

1 Exemples de normes

Exercice 1 (*Centrale 2015, planche complète*)

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, dt$.

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient $(a, b) \in [0; 1]^2$.

Montrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_b(P) \leq 2N_a(P)$$

Correction

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Il est clair que si $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+$.
-

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] \quad N_a(\lambda P) &= |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| \, dt \\ &= |\lambda| |P(a)| + \int_0^1 |\lambda| |P'(t)| \, dt = \lambda \left(|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, dt \right) \\ &= |\lambda| N_a(P) \end{aligned}$$

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tq $N_a(P) = 0$.

$$(|P(a)| \geq 0) + \left(\int_0^1 |P'(t)| \, dt \geq 0 \right) = 0$$

$$\text{Donc } |P(a)| = \int_0^1 |P'(t)| \, dt = 0.$$

Mais $|P'|$ est une fonction continue et positive donc :

$$\forall t \in [0; 1] \quad |P'(t)| = 0$$

On en déduit :

$$\forall t \in [0; 1] \quad P'(t) = 0$$

puis P est constant.

Mais $P(a) = 0$ donc P est le polynôme nul.

•

$$\begin{aligned}
\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad N_a(P + Q) &= |P(a) + Q(a)| + \int_0^1 |P'(t) + Q'(t)| \, dt \\
&\leq |P(a)| + |Q(a)| + \int_0^1 (|P'(t)| + |Q'(t)|) \, dt \\
&\leq |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| \, dt + |\lambda Q(a)| + \int_0^1 |\lambda Q'(t)| \, dt \\
&\leq N_a(P) + N_a(Q)
\end{aligned}$$

N_a est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}
|P(b)| &= \left| P(a) + \int_a^b P'(t) \, dt \right| \\
&\leq |P(a)| + \left| \int_a^b P'(t) \, dt \right| \\
&\leq |P(a)| + \int_{[a;b] \text{ ou } [b;a]} |P'| \\
&\leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \, dt = N_a(P)
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 |P'(t)| \, dt \leq N_a(P)$$

D'où :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_b(P) \leq 2N_a(P)$$

L'examinateur a demandé si l'inégalité restait vraie en ne prenant plus $a, b \in [0; 1]$.

La réponse est non car :

$$\begin{aligned}
N_a(X^n) &= a^n + \int_0^1 nx^{n-1} \, dx \\
&= a^n + 1 \\
&\sim a^n \text{ si } a > 1
\end{aligned}$$

Si $b > a > 1$, on ne peut pas avoir $N_b \leq CN_a$.

Exercice 2

$$\text{Soit } N \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| \end{cases}$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner $\mathcal{B}_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.

Correction

1. • Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $N(u)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+$.

- Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
 N(u) = 0 &\iff \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| = 0 \\
 &\iff \forall t \in [0,1] \quad |x + ty| = 0 \\
 &\iff \forall t \in [0,1] \quad x + ty = 0 \\
 &\implies x = y = 0 \\
 &\implies u = 0
 \end{aligned}$$

En effet si la fonction polynomiale $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto x + ty \end{cases}$ est nulle sur $[0, 1]$ qui est infini, c'est la fonction nulle et $x = y = 0$.
La réciproque est triviale.

-

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda(x, y)) &= \sup_{t \in [0,1]} |\lambda x + t\lambda y| \\
 &= \sup_{t \in [0,1]} |\lambda| |x + ty| \\
 &= |\lambda| \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| \text{ car } |\lambda| \in \mathbb{R}_+
 \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad N((x, y) + (x', y')) &= N((x + x', y + y')) \\
 &= \sup_{t \in [0,1]} |x + x' + t(y + y')| \\
 &= \sup_{t \in [0,1]} |x + ty + x' + ty'|
 \end{aligned}$$

Or :

$$\forall t \in [0, 1] \quad |x + ty + x' + ty'| \leq |x + ty| + |x' + ty'| \leq N((x, y)) + N((x', y'))$$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad N((x, y) + (x', y')) \leq N((x, y)) + N((x', y'))$$

N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$

2. Première méthode

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Lorsque t croît de 0 à 1, $x + ty$ croît de x à $x + y$ si y est positif ou décroît de x à $x + y$ si y est négatif.

Donc $N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$. D'où :

$$N(x, y) \leq 1 \iff \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x + y| \leq 1 \end{cases}$$

Donc la boule unité pour N est un parallélogramme.

