

ANALYSE 1

2026-2027

Correction

Correction des exercices du premier chapitre du cours

941

Exercice 1

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et donner sa valeur.

Correction

On revient à la définition.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2}$ converge et donner sa valeur.

Correction

On revient à la définition.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq \frac{1}{1+t+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

D'après l'exercice précédent, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2}$ converge.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2} &= \int_0^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int_0^x \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^x \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^2} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

Exercice 3

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\cosh x} \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leq \frac{2}{e^x} = 2e^{-x}$$

On n'a pas encore vu la linéarité de l'intégration mais elle est claire.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \text{ converge donc } \int_0^{+\infty} 2e^{-x} dx \text{ converge.}$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X \frac{dx}{\cosh x} &= \int_0^X \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^X \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} dx \\ &= \int_1^{e^X} \frac{2}{1+t^2} dt \text{ changement de variable } t = e^x \\ &= 2 \left(\arctan(e^X) - \arctan 1 \right) = 2 \left(\arctan(e^X) - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

En faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e^x}} = e^{-x/2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx \text{ converge donc } \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Pour le calcul, on fait le changement de variable $t = \sqrt{e^x + 1}$.

$$dt = \frac{e^x dx}{2\sqrt{e^x + 1}} = \frac{t^2 - 1}{2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^X + 1}} \frac{2 dt}{t^2 - 1} = \left[\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^X + 1}} \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{e^X + 1} - 1}{\sqrt{e^X + 1} + 1} \right) - \ln \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \end{aligned}$$

En $+\infty$, $\sqrt{e^X + 1} - 1 \sim e^{X/2}$ et $\sqrt{e^X + 1} + 1 \sim e^{X/2}$ donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}\right) \\ &= 2\ln(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Exercice 5

Montrer que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$ diverge.

Correction

On revient à la définition.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est continue sur $[2; +\infty[$.

$$\forall X \in [2; +\infty[\quad \int_2^X \frac{1}{x \ln(x)} = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$$

Exercice 6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)$$

Correction

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} &= e \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{11}{96x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} &= e \left(1 - \frac{1}{6x} + \frac{11}{216x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ f(x) &= x^2 e \left(-\frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + \frac{1}{x} - \frac{11}{24x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{11}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 4 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 3 \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right) = \frac{11e}{72}}$$

Exercice 7

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{x \left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x} \right)}.$$

Limite l de f en 0 ? équivalent de $f(x) - l$?

Correction

On commence par chercher un équivalent du numérateur :

$$e^x - 1 = x + \dots$$

$$\ln(1+x) = x + \dots$$

et on s'arrête lorsqu'on a deux termes différents :

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{Donc } e^x - 1 - \ln(1+x) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$$

Compte tenu du x en facteur au dénominateur, on peut dans un premier temps se contenter d'un développement limité à l'ordre 1 de $\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x}$.

$$\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - (1+x) + o(x) = -\frac{x}{2} + o(x) \sim -\frac{x}{2}$$

La limite cherchée est donc -2 .

Passons à l'équivalent de $f(x) - l$.

$$\begin{aligned} f(x) - l &= f(x) + 2 \\ &= \frac{1}{x \left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x} \right)} \left(e^x - 1 - \ln(1+x) + 2x \left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{1-x} \right) \right) \end{aligned}$$

Le dénominateur est équivalent à $-\frac{x^2}{2}$.

On fait un développement limité à l'ordre 3 du numérateur en espérant que le coefficient de x^3 ne sera pas nul, auquel cas il faudrait recommencer.

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$2x\sqrt{1+x} = 2x + x^2 - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

$$\frac{2x}{1-x} = 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$$

Donc le numérateur est équivalent à : $-\frac{29}{12}x^3$.

Finalement : $f(x) - l \sim \frac{29}{6}x$.

Exercice 8 (Mines 2005)

On définit sur $]0, +\infty[$ f par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$

Peut-on prolonger f en 0 ? Tangente en zéro ? Position de la courbe par rapport à celle-ci ?

Correction

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}$$

Le numérateur est équivalent à $-\frac{1}{2}x^2$, le dénominateur à $\frac{1}{2}$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$.

En posant $f(0) = -\frac{1}{2}$, on prolonge f en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour avoir la tangente en 0, il faut faire un développement limité de f à l'ordre 1. Pour avoir la position par rapport à la tangente, il faut faire un développement limité à l'ordre 2 voire au delà.

