

ANALYSE 1
TD
2026-2027
Chapitre 1
Correction

941

1 Intégrale sur un segment

Exercice 1 (*CCP 2023*)

Trouver une primitive de la fonction $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x^2} \ln(1 - x^2)$

Correction

$\forall x \in]0; 1[\quad 1 - x^2 > 0$

Donc la fonction f est bien définie et elle est continue sur $]0; 1[$.

Elle possède bien des primitives.

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \frac{-1}{x} \ln(1 - x^2) - \int \frac{-1}{x} \frac{-2x}{1 - x^2} \, dx \\ &= -\frac{\ln(1 - x^2)}{x} - 2 \int \frac{dx}{1 - x^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{1 + x}$$

On multiplie par $1 - x$ et on évalue en 1 : $a = \frac{1}{2}$

On multiplie par $1 + x$ et on évalue en -1 : $b = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \frac{-1}{x} \ln(1 - x^2) - \left(\int \frac{dx}{1 - x} + \int \frac{dx}{1 + x} \right) \\ &= \frac{-1}{x} \ln(1 - x^2) - (-\ln(1 - x) + \ln(1 + x)) \\ &= \frac{-1}{x} \ln(1 - x^2) + \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) \end{aligned}$$

Remarque

Soit $F : x \mapsto \frac{-1}{x} \ln(1 - x^2) + \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)$.

En restant au plus proche de la définition :

$$\begin{aligned}
 F(1-h) &= \frac{-1}{1-h} \ln(1 - (1-2h+h^2)) + \ln\left(\frac{h}{2-h}\right) \\
 &= -(1+h+o(h)) \ln(2h-h^2) + \ln(h) - \ln(2-h) \\
 &= -(1+h+o(h)) (\ln(h) + \ln(2-h)) + \ln(h) - \ln(2) + o(1) \\
 &= -(1+h+o(h)) (\ln(h) + \ln(2) + o(1)) + \ln(h) - \ln(2) + o(1) \\
 &= -\ln(h) - \ln(2) + o(1) + \ln(h) - \ln(2) + o(1) \\
 &= -2\ln(2) + o(1)
 \end{aligned}$$

Donc $F(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} -2\ln(2)$.

$$\text{Donc } \int_{1/2}^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = F(x) - F\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} -2\ln(2) - F\left(\frac{1}{2}\right).$$

En d'autres termes, $\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ converge et $\int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -2\ln(2) - F\left(\frac{1}{2}\right)$

En 0 : $\frac{-\ln(1-x^2)}{x} \sim \frac{x^2}{x} = x$ donc $F(x) \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 0$.

$$\text{Donc } \int_x^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(x) \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} F\left(\frac{1}{2}\right).$$

En d'autres termes, $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ converge et $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = F\left(\frac{1}{2}\right)$

Finalement, $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$ converge et $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = -2\ln(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln(2)$

Exercice 2 (CCP 2022)

$$A_n = \int_0^1 \frac{\sin(nt)}{1+nt} dt$$

1. Justifier l'existence de A_n .
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

Correction

1. A_n est l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur ce segment.
2. On peut utiliser le théorème de convergence dominée ou :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |A_n| &\leq \int_0^1 \frac{dt}{1+nt} = \left[\frac{1}{n} \ln(1+nt) \right]_0^1 \\
 &\leq \frac{\ln(1+n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0
 \end{aligned}$$

Exercice 3 (Centrale 2022)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

3. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant une hypothèse de monotonie dont le candidat ne se souvient pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Correction

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$
2. La fonction $\arctan$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \arctan''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+x^2 - 2|x| = (1-|x|)^2 \geq 0$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2|x| \leq 1+x^2$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\arctan''(x)| = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)} \leq 1$$

et par l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\arctan(x) - x| \leq \frac{x^2}{2} \leq x^2$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \left| \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} \right| \leq \frac{1}{(n+k)^2}$$

On en déduit avec l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |v_n - u_n| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(\arctan\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| \arctan\left(\frac{1}{n+k}\right) - \frac{1}{n+k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq (n+1) \times \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Donc $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$

3. Il faut ajouter l'hypothèse $f(0) = 0$ sinon (W_n) diverge vers l'infini avec le signe de $f(0)$.

La monotonie de f ne suffit pas :

Si on prend $f(t) = \sqrt{t}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 4 (*Mines 2023*)

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(nx) \, dx$.

