambda - k) a_k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Premier cas :** $\lambda \notin \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P &\iff \begin{cases} \lambda a_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \\ \forall k \in \mathbb{N}^* a_k = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (\lambda - 1) a_0 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* a_k = 0 \end{cases} \quad \lambda \neq 1 \text{ car } \lambda \notin \mathbb{N}^* \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

- **Deuxième cas :** $\lambda = d \in \mathbb{N}^*$

$$f(P) = \lambda P \iff \begin{cases} d a_0 = a_0 + a_d \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{d\} a_k = 0 \end{cases}$$

— **Premier sous-cas :** $d = 1$

$$f(P) = P \iff \begin{cases} a_d = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \ a_k = 0 \end{cases}$$

1 est valeur propre de f et $E_1(f) = \mathbb{R}_0[X]$

— **Deuxième sous-cas :** $d \geq 2$

$$f(P) = P \iff \begin{cases} a_d = (d-1)a_0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{d\} \ a_k = 0 \end{cases}$$

d est valeur propre de f et $E_d(f) = \mathbb{R}((d-1)X^d + 1)$

On peut unifier les expressions des vecteurs propres : $((1-1)X^1 + 1) = 1$.

Autre méthode

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = \lambda P$.

$$\forall x > 0 \ xP'(x) - \lambda P(x) = -P(1)$$

La solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ de $xy' - \lambda y = -C$ où C est une constante est :

$$y(x) = ax^\lambda + \frac{C}{\lambda} \text{ lorsque } \lambda \neq 0.$$

On examine d'abord le cas $\lambda = 0$.

$$\forall x > 0 \ P'(x) = \frac{-P(1)}{x}$$

P' ne peut être polynômiale que si $P(1) = 0$.

P' est alors nul et P est constant (sur $\mathbb{R}_+^*$).

On en déduit que P est le polynôme nul et que $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre.

On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

$$\forall x > 0 \ P(x) = ax^\lambda + \frac{P(1)}{\lambda}$$

Si λ n'est pas entier positif et est valeur propre alors $P = \frac{P(1)}{\lambda}$ est constant (on est obligé de prendre $a = 1$ pour que P soit un polynôme).

Réciproquement, si P est constant $f(P) = P$ donc :

Si λ est valeur propre alors $\lambda \in \mathbb{N}^*$

$\lambda = 1$ est valeur propre et $E_1(f) = \mathbb{R}_0[X]$.

Supposons $\lambda \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$.

$$\forall x > 0 \ P(x) = ax^\lambda + \frac{P(1)}{\lambda}$$

$$\text{En } x = 1, \ P(1) = a + \frac{P(1)}{\lambda} \text{ et } P(1) = \frac{a\lambda}{\lambda - 1}$$

Donc $P(X)$ est colinéaire à $(\lambda - 1)X^\lambda + 1$.

Il n'y a plus qu'à faire la réciproque.

Exercice 4 (Centrale 2018)

Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit $\varphi(f) : x \mapsto \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt$.

1. Montrer que $\varphi(f)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note toujours $\varphi(f)$ ce prolongement.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Etudier la parité de $\varphi(f)$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

Correction

1. Soit F la primitive de f nulle en 0.

$$F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(f)(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x}$$

$\varphi(f)$ est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

De plus :

$$\varphi(f)(x) = \frac{F(0) + xF'(0) + o(x) - (F(0) - xF'(0) + o(x))}{2x} = \frac{2xF'(0) + o(x)}{2x} \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} f(0)$$

$\varphi(f)$ est bien prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(f)(0) = f(0)$.

2. On vient de montrer que φ va de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Passons à la linéarité :

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \frac{1}{2x} \int_{-x}^x (\lambda f + \mu g)(t) dt \\ &= \frac{1}{2x} \int_{-x}^x (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt \\ &= \lambda \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt + \mu \frac{1}{2x} \int_{-x}^x g(t) dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Par continuité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x)$$

$$\text{et } \varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$$

φ est bien linéaire.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(f)(-x) = \frac{1}{-2x} \int_x^{-x} f(t) dt = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt = \varphi(f)(x)$$

Par continuité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(f)(-x) = \varphi(f)(x)$$

Quelque soit la fonction f , $\varphi(f)$ est paire.