Deuxième méthode

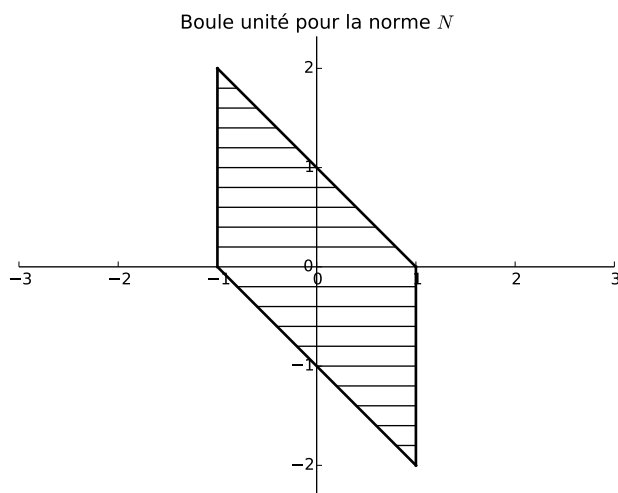
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} N((x, y)) \leq 1 &\iff \forall t \in [0, 1] \quad |x + ty| \leq 1 \\ &\iff \forall t \in [0, 1] \quad -1 \leq x + ty \leq 1 \\ &\implies \begin{cases} |x| \leq 1 \text{ (on prend } t = 0) \\ |x + y| \leq 1 \text{ (on prend } t = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Réciproquement on suppose $|x| \leq 1$ et si $|x + y| \leq 1$

$$x + ty = t(y + x) + (1 - t)x$$

Or x et $y + x$ appartiennent à $[-1; 1]$ qui est une partie convexe de $\mathbb{R}$ donc $x + ty \in [0, 1]$ et $N((x, y)) \leq 1$



Exercice 3 (X 2014)

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_i|$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Montrer : } \sup_{\|X\|_\infty=1} (\|AX\|_\infty) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

2. On considère cette fois-ci : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

$$\text{Montrer : } \sup_{\|X\|_1=1} (\|AX\|_1) = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

Correction

1. On note $M_A = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\|X\|_\infty = 1$.

$$\begin{aligned}
 \|AX\|_\infty &= \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \right) \\
 &\leq \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \right) \\
 &\leq \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \right) \\
 &\leq \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|X\|_\infty \right) \\
 &\leq \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \text{ car } \|X\|_\infty = 1 \\
 &\leq M_A
 \end{aligned}$$

De plus, il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $x_j = 1$ si $a_{i_0,j} \geq 0$, -1 sinon.

$\|X_0\|_\infty = 1$ et :

$$M_A \geq \|AX_0\|_\infty \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$$

On a donc établi :

- i** Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\|_\infty = 1$, $\|AX\|_\infty \leq M_A$
- ii** Il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X_0\|_\infty = 1$ et $\|AX_0\|_\infty = M_A$

D'où le résultat et plus précisément :

$$\max_{\|X\|_\infty=1} (\|AX\|_\infty) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$$

2. On note $N_A = \max_{j \in \llbracket 1; n \rrbracket} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\|X\|_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|x_j| N_A) = N_A \sum_{j=1}^n |x_j| = N_A \end{aligned}$$

De plus, il existe $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = N_A$.

Soit X_0 le vecteur d'indice j_0 de la base canonique.

$$AX_0 = \begin{pmatrix} a_{1,j_0} \\ \vdots \\ a_{n,j_0} \end{pmatrix} \text{ donc } \|X_0\|_1 = 1 \text{ et } \|AX_0\|_1 = N_A.$$

On conclut comme dans le premier cas.

Exercice 4 (Centrale maths 1 2022)

Pour tout polynôme à coefficients réels P et tout entier n , on pose $a_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n dt$.

Pour tout polynôme à coefficients réels P , on pose :

$$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|, \quad N_\infty(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n(P)|, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2}$$

1. Justifier que ces quantités sont bien définies.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$, N_∞ et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Trouver des constantes α et β strictement positives telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P) \text{ et } N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$$

4. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes entre elles.

Correction

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - $|P|$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc d'après le théorème des bornes atteintes $|P|$ est bornée sur $[0; 1]$ et atteint ses bornes. $\|P\|_\infty$ existe donc, c'est même un maximum.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n(P)| \leq \int_0^1 |P(t)| t^n dt \leq \|P\|_\infty \int_0^1 t^n dt = \frac{\|P\|_\infty}{n+1} \leq \|P\|_\infty$ indépendant de n

On en déduit que $N_\infty(P)$ est bien défini : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n(P)^2 \leq \frac{\|P\|_\infty^2}{(n+1)^2}$

Donc la série de terme général $a_n(P)^2$ converge.

2. • $\|\cdot\|_\infty$ est une norme.

— $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \|P\|_\infty \in \mathbb{R}_+$

— $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \|\lambda P\|_\infty = \sup_{t \in [0;1]} (|\lambda| |P(t)|) = |\lambda| \sup_{t \in [0;1]} |P(t)|$ car $|\lambda| \in \mathbb{R}_+$

Donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \|\lambda P\|_\infty = |\lambda| \|P\|_\infty$$

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P\|_\infty = 0$.

$$\forall t \in [0;1] \quad P(t) = 0$$

P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.

— Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

$$\forall t \in [0;1] \quad |(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty \text{ indépendant de } t$$

$$\text{Donc } \|P+Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$$

- N_∞ est une norme.