On factorise x^2 au numérateur et au dénominateur (qui sont des infiniment petits d'ordre 2) :

$$f(x) = \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x^2}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Au dénominateur, un développement limité d'ordre 3 de $\ln(1+x)$ suffit mais au numérateur il faut un développement limité d'ordre 4.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right) + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{24}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

La tangente en 0 est donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12}x$.

La courbe est située sous sa tangente.

Exercice 9

Développement asymptotique en $\pm\infty$ de $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(On donnera trois termes)

Correction

En $\pm\infty$, $\frac{x}{x-1} \rightarrow 1$ donc $\frac{x}{x-1} > 0$ et :

$$f(x) = x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right)$$

D'après le formule de Taylor-Young :

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Exercice 10

Développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f : x \mapsto \frac{2x \ln x}{x-1}$.

Correction

On pose $x = 1 + h$ avec h qui tend vers 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2(1+h) \ln(1+h)}{h} = 2(1+h) \left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{h^2}{3} + o(h^2) \right) \\ &= 2 \left(1 + h - \frac{1}{2}h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2) \right) \\ &= 2 + h - \frac{h^2}{3} + o(h^2) \\ &= 2 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{3} + o((x-1)^2) \end{aligned}$$

Exercice 11

Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\arctan(2 \sin x) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$.

Correction

On pose $x = \frac{\pi}{6} + h$ avec h qui tend vers 0.

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3h\right) = -\sin(3h) \sim -3h$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos(h) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin(h) \\ &= \frac{1}{2} \cos(h) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(h) \\ 2 \sin(x) &= 1 + \sqrt{3}h + o(h) \end{aligned}$$

Par Taylor-Young :

$$\arctan(2 \sin(x)) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}h + o(h).$$

La réponse est donc $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Exercice 12

Développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de $\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$.

Correction

Par Taylor-Young :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$ donc :

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) &= \ln \left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= x + \ln \left(1 - \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= x + \ln \left(1 - \frac{x^{n+1}(1 + o(1))}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= x + \ln \left(1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \\ &= x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

Exercice 13

Développement limité à l'ordre 9 en 0 de la fonction $x \mapsto [\ln(\cos(x))]^3$.

Correction

$$\ln(\cos(x)) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{On écrit } [\ln(\cos(x))]^3 = \left(-\frac{x^2}{2} \right)^3 \left[\frac{\ln(\cos(x))}{-\frac{x^2}{2}} \right]^3 = -\frac{x^6}{8} \left[-2 \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \right]^3$$

Il suffit d'utiliser un développement limité à l'ordre 3 de $\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ donc un développement limité à l'ordre 5 de $\ln(\cos(x))$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \\ \ln(\cos(x)) &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right)^2 + o(x^5) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5) \\ -2 \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} &= 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3) \\ \left[-2 \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \right]^3 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

La réponse est $-\frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{16} + o(x^9)$.

Exercice 14 (Mines Telecom 2024)

Soit $f : x \mapsto x e^{x^2}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un DL à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

Correction

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^{x^2} + x \cdot 2x e^{x^2} = (1 + 2x^2) e^{x^2} > 0$$

f est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Comme la dérivée de f ne s'annule jamais, sa bijection réciproque est également de classe $\mathcal{C}^\infty$.

D'après la formule de Taylor-Young, $g = f^{-1}$ possède un développement limité à l'ordre 5 en 0.

$$f(0) = 0 \text{ donc } g(0) = 0.$$

En fait, f est impaire donc g aussi.

$$f'(0) = 1 \text{ donc } g'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

$$\text{On a donc } g(x) = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5).$$

$$f(x) = x e^{x^2} = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

Donc :

$$\begin{aligned} x &= f(g(x)) = g(x) + g(x)^3 + \frac{1}{2}g(x)^5 + o(g(x)^5) \\ &= x + ax^3 + bx^5 + x^3 + 3ax^5 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5) \\ &= x + (a+1)x^3 + \left(b + 3a + \frac{1}{2}\right)x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

On en déduit $a = -1$ et $b = \frac{5}{2}$ et finalement :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5)$$

Exercice 15

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{x})} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- En $+\infty$, $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$ et $\ln(1+\sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$$\text{Donc } f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.