3. On commence par le cas de 0.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(f) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F(x) = F(-x)$$

On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = -f(-x)$$

et par continuité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f(-x)$$

f est donc impaire.

Réciproquement, on suppose f impaire.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(f)(-x) &= \frac{1}{-2x} \int_x^{-x} f(t) dt \\ &= \frac{1}{-2x} \int_{-x}^x f(-u)(-du) \text{ changement de variable } t = -u \\ &= \frac{1}{-2x} \int_{-x}^x f(u) du \text{ car } f \text{ est impaire} \\ &= -\varphi(f)(x) \end{aligned}$$

Par continuité, $\varphi(f)$ est impaire.

$\varphi(f)$ est à la fois paire et impaire donc $\varphi(f) = 0$.

0 est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions impaires.

On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(f) = \lambda f$.

$f = \frac{1}{\lambda} \varphi(f)$ donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et f est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F(x) - F(-x) = 2\lambda x f(x)$$

On dérive :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) + f(-x) = 2\lambda(xf'(x) + f(x))$$

Par continuité et parité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x))$$

On en déduit :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$$

puis :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x > 0 \quad f(x) = Cx^{(1-\lambda)/\lambda}.$$

La parité donne :

$$\forall x \neq 0 \quad f(x) = C|x|^{(1-\lambda)/\lambda}.$$

Si on veut obtenir autre chose que la fonction nulle on doit avoir $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ ie $\lambda \in]0; 1]$.

Il ne reste plus qu'à étudier la réciproque.

Soit $\lambda \in]0; 1]$.

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^{(1-\lambda)/\lambda} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}.$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \varphi(f)(x) &= \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ car } f \text{ est paire} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x t^{1/\lambda-1} dt = \frac{1}{x} \left[\lambda t^{1/\lambda} \right]_0^x = \lambda x^{1/\lambda-1} \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Par parité et continuité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(f)(x) = \lambda f(x)$$

Les valeurs propres de f sont donc les éléments de $[0; 1]$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est l'ensemble des fonctions impaires.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in]0; 1]$ est la droite engendrée par la

$$\text{fonction } f_\lambda \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^{(1-\lambda)/\lambda} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}.$$

2 Propriétés des éléments propres

Exercice 5 (Centrale 2016)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si λ est valeur propre de uv alors λ est également valeur propre de vu .
2. On suppose $\lambda \neq 0$ et λ valeur propre de uv et de vu .
Montrer que $E_\lambda(uv)$ et $E_\lambda(vu)$ ont la même dimension.

Correction

1. On suppose que λ est valeur propre de uv .
Soit x un vecteur propre associé.
 $uv(x) = \lambda x$.
Donc $(vu)(v(x)) = \lambda v(x)$.
Si $v(x)$ est non nul alors c'est un vecteur propre de vu associé à la valeur propre λ .
Si $v(x) = 0$ alors $uv(x) = u(v(x)) = 0$ donc $\lambda x = 0$.
 x est un vecteur propre donc x est non nul et $\lambda = 0$.
Mais si 0 est valeur propre de uv , c'est que uv n'est pas inversible. vu ne peut alors l'être
($\det(vu) = \det(uv) = \det(u) \det(v)$) et 0 est valeur propre de vu .
2. Il résulte du raisonnement précédent que $\text{Ker}(v) \cap E_\lambda(uv) = \{0\}$ et $v(E_\lambda(uv)) \subset E_\lambda(vu)$
D'où $\dim(E_\lambda(uv)) \leq \dim(E_\lambda(vu))$.
Il suffit ensuite d'inverser les rôles de u et de v .

3 Diagonalisation : le point de vue géométrique

Exercice 6 (CCP 2022)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 2u + id_E = 0$ et $u \neq id_E$.