— $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_\infty(P) \in \mathbb{R}_+$

— $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_\infty(\lambda P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\lambda| |a_n(P)|) = |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n(P)|$ car $|\lambda| \in \mathbb{R}_+$

Donc :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_\infty(\lambda P) = |\lambda| N_\infty(P)$$

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N_\infty(P) = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 P(t) t^n dt = 0$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \int_0^1 P(t) Q(t) dt = 0$$

$$\text{En particulier : } \int_0^1 P(t)^2 dt = 0.$$

Mais P^2 est une fonction continue et positive donc :

$$\forall t \in [0;1] \quad P(t)^2 = 0$$

P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.

— Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n(P+Q)| = |a_n(P) + a_n(Q)| \leq |a_n(P)| + |a_n(Q)| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$$

indépendant de n

$$\text{Donc } N_\infty(P+Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$$

- N_2 est une norme.

— $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_2(P) \in \mathbb{R}_+$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_2(\lambda P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^2 a_n(P)^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2} =$$

$$|\lambda| N_2(P)$$

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N_2(P) = 0$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(P)^2 \geq 0) = 0$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \int_0^1 P(t)t^n dt = 0$$

On en déduit comme ci-dessus que P est le polynôme nul.

— Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$.

L'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^{N+1}$ muni de sa structure euclidienne canonique donne :

$$\sqrt{\sum_{n=0}^N a_n(P+Q)^2} = \sqrt{\sum_{n=0}^N (a_n(P) + a_n(Q))^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^N a_n(P)^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^N a_n(Q)^2}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q)$

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\forall N \in \mathbb{N} \ a_N(P)^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2 = N_2(P)^2$$

Donc :

$$\forall N \in \mathbb{N} \ |a_N(P)| \leq N_2(P) \text{ indépendant de } N$$

$$\text{Donc } N_\infty(P) \leq N_2(P).$$

Supposons qu'il y ait égalité avec $P \neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |a_n(P)| \leq \frac{\|P\|_\infty}{n+1}$$

$$\text{Donc } a_n(P) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \ |a_n(P)| \leq \frac{1}{2} N_\infty(P) \ (P \neq 0 \text{ donc } N_\infty(P) > 0)$$

$\llbracket 0; n_0 \rrbracket$ étant fini :

$$\exists N_0 \in \llbracket 0; n_0 \rrbracket \text{ tel que } \forall n \in \llbracket 0; n_0 \rrbracket \ |a_n(P)| \leq |a_{N_0}(P)|$$

$$|a_{N_0}(P)| > \frac{1}{2} N_\infty(P) \text{ car sinon :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |a_n(P)| \leq \frac{1}{2} N_\infty(P)$$

$$\text{puis } N_\infty(P) \leq \frac{1}{2} N_\infty(P) \text{ avec } N_\infty(P) > 0$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ |a_n(P)| \leq |a_{N_0}(P)|$$

Donc $|a_{N_0}(P)| = N_\infty(P)$ puis :

$$a_{N_0}(P)^2 = N_\infty(P)^2 = N_2(P)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P)^2$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{N_0\} \ a_n(P) = 0$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ a_n(X^{N_0+1}P) = a_{N_0+n+1}(P) = 0$$

Donc $X^{N_0+1}P = 0$ et $P = 0$: contradiction.

Reste deux possibilités : améliorer l'inégalité ou trouver une suite de polynômes non nuls

$$\text{telle que } \frac{N_\infty(P_n)}{N_2(P_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Avec } P = 1, \text{ on trouve } C \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}} \simeq 0,78$$

Avec $P = X - 1$, on trouve $C \geq \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2 - 9}{3}}} \simeq 0,93$

Une exploration numérique suggère que les polynômes $(X - 1)^p$ pourraient être les bons. On va plutôt prendre $P_p = (1 - X)^p$ qui est positif qu $[0; 1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(P_p) = \int_0^1 t^n (1 - t)^p dt \leq \int_0^1 (1 - t)^p dt = a_0(P_p)$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n(P_p)| = a_n(P_p) \leq a_0(P_p) \leq |a_0(P_p)|$$

Donc :

$$N_\infty(P_p) = \int_0^1 (1 - t)^p dt = \left[\frac{-(1 - t)^{p+1}}{p + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{p + 1}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad 0 \leq a_n(P_p) &= \int_0^1 t^n (1 - t)^p dt = \left[t^n \frac{-(1 - t)^{p+1}}{p + 1} \right]_0^1 + \frac{n}{p + 1} \int_0^1 t^{n-1} (1 - t)^{p+1} dt \\ &= \frac{n}{p + 1} \int_0^1 t^{n-1} (1 - t)^{p+1} dt \\ &= \frac{n(n-1) \dots 1}{(p+1)(p+2) \dots (p+n)} \int_0^1 (1 - t)^{p+n} dt \\ &= \frac{n(n-1) \dots 1}{(p+1)(p+2) \dots (p+n)(p+n+1)} \\ &= \frac{1}{p+1} \times \frac{2}{p+2} \times \frac{3}{p+3} \times \dots \times \frac{n}{p+n} \times \frac{1}{p+n+1} \\ &\leq \frac{1}{p+1} \times \frac{2}{p+2} \times \frac{1}{p+n+1} \\ &\leq \frac{2}{p^2} \times \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Tout étant positif, on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(P_p)^2 \leq \frac{4C}{p^4} \text{ avec } C = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ indépendant de } p$$