- En 0, $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = O(1)$ et $\ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$.

$$\text{Donc } f(x) = O_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0 donc f est intégrable en 0.

Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16

La fonction $f \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $[1; +\infty[$?

Correction

f est continue sur $[1; +\infty[$.

$$x^2 f(x) = \exp\left(2 \ln x - \sqrt{x^2 - x}\right)$$

$\sqrt{x^2 - x} \sim x$ et $\ln x = o(x)$ (en $+\infty$).

Donc $2 \ln x - \sqrt{x^2 - x} \sim -x$ et $2 \ln x - \sqrt{x^2 - x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Donc $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f est intégrable en $+\infty$.

Exercice 17

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{e^x + x^2 e^{-x}} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction

f est continue sur $\mathbb{R}$.

• En $+\infty$, $f(x) \sim e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

• En $-\infty$, $f(x) \sim \frac{e^x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Par parité, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $-\infty$ donc f est intégrable en $-\infty$.

Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 (Mines 2019)

1. $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx$: y a-t-il convergence ? Si oui, calculer sa valeur.
2. Mêmes questions pour $\int_0^1 x \ln(x) dx$.
3. Pour quelles valeurs de α , $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge-t-elle ?

Correction

1. L'intégrale diverge :

La fonction $\begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{cases}$ est continue mais :

$$\forall X \in]0; 1[\quad \int_X^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_X^1 = -\frac{(\ln(X))^2}{2} \xrightarrow{X \rightarrow 0^+} -\infty$$

2. L'intégrale converge :

La fonction $\begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln(x) \end{cases}$ est continue sur $]0; 1]$, prolongeable en une fonction continue sur $[0; 1]$.

Pour le calcul de l'intégrale on fait une IPP :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x & v(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

L'intégration par parties est justifiée :

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$ et $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$

De plus $u(1)v(1) = 0$ donc :

$$\int_0^1 x \ln(x) dx = - \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{4}$$

3. La réponse est $\alpha < 1$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \end{cases}$ est continue.

On suppose d'abord $\alpha < 1$.

$$x^{(1+\alpha)/2} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = x^{(1-\alpha)/2} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ car } \frac{1-\alpha}{2} > 0.$$

$$\text{Donc } \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = o_0 \left(\frac{1}{x^{(1+\alpha)/2}} \right) \text{ avec } \frac{1+\alpha}{2} < 1$$

Donc f_α est intégrable sur $]0; 1]$ et $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ converge absolument donc converge.

Supposons ensuite $\alpha \geq 1$.

$$\forall x \in]0; 1] \quad \frac{1}{x^\alpha} = e^{-\alpha \ln(x)} \geq e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x} \text{ car } -\ln(x) \geq 0$$

On en déduit :

$$\forall x \in]0; 1] \quad \frac{-\ln(x)}{x^\alpha} \geq \frac{-\ln(x)}{x} \geq 0$$

D'après la première question $\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x^\alpha} dx$ diverge et $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^\alpha} dx$ diverge.

Remarque

On peut aussi utiliser :

$$\forall x \in]0; e^{-1}] \quad \frac{-\ln(x)}{x^\alpha} \geq \frac{1}{x^\alpha} \geq 0$$

Exercice 19

La fonction $f \begin{cases} [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)} \right)^{\sqrt[3]{x}} - 1 \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction

f est continue sur $[2; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp \left(\sqrt[3]{x} \ln \left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)} \right) \right) - 1 = \exp \left(\sqrt[3]{x} \ln \left(\frac{\ln x}{\ln x + \ln(1+1/x)} \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-\sqrt[3]{x} \ln \left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-\sqrt[3]{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x \ln x} + O \left(\frac{1}{x^2 \ln x} \right) \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-\sqrt[3]{x} \left(\frac{1}{x \ln x} + O \left(\frac{1}{x^2 \ln x} \right) \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-\frac{1}{x^{2/3} \ln x} + o \left(\frac{1}{x^{2/3} \ln x} \right) \right) - 1 \\ &\sim -\frac{1}{x^{2/3} \ln x} \end{aligned}$$

On en déduit $x |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Classiquement, on en déduit que f n'est pas intégrable sur $[2; +\infty[$.

En effet, au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{x} = o(f(x))$. Si f était intégrable sur $[2; +\infty[$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ le serait aussi ce qui est absurde.