1. Montrer que $u \in GL(E)$ et déterminer u^{-1} .
2. (a) Montrer que $\text{Im}(u - id_E) \subset \text{Ker}(u - id_E)$
(b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de u .
L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Soient f et g deux projecteurs. Montrer :
 $f \circ g = g \iff \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$
4. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $v^2 = 0$.
Soit S un supplémentaire de $\text{Im}(v)$ dans E .
Soit p_1 la projection sur $\text{Im}(v)$ parallèlement à S .
On pose $q_1 = p_1 - v$.
Montrer que q_1 est un projecteur et que $\text{Im}(q_1) = \text{Im}(p_1)$.
5. Montrer qu'il existe p et q deux projecteurs tels que $u = p + q$ et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(q)$.

Correction

1. $u \circ (2id_E - u) = 2u - u^2 = id_E : u$ est inversible à droite d'inverse $2id_E - u$.
Comme on est en dimension finie, u est inversible d'inverse $2id_E - u$.
2. (a) Soit $y \in \text{Im}(u - id_E)$.
 $\exists x \in E$ tq $y = u(x) - x$.
 $u(y) - y = u(u(x) - x) - u(x) + x = u^2(x) - 2u(x) + x = 0$ car $u^2 - 2u + id_E = 0$.

- (b) Le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ annule u donc les valeurs propres de u sont racines de ce polynôme.

Donc $\text{Sp}(u) \subset \{1\}$.

Par ailleurs χ_u est un polynôme de degré $n \geq 1$ donc il a au moins une racine (théorème de d'Alembert-Gauss).

Donc $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$.

On en déduit $\text{Sp}(u) = \{1\}$.

Si u était diagonalisable avec une seule valeur propre égale à 1, on aurait $u = \text{id}_E$, ce qu'on a exclu.

Par conséquent, u n'est pas diagonalisable.

3. • $\implies$

Soit $y \in \text{Im}(g)$.

$\exists x \in E$ tq $y = g(x)$.

$f \circ g = g$ donc $y = g(x) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$

• $\impliedby$

Soit $x \in E$.

$g(x) \in \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$ donc $g(x) \in \text{Im}(f)$.

Donc, il existe $y \in E$ tq $g(x) = f(y)$.

On a alors :

$f(g(x)) = f(f(y)) = f^2(y) = f(y)$ car f est un projecteur.

Donc $f(g(x)) = g(x)$.

4. $q_1^2 = (p_1 - v)(p_1 - v) = p_1^2 - p_1v - vp_1 + v^2 = p_1 - p_1v - vp_1$

Dans la question précédente, on ne s'est pas servi de l'hypothèse g projecteur. Ici $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(p_1)$ et on a donc $p_1v = v$.

Soit $x \in E$.

$p_1(x) \in \text{Im}(p_1) \subset \text{Im}(v)$ donc il existe $y \in E$ tel que $p_1(x) = v(y)$.

Donc $vp_1(x) = v(p_1(x)) = v(v(y)) = 0$ car $v^2 = 0$.

Par conséquent, $vp_1 = 0$ et $q_1^2 = p_1 - v = q_1$: q_1 est un projecteur.

$q_1p_1 = (p_1 - v)p_1 = p_1^2 - vp_1 = p_1$ donc $\text{Im}(p_1) \subset \text{Im}(q_1)$.

$p_1q_1 = p_1(p_1 - v) = p_1 - p_1v = p_1 - v = q_1$ donc $\text{Im}(q_1) \subset \text{Im}(p_1)$

5. $v = u - \text{id}_E \neq 0$ et $v^2 = (u - \text{id}_E)^2 = 0$.

Donc il existe deux projecteurs p_1 et q_1 tels que $\text{Im}(p_1) = \text{Im}(q_1)$ et $v = p_1 - q_1$.

$u = v + \text{id}_E = p_1 + \text{id}_E - q_1$.

$p = p_1$ et $q = \text{id}_E - q_1$ sont des projecteurs tels que $u = p + q$.

Enfin $\text{Ker}(q) = \text{Ker}(\text{id}_E - q_1) = \text{Im}(q_1) = \text{Im}(p_1) = \text{Im}(p)$.