$$\text{Donc } \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(P_p)^2 = o_{p \rightarrow +\infty} (a_0(P_p)^2)$$

$$\text{De plus } a_1(P_p)^2 = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)^2} = o_{p \rightarrow +\infty} (a_0(P_p)^2)$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(P_p)^2 \sim_{p \rightarrow +\infty} a_0(P_p)^2$$

$$\text{On en déduit } N_2(P_p) \sim_{p \rightarrow +\infty} a_0(P_p) = \frac{1}{p+1}$$

$$\text{On en déduit } \frac{N_\infty(P_p)}{N_2(P_p)} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

L'inégalité $N_\infty \leq N_2$ est donc optimale.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a_n(P)^2 \leq \frac{\|P\|_\infty^2}{(n+1)^2}$$

$$\text{Donc } N_2(P)^2 \leq \|P\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \|P\|_\infty^2 \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Donc } N_2(P) \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{6} \|P\|_\infty$$

Il y a égalité pour $P = 1$.

Donc si pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$ alors :

$$\beta \geq \frac{N_2(1)}{\|1\|_\infty} = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}$$

Donc $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ est la meilleure constante possible.

Remarque

On a vu dans la première question :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n(P)| \leq \|P\|_\infty$$

Donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad N_\infty(P) \leq \|P\|_\infty$$

Il y a égalité pour $P = 1$.

4. • On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $\|P\|_\infty \leq CN_\infty(P)$.

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|X^p\|_\infty = 1$$

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad a_n(X^p) = \frac{1}{n+p+1}$$

Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad N_\infty(X^p) = \frac{1}{p+1}$$

Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad 1 \leq \frac{C}{p+1}$$

On fait tendre p vers $+\infty$: $1 \leq 0$

C'est absurde donc $\|\cdot\|_\infty$ et N_∞ ne sont pas équivalentes.

- On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$.

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad N_2(X^p) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p+1)^2}} = \sqrt{\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Par comparaison série-intégrale, on en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad N_2(X^p) \geq \sqrt{\int_{p+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{p+1}}$$

On a donc :

$$\sqrt{\frac{1}{p+1}} \leq \frac{C}{p+1}$$

Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sqrt{p+1} \leq C$$

C'est absurde donc N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

- On suppose qu'il existe une constante C telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ $\|P\|_\infty \leq CN_2(P)$.

On a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|X^p\|_\infty \leq CN_2(P)$$

Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad 1 \leq C \sqrt{\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

On fait tendre p vers $+\infty$: $1 \leq 0$

C'est absurde donc $\|\cdot\|_\infty$ et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 (X 2020)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; 1]) \text{ tq } f(0) = f(1) = 0\}$.

Soit $N \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \|f''\|_\infty \end{cases}$.

1. Montrer que N est une norme sur E .

2. Montrer :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } \forall f \in E \quad \|f\|_\infty \leq CN(f)$$

3. Montrer que $C = \frac{1}{8}$ est la meilleure constante possible.

Correction

1. Il semble acquis que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur $\mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.

Dans ce cas, N est bien définie sur E et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

$$\forall (\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E \quad N(\lambda f) = \|\lambda f''\|_\infty = |\lambda| \|f''\|_\infty = |\lambda| N(f)$$

Soit f telle que $N(f) = 0$.

$\|f''\|_\infty = 0$ donc f'' est la fonction nulle.

f est donc affine :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \forall t \in [0; 1] \quad f(t) = at + b$$

$f(0) = 0$ donne $b = 0$, puis $f(1) = 0$ donne $a = 0$.

f est donc la fonction nulle.

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad N(f + g) = \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty = N(f) + N(g)$$

N est bien une norme sur E .

2. Plusieurs méthodes sont possibles. En voici une simple :

D'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. D'après les accroissements finis, pour tout t compris entre 0 et 1 il existe s compris entre 0 et 1 tel que

$$f'(t) = f'(t) - f'(\alpha) = (t - \alpha)f''(s)$$

On en déduit facilement :

$$\forall t \in [0; 1] \quad |f'(t)| \leq N(f)$$

On a alors, toujours avec les accroissements finis :

$$\forall t \in [0; 1] \quad |f(t)| = |f(t) - f(0)| \leq tN(f)$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

3. On va améliorer ce qui précède, en revenant à la démonstration du théorème de Rolle.

On commence par écarter le cas de la fonction nulle pour laquelle on a évidemment

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{8}N(f).$$

On suppose désormais que f n'est pas la fonction nulle.

f étant continue sur le segment $[0; 1]$:

$$\exists \alpha \in [0; 1] \text{ tq } \forall x \in [0; 1] \quad |f(x)| \leq |f(\alpha)|.$$

f n'étant pas la fonction nulle, $\alpha \neq 0, 1$.