Correction

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(nx) \, dx &= \int_{na}^{nb} f(t) \frac{dt}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \left(\int_{na}^{na+kT} f(t) \, dt + \int_{na+kT}^{nb} f(t) \, dt \right) \text{ avec } k = \left\lfloor \frac{nb-na}{T} \right\rfloor \\
 &= \frac{1}{n} \left(k \int_0^T f(t) \, dt + \int_{na+kT}^{nb} f(t) \, dt \right) \\
 &= \frac{k}{n} \int_0^T f(t) \, dt + \frac{1}{n} \int_{na+kT}^{nb} f(t) \, dt
 \end{aligned}$$

$x-1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ donc $\lfloor x \rfloor \sim_{x \rightarrow +\infty} x$.

On en déduit $\frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{T}$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{n} \int_{na+kT}^{nb} f(t) \, dt \right| &\leq \frac{1}{n} \int_{na+kT}^{nb} |f(t)| \, dt \\
 &\leq \frac{1}{n} \int_{na+kT}^{na+kT+T} |f(t)| \, dt \text{ car } |f| \geq 0 \text{ et } nb \leq na+kT+T \\
 &\leq \frac{1}{n} \int_0^T |f(t)| \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(nx) \, dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(t) \, dt$

L'examineur a demandé de prouver : $\int_a^{a+T} f(t) \, dt = \int_0^T f(t) \, dt$

$$\begin{aligned}
 \forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t) \, dt &= \int_a^0 f(t) \, dt + \int_0^T f(t) \, dt + \int_T^{a+T} f(t) \, dt \\
 &= \int_a^0 f(t) \, dt + \int_0^T f(t) \, dt + \int_0^a f(x+T) \, dx \\
 &\quad \text{changement de variable } t = a+x \\
 &= \int_a^0 f(t) \, dt + \int_0^T f(t) \, dt + \int_0^a f(x) \, dx \\
 &= \int_0^T f(t) \, dt
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (*Mines 2024*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue et $n \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \int_0^1 f(x) x^k \, dx = 0$$

Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros dans $[0, 1]$.

Indication donnée : Raisonner par l'absurde et poser une fonction $g(x)$ en fonction des x^k pour appliquer le théorème de positivité de l'intégrale à $f(x)g(x)$.

Correction

On suppose que f a un nombre de racines inférieur ou égal à n .

f n'est donc pas la fonction nulle.

$\int_0^1 f(x) dx = 0$ avec f continue non nulle donc f ne peut pas être de signe constant.

On en déduit que f s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Si f ne s'annule qu'une fois en $x_0 \in]0; 1[$, elle est de signe constant sur $[0, x_0]$ et sur $[x_0, 1]$, les signes sur ces intervalles étant opposés.

La fonction $x \mapsto (x - x_0)f(x)$ est continue, non nulle et de signe constant donc

$$\int_0^1 (x - x_0)f(x) dx \neq 0.$$

$$\text{Mais } \int_0^1 (x - x_0)f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx - x_0 \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

C'est absurde donc f s'annule au moins deux fois sur $]0; 1[$.

f s'annule donc en $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ avec $2 \leq p \leq n$.