Exercice 7 (CCP 2011)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u .

L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Correction

$\text{Ker}(u) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P(-4) = P(6) = 0\}$

Si $n = 1$ alors $\text{Ker}(u) = \{0\}$, u est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Si $n \geq 2$, $\text{Ker}(u) = \{(X + 4)(X - 6)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$.

$\text{Ker}(u)$ est de dimension $n-1$ et $\text{Im}(u)$ est donc de dimension $n+1-(n-1)=2$ par la formule du rang.

Comme $\text{Im}(u) \subset \mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_1[X]$.

Si $n=1$, 0 n'est pas valeur propre de u .

Si $n \geq 2$, 0 est valeur propre de u et le sous-espace propres associé est $\text{Vect}((X+4)(X-6))$ de dimension $n-1$.

Comme remarqué en cours, si P est propre pour une valeur propre non nulle alors P est dans l'image de u .

On cherche donc d'éventuels nouveaux vecteurs propres, sous la forme $P(X) = aX + b$.

$$u(P) = (-4a + b)X + 6a + b$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(P) = \lambda P &\iff \begin{cases} -4a + b = \lambda a \\ 6a + b = \lambda b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = (\lambda + 4)a \\ 6a + (\lambda + 4)a = \lambda(\lambda + 4)a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = (\lambda + 4)a \\ (\lambda^2 + 3\lambda - 10)a = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = (\lambda + 4)a \\ (\lambda + 5)(\lambda - 2)a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\lambda \neq -5, 2$ alors :

$$u(P) = \lambda P \iff \begin{cases} b = (\lambda + 4)a \\ a = 0 \end{cases} \iff P = 0$$

λ n'est pas valeur propre de u .

Si $\lambda = -5$ alors :

$$u(P) = \lambda P \iff b = -a$$

-5 est valeur propre de u et $E_{-5}(u) = \mathbb{R}(X-1)$

Si $\lambda = 2$ alors :

$$u(P) = \lambda P \iff b = 6a$$

-5 est valeur propre de u et $E_2(u) = \mathbb{R}(X+6)$

La somme des dimensions des sous-espaces propres de u est $1 + 1 + n - 1 = n + 1$ (y compris dans le cas $n = 1$).

Comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$, on en déduit que u est diagonalisable.

Exercice 8 (X 2018)

Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n + 1$.

Soit φ_A l'application qui à $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de XP par A .

Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer ses valeurs propres.

Remarque

J'ajoute la question suivante :

Donner une CNS, portant sur A , pour que φ_A soit diagonalisable.

Correction

Par définition de la division euclidienne :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X] \deg(\varphi_A(P)) < \deg(A) = n + 1$$

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X] \varphi_A(P) \in \mathbb{C}_n[X]$$

φ_A est une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même.

Montrons que φ_A est linéaire.

Soient $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$XP = P_1A + \varphi_A(P)$$

$$XQ = Q_1A + \varphi_A(Q)$$

$$X(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P_1 + \mu Q_1)A + \lambda \varphi_A(P) + \mu \varphi_A(Q) \text{ avec } \lambda \varphi_A(P) + \mu \varphi_A(Q) \in \mathbb{C}_n[X]$$

$$\text{Donc } \varphi_A(\lambda P + \mu Q) = \lambda \varphi_A(P) + \mu \varphi_A(Q).$$

Passons aux valeurs propres de φ_A .

A se factorise en $\prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec des notations naturelles.

Soit P un polynôme propre pour φ_A .

$P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_A(P) = \lambda P$.

Il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $XP = QA + \lambda P$

$$(X - \lambda)P = QA$$

Pour des raisons de degré, Q est constant et P de degré n .

On en déduit que λ est l'une des racines de A , disons λ_{i_0} , et $P = c \frac{A}{X - \lambda_{i_0}}$.