Si $f(\alpha) > 0$ alors :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) \leq |f(x)| \leq |f(\alpha)| = f(\alpha)$$

Si $f(\alpha) < 0$ alors :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) \geq -|f(x)| \geq -|f(\alpha)| = f(\alpha)$$

de sorte que dans tous les cas, f présente un extremum local en α .

On en déduit $f'(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\alpha) - f(0) = \int_0^\alpha f'(t) dt \\ &= [tf'(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha t f''(t) dt = - \int_0^\alpha t f''(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= f(\alpha) - f(1) = \int_1^\alpha f'(t) dt \\ &= [(t-1)f'(t)]_1^\alpha - \int_1^\alpha (t-1)f''(t) dt = \int_\alpha^1 (t-1)f''(t) dt \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2 \|f\|_\infty &= 2 |f(\alpha)| \\ &\leq \int_0^\alpha t N(f) dt + \int_\alpha^1 (1-t) N(f) dt \\ &\leq \frac{N(f)}{2} (\alpha^2 + (1-\alpha)^2) \end{aligned}$$

Une étude de la fonction $\alpha \mapsto \alpha^2 + (1-\alpha)^2$ montrer qu'elle est maximale en $\alpha = \frac{1}{2}$.

Donc :

$$\forall \alpha \in [0; 1] \quad \alpha^2 + (1-\alpha)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \|f\|_\infty \leq \frac{1}{8} N(f).$$

Reste à montrer qu'on ne peut pas faire mieux.

On s'arrange pour avoir $f'' = Cte$ ie f polynômiale de degré 2.

$$\text{On prend donc } f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x(1-x) \end{cases}.$$

Une étude de fonction élémentaire donne $\|f\|_\infty = \frac{1}{4}$.

f'' est constante, égale à -2 donc $N(f) = 2$.

$$\text{Par conséquent } \frac{1}{4} \leq 2C \text{ et } C \geq \frac{1}{8}.$$

Exercice 6 (X 2021)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E .

Pour tout $x \in E$, on pose $N(x) = \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x \rangle|)$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Déterminer une famille génératrice de E telle que $N = \|\cdot\|_\infty$.

On rappelait :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$$

3. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Déterminer une famille génératrice de E telle que $N = \|\cdot\|_1$.

On rappelle :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

4. On suppose $n = 2$.

Déterminer les vecteurs x de E tels que $N(x) \leq 1$ et dessiner la sphère de centre 0 et de rayon 1.

5. Soit $S = \{x \in E \text{ tq } \|x\| = 1\}$.

Montrer :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sup_{s \in S} (|\langle s, x \rangle|).$$

Correction

1. • La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant finie, il n'y a pas de problème de définition et :

$$\forall x \in E \quad N(x) \in \mathbb{R}_+$$

- Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$.

On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \langle e_i, x \rangle = 0$$

Donc x est orthogonal à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = E$ ie $x = 0$.

•

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \quad N(\lambda x) &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, \lambda x \rangle|) \\ &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\lambda \langle e_i, x \rangle|) \\ &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\lambda| |\langle e_i, x \rangle|) \\ &= |\lambda| \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x \rangle|) \text{ car } |\lambda| \in \mathbb{R}_+ \\ &= |\lambda| N(x) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2 \quad N(x + y) &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x + y \rangle|) \\ &= \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x \rangle + \langle e_i, y \rangle|) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x \rangle| + |\langle e_i, y \rangle|) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, x \rangle|) + \max_{1 \leq i \leq p} (|\langle e_i, y \rangle|) \\ &\leq N(x) + N(y) \end{aligned}$$

N est bien une norme.

2. Soit $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad N(x) = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = \|x\|_\infty$$

3. Soit $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère les 2^n vecteurs suivants : $\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i$ avec $a_i = \pm 1$.

Ils forment bien une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \epsilon_i = \frac{1}{2} \left(\left(\epsilon_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \epsilon_j \right) + \left(\epsilon_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \epsilon_j \right) \right).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \left| \left\langle x, \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i \right\rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| |x_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1 \end{aligned}$$

De plus, il y a égalité si on prend $a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_i < 0 \end{cases}$.

Donc $N(x) = \|x\|_1$.