Remarque :

Les calculs sont plus rapides en écrivant $f(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{-x^{1/3}} - 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\ln x}{\ln(1+x)} \right)^{\sqrt[3]{x}} - 1 = \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{-\sqrt[3]{x}} - 1 \\ &= \exp \left(-x^{1/3} \ln \left(\frac{\ln(x) + \ln(1+1/x)}{\ln(x)} \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-x^{1/3} \ln \left(1 + \frac{1}{x \ln x} + O \left(\frac{1}{x^2 \ln x} \right) \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-\sqrt[3]{x} \left(\frac{1}{x \ln x} + O \left(\frac{1}{x^2 \ln x} \right) \right) \right) - 1 \\ &= \exp \left(-\frac{1}{x^{2/3} \ln x} + o \left(\frac{1}{x^{2/3} \ln x} \right) \right) - 1 \\ &\sim -\frac{1}{x^{2/3} \ln x} \end{aligned}$$

Exercice 20 (Centrale 2007, Mines 2018)

La fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(1+x^a)}{x^b} \end{cases}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Correction

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Cas** $a = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{\ln 2}{x^b}.$$

f n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Cas** $a > 0$

— **En** 0

$$x^a \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} 0 \text{ donc } f(x) \sim \frac{1}{x^{b-a}}.$$

f est intégrable sur $]0; 1] \iff b - a < 1$

— **En** $+\infty$

$$x^a \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ donc } 1 + x^a \sim x^a.$$

Comme ce sont des infiniment grands, $\ln(1+x^a) \sim \ln(x^a) = a \ln x$

$$\text{Donc } f(x) \sim a \frac{\ln x}{x^b}.$$

Si $b > 1$ alors f est intégrable sur $[1; +\infty[$:

$$x^{(1+b)/2} f(x) \sim \frac{a \ln(x)}{x^{(b-1)/2}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } \frac{b-1}{2} > 0$$

$$\text{Donc } f(x) = o \left(\frac{1}{x^{(b+1)/2}} \right).$$

$$\frac{b+1}{2} > 1 \text{ donc la fonction } x \mapsto \frac{1}{x^{(b+1)/2}} \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[.$$

Donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par contre si $b \leq 1$, $xf(x) \sim ax^{1-b} \ln(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ car $1-b \geq 0$.

Donc, au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{x} = o(f(x))$. Si f était intégrable sur $[1; +\infty[$, la fonction

$x \mapsto \frac{1}{x}$ le serait aussi ce qui est absurde.

On a donc prouvé :

f est intégrable sur $[1; +\infty[\iff b > 1$

Donc :

f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff 1 < b < 1 + a$

• **Cas** $a < 0$

— **En** 0

$$f(x) \sim a \frac{\ln x}{x^b}$$

— **En** $+\infty$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{b-a}}$$

Donc¹ :

f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff 1 + a < b < 1$

Finalement :

f intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff b$ est strictement compris entre 1 et $1 + a$

Exercice 21

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2} dx$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2} \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{(1+0^2)^2} = 0$$

Donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale n'est qu'impropre qu'à droite.

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{x^8} = \frac{\ln x}{x^5}$$

$$\text{Donc } x^2 f(x) \sim \frac{\ln x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Classiquement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln t}{t^3 \left(1 + \frac{1}{t^4}\right)^2} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \quad x = \frac{1}{t} \text{ } \mathcal{C}^1 \text{ strictement décroissant} \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^2} dt \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^2} dx = 0$$

Planche 1 (Centrale 2021)

1. En toute rigueur, il faudrait détailler l'étude en 0 sur le modèle de ce qui a été fait au voisinage de $+\infty$ dans le cas précédent.

$$g(x) = \int_{\pi}^x |\sin(t)| \, dt - \frac{2}{\pi}(x - \pi)$$

$$F(x) = \int_{\pi}^x \frac{|\sin(t)|}{t} \, dt$$

Trouver un équivalent de F en $+\infty$ à l'aide de g .