Réciproquement :

$$\begin{aligned} X \frac{A}{X - \lambda_{i_0}} &= (X - \lambda_{i_0} + \lambda_{i_0}) \frac{A}{X - \lambda_{i_0}} \\ &= A + \lambda_{i_0} \frac{A}{X - \lambda_{i_0}} \end{aligned}$$

$\frac{A}{X - \lambda_{i_0}}$ est bien un élément non nul de $\mathbb{C}_n[X]$.

C'est donc un vecteur propre de φ_A .

On a donc $\text{Sp}(\varphi_A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et :

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \dim(E_{\lambda_i}(\varphi_A)) = 1$$

$$\text{Donc } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_A)} \dim(E_{\lambda}(\varphi_A)) = k$$

On en déduit :

$$\varphi_A \text{ diagonalisable} \iff A \text{ est scindé à racines simples}$$

Exercice 9 (X 2019)

$$\text{Soit } u \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow ? \\ P \mapsto X^n P \left(\frac{1}{X} \right) \end{cases}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. u est-elle diagonalisable ?
3. Éléments propres de u ?

Correction

$$1. \text{ Si } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ alors } u(P) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k.$$

On conclut facilement.

2. u est une symétrie donc u est diagonalisable.
3. Si $n = 0$, alors $s = id$.
On conclut facilement.
Si $n > 0$, alors $s \neq \pm id$.
Les valeurs propres de s sont -1 et 1 .
On suppose d'abord $n = 2p$ pair.
Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 est de dimension $p + 1$ et a pour base (par exemple) :

$$(X^n + 1, X^{n-1} + X, \dots, X^{p+1} + X^{p-1}, X^p)$$
Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre -1 est de dimension p et a pour base (par exemple) :

$$(X^n - 1, X^{n-1} - X, \dots, X^{p+1} - X^{p-1})$$
On suppose ensuite $n = 2p + 1$ impair.
Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 est de dimension $p + 1$ et a pour base (par exemple) :

$$(X^n + 1, X^{n-1} + X, \dots, X^{p+1} + X^p)$$
Le sous-espace propre de s associé à la valeur propre -1 est de dimension $p + 1$ et a pour base (par exemple) :

$$(X^n - 1, X^{n-1} - X, \dots, X^{p+1} - X^p)$$

Exercice 10 (CCP 2022)

Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k \end{cases}$

1. Montrer que cette application est un endomorphisme.
2. Déterminer $\varphi \circ \varphi$.
3. φ est-elle diagonalisable ?

Correction

1. Il s'agit de montrer que φ est linéaire et qu'elle va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Cela me paraît clair.
2. $\varphi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}_n[X]}$
3. φ étant une symétrie, elle est diagonalisable.
On peut aussi dire que le polynôme scindé à racines simples $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule φ .

Exercice 11 (Mines 2021)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad f(P) = (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1)$$

1. Déterminer l'image et le noyau de f .
2. f est-il diagonalisable ?

Correction

1. La linéarité de f est facile à établir.

Il est clair que le degré de $f(P)$ est plus petit que 2.

Dans la mesure où on suppose $n \geq 2$, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On a clairement $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(X^2 - X, X^2 + X)$.

Réciproquement, $f(X + 1) = 2(X^2 - X)$ donc $X^2 - X \in \text{Im}(f)$.

$f(X - 1) = -2(X^2 + X)$ donc $X^2 + X \in \text{Im}(f)$

Donc $\text{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) \subset \text{Im}(f)$ puis $\text{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) = \text{Im}(f)$.

$X^2 - X$ et $X^2 + X$ ne sont pas colinéaires donc :

$\text{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P(1) = P(-1)\} = \{(X^2 - 1)Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$

$\text{Ker}(f)$ est donc de dimension $\dim(\mathbb{R}_{n-2}[X]) = n - 1$, en accord avec la formule du rang.

2. 0 est valeur propre de f . Le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $f(P) = \lambda P$.

$\lambda \neq 0$ donc $P \in \text{Im}(f)$ et P est de la forme $P = a(X^2 - X) + b(X^2 + X)$.

$f(P) = 2b(X^2 - X) + 2a(X^2 + X)$.