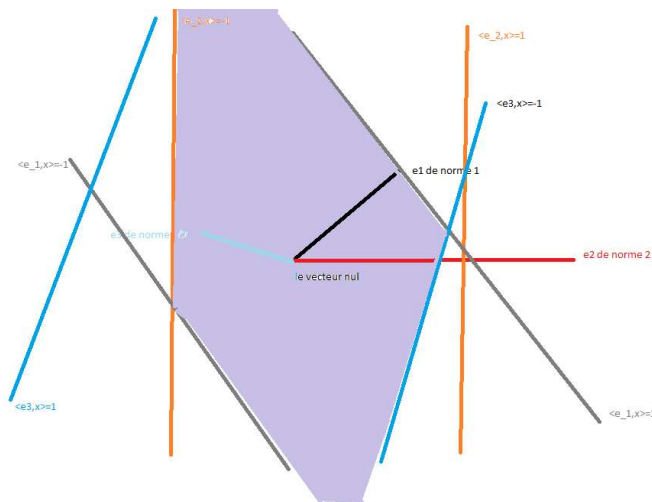
4. $N(x) \leq 1 \iff \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad -1 \leq \langle e_i, x \rangle \leq 1$

Il peut exister des i pour lesquels e_i est nul. La condition correspondante est vérifiée par tous les vecteurs de E .

On retire donc ces éventuelles valeurs de i .

Cela revient à dire que x est de la forme $a_i e_i + f_i$ avec $-\frac{1}{\|e_i\|} \leq a_i \leq \frac{1}{\|e_i\|}$ et f_i orthogonal à e_i .

La boule unité fermée de N est une intersection de bandes.



5. Soit $x \in E$.

Le résultat est clair si $x = 0 : 0 = \sup_{s \in S} (0)$.

On suppose donc x non nul.

$\forall s \in S \quad | \langle s, x \rangle | \leq \|s\| \|x\| = \|x\|$ par Cauchy-Schwarz.

De plus si $s = \frac{x}{\|x\|}$ alors $s \in S$ et :

$$| \langle s, x \rangle | = \|x\|$$

ce qui permet de conclure.

2 Boules

Exercice 7 (Mines 2021)

Soit E un espace vectoriel.

Soit N_1 une norme sur E et B_1 la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour N_1 .

Soit N_2 une norme sur E et B_2 la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour N_2 .

Montrer :

$$N_1 = N_2 \iff B_1 = B_2$$

Correction

Le sens direct est trivial.

On suppose $B_1 = B_2$.

• Première méthode

Soit x un vecteur non nul de E et $t \in]0; 1[$.

$\frac{t}{N_1(x)}x$ appartient à B_1 donc à B_2 :

$$N_2\left(\frac{t}{N_1(x)}x\right) < 1$$

$$\text{Donc : } \frac{t}{N_1(x)}N_2(x) < 1$$

$$\text{On fait tendre } t \text{ vers } 1 : \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \leq 1$$

$$\text{Donc } N_2(x) \leq N_1(x).$$

C'est trivial pour $x = 0$ donc : $N_2 \leq N_1$

N_1 et N_2 jouant des rôles symétriques, $N_2 \leq N_1$.

D'où $N_1 = N_2$.

• Deuxième méthode

Soit x un vecteur non nul de E .

$$N_1\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) = 1 \text{ donc } \frac{x}{N_1(x)} \notin B_1.$$

Mais $B_1 = B_2$ donc $\frac{x}{N_1(x)} \notin B_2$.

$$\text{On en déduit : } N_2\left(\frac{x}{N_1(x)}\right) \geq 1$$

$$\text{Donc } \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \geq 1 \text{ et } N_2(x) \geq N_1(x).$$

C'est trivial pour $x = 0$ donc : $N_1 \leq N_2$

N_1 et N_2 jouant des rôles symétriques, $N_2 \leq N_1$.

D'où $N_1 = N_2$.

Exercice 8 (X 2021)

Soient a et $a' \in \mathbb{R}^n$ tels que les boules fermées $\mathcal{B}_f(a, 1)$ et $\mathcal{B}_f(a', 1)$ soient tangentes à la boule $\mathcal{B}_f(0, 1)$ aux points b et b' .

Montrer que les boules $\mathcal{B}_f(a, 1)$ et $\mathcal{B}_f(a', 1)$ sont disjointes si et seulement si $(Ob|Ob') < \frac{1}{2}$ et qu'elles sont tangentes si et seulement si le triangle Obb' est équilatéral.

Correction

Les boules ne peuvent pas être tangentes intérieurement : on aurait a ou $a' = 0$ et b et b' seraient mal définis.

Par conséquent, $a = 2b$ et $a' = 2b'$ (faire un dessin).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_f(a, 1) \cap \mathcal{B}_f(a', 1) = \emptyset &\iff \|a' - a\| > 2 \\
 &\iff \|2b' - 2b\| > 2 \\
 &\iff \|b' - b\| > 1 \\
 &\iff \|b' - b\|^2 > 1 \\
 &\iff \|b'\|^2 + \|b\|^2 - 2(b'|b) > 1 \\
 &\iff 2 - 2(b'|b) > 1 \\
 &\iff 1 > 2(b'|b) \\
 &\iff (b'|b) < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Les deux boules sont tangentes si, et seulement si, $\|a' - a\| = 2$.