Correction

$$\begin{aligned} \forall x > \pi \quad F(x) &= \int_{\pi}^x \frac{1}{t} \left(|\sin(t)| - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right) dt \\ &= \int_{\pi}^x \frac{1}{t} g'(t) \, dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^x \frac{dt}{t} \\ &= \left[\frac{g(t)}{t} \right]_{\pi}^x + \int_{\pi}^x \frac{g(t)}{t^2} \, dt + \frac{2}{\pi} (\ln(x) - \ln(\pi)) \\ &= \frac{g(x)}{x} + \int_{\pi}^x \frac{g(t)}{t^2} \, dt + \frac{2}{\pi} (\ln(x) - \ln(\pi)) \end{aligned}$$

Soit $x > \pi$.

Soit $n = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$.

$n \leq \frac{x}{\pi} < n+1$ donc $n\pi \leq x < (n+1)\pi$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\pi}^{n\pi} |\sin(t)| \, dt + \int_{n\pi}^x |\sin(t)| \, dt - \frac{2}{\pi}(x - \pi) \\ &= (n-1) \int_0^{\pi} |\sin(t)| \, dt + \int_{n\pi}^x |\sin(t)| \, dt - \frac{2}{\pi}((n-1)\pi + x - n\pi) \\ &= 2(n-1) + \int_{n\pi}^x |\sin(t)| \, dt - 2(n-1) - \frac{2}{\pi}(x - n\pi) \end{aligned}$$

$$|g(x)| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| \, dt + \frac{2}{\pi}((n+1)\pi - n\pi) = 4$$

g est donc bornée sur $[\pi; +\infty[$.

On en déduit que $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x \mapsto \frac{g(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[\pi; +\infty[$.

On en déduit que $F(x) \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \ln(x)$

Exercice 22

Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} x^7 \cos(x^{10}) \, dx$?

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^7 \cos(x^{10}) \end{cases}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\int_0^{+\infty} x^7 \cos(x^{10}) \, dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} x^7 \cos(x^{10}) \, dx$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant : $x = t^{1/10}$.

$\int_1^{+\infty} x^7 \cos(x^{10}) \, dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} t^{7/10} \cos t \frac{1}{10} t^{-9/10} \, dt$ ou encore $\frac{1}{10} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/5}} \, dt$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/5}} \, dt$ converge :

on procède à une IPP :

$$u(t) = \frac{1}{t^{1/5}} = t^{-1/5}, u'(t) = -\frac{1}{5}t^{-6/5} = \frac{-1}{5t^{6/5}}$$

$$v'(t) = \cos t, v(t) = \sin t$$

$$u \text{ et } v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1; +\infty[\text{ et } u(t)v(t) = \frac{\sin t}{t^{1/5}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

L'IPP est donc justifiée et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{1/5}} dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{6/5}} dt$

Mais :

$$\forall t \geq 1 \quad \left| \frac{\sin t}{t^{6/5}} \right| \leq \frac{1}{t^{6/5}}$$

$\frac{6}{5} > 1$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{6/5}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{6/5}} dt$ converge absolument donc converge.

Finalement :

$$\int_0^{+\infty} x^7 \cos(x^{10}) dx \text{ converge}$$

Remarque :

$$\text{Soit } F \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x t^7 \cos(t^{10}) dt \end{cases}.$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) et $F(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}$.

Pourtant F' n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1} dx$?

Correction

$$\text{Soit } f \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1} \end{cases}.$$

f est continue sur $[1; +\infty[$.

$$\text{En } +\infty, f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2} \frac{1}{1 + 1/x + 1/x^2} = \frac{\sin x}{x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On a vu cours que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge. C'est un résultat classique mais qu'il faut redémontrer.

on procède à une IPP :

$$u(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$v'(x) = \sin x, v(x) = -\cos x$$

$$u \text{ et } v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [1; +\infty[\text{ et } u(x)v(x) = \frac{-\cos x}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

L'IPP est donc justifiée et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

Mais :

$$\forall x \geq 1 \quad \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$2 > 1$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge absolument donc converge.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Par ailleurs, si $g(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de ∞ alors g est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ converge absolument donc converge et finalement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1} dx \text{ converge}$$

Exercice 24

Quelle est la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}} dx$?

Correction

Soit $f \begin{cases} [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}} \end{cases}$.

f est continue sur $[2; +\infty[$.

$xf(x) = \exp\left(\ln x - (\ln(\ln x))^2\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$\exists x_0 \in [2; +\infty[$ tq $\forall x \geq x_0$ $f(x) \geq \frac{1}{x} \geq 0$.

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}} dx$ diverge.