Donc :

$$\begin{cases} 2b = \lambda a \\ 2a = \lambda b \end{cases}$$

Donc $b = \frac{\lambda}{2}a$ puis $2a = \frac{\lambda^2}{2}a$.

Donc si $\lambda \neq \pm 2$, $a = 0$ puis $b = 0$ et $P = 0$: λ n'est pas valeur propre.

SI $\lambda = 2$ alors $b = a$.

Réciproquement :

$f((X^2 - X) + X^2 + X) = f(2X^2) = 2(X^2 - X) + 2(X^2 + X) = 4X^2$

Donc 2 est valeur propre et $E_2(f) = \mathbb{R}X^2$.

SI $\lambda = -2$ alors $b = -a$.

Réciproquement :

$f((X^2 - X) - (X^2 + X)) = f(2X) = 2(X^2 - X) - 2(X^2 + X) = -4X$

Donc -2 est valeur propre et $E_{-2}(f) = \mathbb{R}X$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres est $n - 1 + 1 = 1 = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.

f est diagonalisable.

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie non nulle.

Soient f, u, v 3 endomorphismes de E tels que :

$$f = u + 2v$$

$$f^2 = u + 4v$$

$$f^3 = u + 8v$$

Montrer que f est diagonalisable.

Montrer que u et v sont des projections.

Correction

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} P(f) &= af^3 + bf^2 + cf = a(u + 8v) + b(u + 4v) + c(u + v) \\ &= (a + b + c)u + (8a + 4b + 2c)v = P(1)u + P(2)v \end{aligned}$$

Si on prend $P = X(X - 1)(X - 2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ alors $P(f) = 0$ avec P scindé à racines simples.

On en déduit que f est diagonalisable.

On prend ensuite $P = -X(X - 2)$ de sorte que $P = aX^3 + bX^2 + cX$ avec $a = 0$, $b = -1$ et $c = 2$.

$P(1) = 1$ et $P(2) = 0$ donc $P(f) = P(1)u + P(2)v = u$.

Par conséquent, $u^2 = P^2(f)$.

On effectue la division euclidienne de P^2 par $X(X - 1)(X - 2)$.

$P^2 = Q(X)X(X - 1)(X - 2) + R(X)$ avec R de degré inférieur ou égal à 2.

En évaluant cette relation en 0, on obtient $R(0) = 0$.

En évaluant cette relation en 2, on obtient $R(2) = 0$.

On a déjà $R(X) = \lambda P(X)$.

En évaluant en 1, on obtient $P(1)^2 = R(1) = \lambda P(1)$.

$P(1) = 1$ donc $\lambda = 1$ et $R(X) = P(X)$.

$u^2 = P^2(f) = Q(f)f(f - id)(f - 2id) + R(f) = R(f) = P(f) = u$ donc u est un projecteur.

On recommence avec $P = \frac{X(X - 1)}{2}$ de sorte que $P = aX^3 + bX^2 + cX$ avec $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{2}$.

$P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ donc $P(f) = P(1)u + P(2)v = v$.

Par conséquent, $v^2 = P^2(f)$.

On effectue la division euclidienne de P^2 par $X(X - 1)(X - 2)$.

$P^2 = Q(X)X(X - 1)(X - 2) + R(X)$ avec R de degré inférieur ou égal à 2.

En évaluant cette relation en 0, on obtient $R(0) = 0$.

En évaluant cette relation en 1, on obtient $R(1) = 0$.

On a déjà $R(X) = \lambda P(X)$.

En évaluant en 2, on obtient $P(2)^2 = R(2) = \lambda P(2)$.

$P(2) = 1$ donc $\lambda = 1$ et $R(X) = P(X)$.

$v^2 = P^2(f) = Q(f)f(f - id)(f - 2id) + R(f) = R(f) = P(f) = v$ donc v est un projecteur.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit σ une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sur lui-même.

Soit $f_\sigma \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad f_\sigma(e_k) = e_{\sigma(k)}$

Montrer que f est diagonalisable.