Il suffit d'adapter le calcul précédent pour obtenir la CNS $(b|b') = \frac{1}{2}$.

Mais b et b' étant de norme 1, $(b|b')$ est le cosinus de l'angle en O .

Obb' est donc un triangle isocèle en O d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$.

Les deux autres sont égaux et la somme des angles vaut π donc ils sont égaux eux aussi à $\frac{\pi}{3}$.

Les trois angles sont égaux donc le triangle est équilatéral.

Remarques

- En fait comme $\|b\| = \|b'\| = 1$ et $\|b - b'\| = \left\| \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a' \right\| = \frac{1}{2} \|a - a'\|$, on a directement :

$\mathcal{B}_f(a, 1)$ et $\mathcal{B}_f(a', 1)$ tangentes $\iff Obb'$ est équilatéral

- Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Soit $(a_1, a_2) \in E^2$ et $(R_1, R_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Montrons :

$$\mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2) \neq \emptyset \iff \|a_2 - a_1\| \leq R_1 + R_2$$

On suppose d'abord $\mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2) \neq \emptyset$.

Soit $x \in \mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$.

$$\|a_2 - a_1\| = \|a_2 - x + x - a_1\| \leq \|a_2 - x\| + \|x - a_1\| \leq R_2 + R_1$$

Réciproquement, on suppose $\|a_2 - a_1\| \leq R_1 + R_2$.

Si $\|a_2 - a_1\| \leq R_1$ alors $a_2 \in \mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$ et $\mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$ est non vide.

On suppose donc $\|a_2 - a_1\| > R_1$.

On pose $x = a_1 + R_1 \frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|}$.

$\|x - a_1\| = R_1$ donc $x \in \mathcal{B}_f(a_1, R_1)$.

$$\begin{aligned}
 \|x - a_2\| &= \left\| a_1 + R_1 \frac{a_2 - a_1}{\|a_2 - a_1\|} - a_2 \right\| \\
 &= \left\| \left(1 - \frac{R_1}{\|a_2 - a_1\|} \right) (a_1 - a_2) \right\| \\
 &= \left| 1 - \frac{R_1}{\|a_2 - a_1\|} \right| \|a_1 - a_2\| = \left| \|a_2 - a_1\| - R_1 \right| \\
 &= \|a_2 - a_1\| - R_1 \text{ car } \|a_2 - a_1\| > R_1 \\
 &\leq R_1 + R_2 - R_1 = R_2
 \end{aligned}$$

Donc :

$x \in \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$ et $x \in \mathcal{B}_f(a_1, R_1) \cap \mathcal{B}_f(a_2, R_2)$ qui est donc non vide.

Exercice 9

Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [-1; 1] \quad e^{\lambda x} \leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda$$

On rappelle :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \cosh \lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \text{ et } \sinh \lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}$$

Correction

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $f \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\lambda x} \end{cases}$

$\forall x \in [-1; 1] \quad f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \geq 0$.

Donc f est convexe et f est en dessous de la corde joignant $(-1, f(-1))$ et $(1, f(1))$.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in [-1; 1] \quad e^{\lambda x} &\leq f(-1) + \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}(x - (-1)) \\
 &\leq e^{-\lambda} + \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2}(x + 1) \\
 &\leq \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} + \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} x \\
 &\leq \cosh \lambda + x \sinh \lambda
 \end{aligned}$$

Exercice 10

Prouver :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Correction

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$

$\ln$ est concave donc :

$$\frac{1}{n} \left(\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) + \ln \left(\frac{x_2}{x_3} \right) + \dots + \ln \left(\frac{x_n}{x_1} \right) \right) \leq \ln \left(\frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \times \frac{x_2}{x_3} \times \dots \times \frac{x_n}{x_1} \right) &\leq \ln \left(\frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) \right) \\ \frac{1}{n} \ln 1 = 0 &\leq \ln \left(\frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) \right) \\ \frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \right) &\geq 1 \\ \text{D'où le résultat.} \end{aligned}$$

Exercice 11 (*Ens 2025*)

Soit $\gamma \in]0; 1]$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose que

$$\forall n \geq 1 \quad x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}$$

Montrer qu'il existe $D > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad x_n \leq Dn^{\frac{1}{\gamma}}$$

Que se passe-t-il pour $\gamma = 0$?

Correction

On raisonne par récurrence en notant toutes les conditions que doit vérifier D .

Pour pouvoir initialiser la récurrence, on a besoin de $D \geq x_1$.