Correction

On montre par récurrence :

$\forall p \in \mathbb{N} \quad (f_\sigma)^p = f_{\sigma^p}$

L'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est fini donc : il existe deux entiers p et q avec $p < q$ tels que $\sigma^p = \sigma^q$.

On a donc $(f_\sigma)^p = (f_\sigma)^q$

Mais f_σ transforme une base en une autre base donc f_σ est inversible et $(f_\sigma)^{q-p} = id_E$.

f_σ est donc annulé par $X^{q-1} - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

On en déduit que f_σ est diagonalisable.

Exercice 14

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\varphi \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ g \mapsto g \circ f \end{cases}$.

Montrer :

φ diagonalisable $\iff f$ diagonalisable

Correction

On montre par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall g \in \mathcal{L}(E) \varphi^k(g) = g \circ f^k$$

On en déduit :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \forall g \in \mathcal{L}(E) P(\varphi)(g) = g \circ P(f)$$

Si f est diagonalisable, il existe P scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.

On a alors $P(\varphi) = 0$ avec P scindé à racines simples donc φ est diagonalisable.

Si φ est diagonalisable alors il existe P scindé à racines simples tel que $P(\varphi) = 0$.

On a donc :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E) g \circ P(f) = 0$$

En prenant $g = id_E$, on obtient $P(f) = 0$.

Comme P est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

Exercice 15

Soit E un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit f un automorphisme de E .

Montrer :

$$f \text{ diagonalisable} \iff f^2 \text{ diagonalisable.}$$

2. Soit f un endomorphisme de E .

Montrer :

$$f \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} f^2 \text{ diagonalisable} \\ \text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) \end{cases}$$

Correction

1. On suppose f diagonalisable.

Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E formée de vecteurs propres de f :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \exists \lambda_k \in \mathbb{C} \text{ tq } f(e_k) = \lambda_k e_k$$

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket f^2(e_k) = \lambda_k^2 e_k$$

Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f^2 et f^2 est diagonalisable.

Plus généralement, si P est un polynôme :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket P(f)(e_k) = P(\lambda_k) e_k$$

Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de $P(f)$ et $P(f)$ est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose f^2 diagonalisable.

$$f^2 \text{ est annulé par } \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f^2)} (X - \lambda)$$

f est inversible donc f^2 l'est aussi et 0 n'est pas valeur propre de f^2 .

Par conséquent, chaque valeur propre de f^2 a deux racines carrées distinctes $\omega(\lambda)$ et

$-\omega(\lambda)$.

Si $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres de f^2 alors $\pm\omega(\lambda) \neq \pm\omega(\mu)$: si il y avait égalité alors en élevant au carré on aurait $\lambda = \mu$.

Par conséquent le polynôme $Q = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f^2)} (X - \omega(\lambda))(X + \omega(\lambda))$ est scindé à racines simples.

$(f - \omega(\lambda)\text{id}_E)(f + \omega(\lambda)\text{id}_E) = f^2 - \omega(\lambda)^2\text{id}_E = f^2 - \lambda\text{id}_E$ donc Q annule f et f est diagonalisable.

2. On suppose f diagonalisable.

On reprend les notations de la première question :

Il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E formée de vecteurs propres de f :

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \exists \lambda_k \in \mathbb{C} \text{ tq } f(e_k) = \lambda_k e_k$

$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket f^2(e_k) = \lambda_k^2 e_k$

Donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de f^2 et f^2 est diagonalisable.

L'image de f est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $f(e_k) = \lambda_k e_k$ donc par les vecteurs e_k tels que $\lambda_k \neq 0$.

L'image de f^2 est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $f^2(e_k) = \lambda_k^2 e_k$ donc par les vecteurs e_k tels que $\lambda_k^2 \neq 0$.

Ce sont les mêmes que pour f donc f et f^2 ont la même image et par conséquent le même rang.

Réciproquement, on suppose que f^2 est diagonalisable et que f et f^2 ont le même rang. Si f est inversible, f est diagonalisable d'après la première question.

On suppose désormais que f n'est pas inversible.

f^2 n'est pas non plus inversible et 0 est valeur propre de f et de f^2 .

D'après la formule du rang, le noyau de f et le noyau de f^2 ont la même dimension.

Mais le noyau de f est toujours inclus dans celui de f^2 donc f et f^2 ont le même noyau.

f^2 est diagonalisable donc f^2 est annulé par $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f^2)} (X - \lambda)$ qu'on peut écrire

$XQ(X)$ avec $Q = 1$ ou Q scindé à racines simples qui ne s'annule pas en 0.

$f^2 \circ Q(f^2) = P(f) = 0$ donc l'image de $Q(f)$ est incluse dans le noyau de f^2 donc dans le noyau de f .

On en déduit $f \circ Q(f^2) = 0$.

On montre comme dans la première question que le polynôme $Q(X^2)$ est scindé à racines simples et pas plus que Q il ne s'annule en 0 (dans le cas où $Q = 1$, on a $f = 0$).

Donc le polynôme $XQ(X^2)$ est scindé à racines simples et annule f .

Par conséquent, f est diagonalisable.

Exercice 16 (*X 2019*)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

Montrer :

$(\exists v \in E \text{ tq } (v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)) \text{ est une base de } E) \iff \text{Card}(\text{Sp}(v)) = n$

Correction

On suppose qu'il existe v dans E tel que $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de E .

Si P est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ alors $P(f)(v)$ est une combinaison

linéaire des vecteurs de cette base dont les coefficients ne sont pas tous nuls. $P(f)(v)$ est donc un vecteur non nul et $P(f)$ un endomorphisme non nul.

Par conséquent, un polynôme annulateur non nul de f est de degré supérieur ou égal à n .

Mais f est diagonalisable donc f est annulé par $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)$ dont le degré est égal au cardinal

du spectre.

On en déduit que le cardinal du spectre de f est supérieur ou égal à n . Mais il ne peut pas être plus grand que la dimension de l'espace donc il est égal à n .

Réciproquement, on suppose que le cardinal du spectre est égal à n .

f a donc n valeurs propres 2 à 2 distinctes : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit x_i un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i (ie un vecteur non nul de $E_{\lambda_i}(f)$).

Soit $v = x_1 + \dots + x_n$.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1})$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(v) = 0$.

On note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ On a :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(v) = P(f)(v) = P(f) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(f)(x_i) = \sum_{i=1}^n P(\lambda_i) x_i \end{aligned}$$

Mais $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc c'est une famille libre.

Donc pour tout i compris entre 1 et n , $P(\lambda_i)$ est nul.

Donc P est de degré au plus $n-1$ et a au moins n racines deux à deux distinctes.

Donc P est le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls.

Donc la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est libre et au vu de son cardinal, c'est une base de E .

Exercice 17 (Centrale 2024)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et u un endomorphisme de E .

On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Montrer :

u diagonalisable $\iff u$ possède n valeurs propres distinctes

2. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .

Correction

1. On suppose que u est diagonalisable.

Soit $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

On a vu dans le cours que $P(u) = 0$.

En particulier $P(u)(x)$ est nul : cela donne une combinaison linéaire des vecteurs $(x, u(x), \dots, u^{\text{Card}(\text{Sp}(u))}(x))$ à coefficients non tous nuls qui est nulle. Or par hypothèse, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre donc $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \geq n$.

Mais on a toujours $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq \dim(E)$ qui vaut n en vertu des hypothèses.
Donc $\text{Card}(\text{Sp}(u)) = n$ ie u a n valeurs propres deux à deux distinctes.

Réciproquement si u a n valeurs propres deux à deux distinctes alors u est diagonalisable car, comme remarqué ci-dessus, n est la dimension de E .

2. u possède n valeurs propres deux à deux distinctes donc d'après le cours, il existe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad u(e_i) = \lambda_i e_i$$

les λ_i étant deux à deux distincts.

$$\text{Soit } x = \sum_{i=1}^n e_i.$$

Le déterminant de la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Il est non nul donc x convient.