Supposons la propriété vraie au rang n .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\leq x_n + x_n^{1-\gamma} \\ &\leq Dn^{\frac{1}{\gamma}} + D^{1-\gamma} n^{\frac{1}{\gamma}-1} = Dn^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{D^{-\gamma}}{n} \right) \end{aligned}$$

On a donc besoin de $n^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 + \frac{D^{-\gamma}}{n} \right) \leq (n+1)^{\frac{1}{\gamma}}$ ou encore :

$$1 + \frac{D^{-\gamma}}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 1 + \frac{1}{\gamma n} + \dots$$

Soit $f : x \mapsto x^{\frac{1}{\gamma}}$.

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{\gamma} x^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

$$\forall x > 0 \quad f''(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma^2} x^{\frac{1}{\gamma}-2} > 0$$

Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = f\left(\frac{1}{n}\right) \geq f(1) + \frac{f'(1)}{n} = 1 + \frac{1}{n\gamma}$$

Il suffit donc de prendre $D \geq x_1$ tel que $D^{-\gamma} \leq \frac{1}{\gamma}$ pour que la récurrence fonctionne.

$D^{-\gamma} \xrightarrow{D \rightarrow +\infty} 0$ donc un tel D existe.

Dans le cas $\gamma = 0$ on a $x_{n+1} \leq 2x_n$.

On en déduit la majoration $x_n \leq 2^n x_1$, qu'on ne peut pas améliorer. (x_n) n'est plus dominée par une puissance de n .

Exercice 12 (*Ens 2018*)

1. Montrer que le carré est l'unique façon d'optimiser la surface d'un rectangle de périmètre donné.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(a) Montrer :

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\alpha^n} \leq \exp \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\alpha} - n \right)$$

(b) En déduire :

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

(inégalité arithmético-géométrique)

3. Montrer que le cube est l'unique façon d'optimiser le volume d'un parallélépipède rectangle pour une aire donnée.

Correction

1. Soit p le périmètre du rectangle.

Soit x la longueur d'un des côtés.

Les autres sont de longueurs $\frac{p}{2} - x$, x et $\frac{p}{2} - x$.

L'aire est $x \left(\frac{p}{2} - x \right)$.

L'étude de fonction est triviale. Le maximum est atteint pour $x = \frac{p}{4}$ et seulement pour $x = \frac{p}{4}$, ce qui correspond bien à un carré.

2. (a) Soient $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+^*$.

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $e^{t_i-1} \geq t_i > 0$: l'inégalité $e^x \geq 1 + x$ est facile à démontrer.

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $t_i = 1$.

On fait le produit de ces inégalités entre nombres strictement positifs :

$$\prod_{i=1}^n e^{t_i-1} = \exp \left(\sum_{i=1}^n t_i - n \right) \geq \prod_{i=1}^n t_i.$$

Il y a égalité si, et seulement si, tous les t_i sont égaux à 1 (car ce sont des inégalités entre nombres strictement positifs).

On applique ensuite cette inégalité à $t_i = \frac{a_i}{\alpha}$.

$$\exp \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\alpha} - n \right) \geq \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\alpha^n}$$

Il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux à α .

- (b) On prend $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$.

On obtient $1 \geq \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\alpha^n}$ ou encore $\prod_{i=1}^n a_i \leq \alpha^n$.

Il n'y a plus qu'à prendre la racine $n^{\text{ième}}$.

Il y a égalité si, et seulement si, tous les a_i sont égaux.

Remarque

Dans l'état actuel du programme, l'inégalité arithmético-géométrique se démontre ainsi :

La fonction $\ln$ est strictement concave donc :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(a_i) \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

avec égalité si, et seulement si, les a_i sont égaux.

En prenant l'exponentielle, on obtient :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

avec égalité si, et seulement si, les a_i sont égaux.

Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$.

Alors :

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

On raisonne par récurrence sur n .

Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer : $t_1 = 1$ et l'inégalité s'écrit $f(x_1) \leq f(x_1)$.

La propriété est vraie pour $n = 2$: c'est la définition d'une fonction convexe.

On suppose la propriété vraie au rang n .

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(t_1, \dots, t_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 1$.

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) &= f\left(\sum_{j=1}^n t_j \times \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\
 &= f\left((1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} x_i + t_{n+1} x_{n+1}\right) \\
 &\leq (1 - t_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
 &\quad \text{car } f \text{ est convexe et } t_{n+1} \in [0; 1]
 \end{aligned}$$

Mais :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} \geq 0$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} = 1$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 f\left(\sum_{k=1}^{n+1} t_k x_k\right) &\leq \left(\sum_{j=1}^n t_j\right) \times \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{j=1}^n t_j} f(x_i)\right) + t_{n+1} f(x_{n+1}) \\
 &\leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)
 \end{aligned}$$

3. Les côtés du parallélépipède sont c_1, c_2, c_3 .

Son aire est $A = 2(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)$.

Son volume est $V = c_1 c_2 c_3$.

$$V^2 = c_1 c_2 \times c_1 c_3 \times c_2 c_3$$

Donc $V^{2/3} \leq \frac{1}{3}(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3) = \frac{A}{6}$ avec égalité si, et seulement si, les trois côtés sont égaux.