On note $x_0 = 0$ et $x_{p+1} = 1$ et on a $x_0 < \dots < x_{p+1}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $]x_k; x_{k+1}[$, $0 \leq k \leq p$.

$$\text{Soit } g : x \mapsto \prod_{\substack{k=1 \\ f(x_k^-)f(x_k^+) < 0}}^p (x - x_p)$$

La fonction fg est continue sur $[0; 1]$ de signe constant et différente de la fonction nulle donc

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \neq 0$$

Mais g est une fonction polynomiale de degré $p \leq n$ donc par linéarité de l'intégrale à partir des hypothèses de l'énoncé, $\int_0^1 f(x)g(x) dx = 0$

On aboutit à une contradiction donc f s'annule au moins $n + 1$ fois dans $[0; 1]$.

2 Fonctions intégrables et intégrales impropres

2.1 Etudes d'intégrabilité

2.2 Détermination de la nature d'intégrales

Exercice 6

Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx$?

Correction

La fonction $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

En 0, $\arctan(x) \sim x$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = \ln(2)$.

En $+\infty$, $\arctan(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{\arctan(x)}{x} \sim \frac{\pi}{2x}$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) &= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Donc en $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$. La fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc f l'est aussi.

On en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx$ converge absolument donc converge.

Exercice 7

Soit $\alpha > 0$.

Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} \ln(1+x^{-\alpha}) dt$?

Correction

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\alpha > 0$ donc $x^{-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x) \sim_{+\infty} x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

On en déduit :

f intégrable en $+\infty \iff \alpha > 1$

$\alpha > 0$ donc $x^{-\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $f(x) \sim_0 \ln(x^{-\alpha}) = -\alpha \ln(x)$.

La fonction $\ln$ étant intégrable en 0, f est intégrable en 0 (quelque soit α).

Finalement :

f intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \iff \alpha > 1$

ie :

$\int_0^{+\infty} \ln(1+x^{-\alpha})$ converge absolument $\iff \alpha > 1$

Ce qui n'est pas ce qui est demandé : on veut savoir si l'intégrale converge ou diverge pas si elle converge absolument ou pas.

Néanmoins, on remarque que la fonction f est positive donc la convergence et la convergence absolue se confondent si bien que :

$\int_0^{+\infty} \ln(1+x^{-\alpha})$ converge $\iff \alpha > 1$

Exercice 8

Quelle est la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 dx$?

Correction

Soit $f \begin{cases} [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 \end{cases}$.

f est continue sur $[1; +\infty[$.

On procède à une intégration par parties.

$$u(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} \quad u'(x) = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$$

$$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$.

$$u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

L'intégration par parties est justifiée.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 dx \text{ est de même nature que } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x (2 - \ln x) \sin x}{x^2} dx$$

$$\text{Mais } x^{3/2} \frac{\ln x (2 - \ln x) \sin x}{x^2} \sim \frac{-\sin x (\ln x)^2}{x^{1/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc}$$

$$\frac{\ln x (2 - \ln x) \sin x}{x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \text{ et } x \mapsto \frac{\ln x (2 - \ln x) \sin x}{x^2} \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[.$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x (2 - \ln x) \sin x}{x^2} dx$ converge absolument donc converge et finalement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} (\ln x)^2 dx \text{ converge}$$

Exercice 9

Quelle est la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx$?

Correction

$$\text{Soit } f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} \end{cases}.$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **Cas** $a = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

- **Cas** $a > 0$

$$- \int_0^1 \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx$$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^b}$$

f étant positive sur $]0; 1]$ (car $a > 0$), on a :

$$\int_0^1 \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx \text{ converge} \iff f \text{ est intégrable sur }]0; 1]$$

$$\iff x \mapsto \frac{1}{x^b} \text{ est intégrable sur }]0; 1]$$

$$\iff b < 1$$

$$- \int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx$$

$$f(x) \sim \frac{a}{x^{b-a+1}}$$

f étant positive sur $[1; +\infty[$ (car $a > 0$), on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx \text{ converge} \iff f \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[$$

$$\iff x \mapsto \frac{a}{x^{b-a+1}} \text{ est intégrable sur } [1; +\infty[$$

$$\iff b - a + 1 > 1$$

$$\iff b > a$$

Lorsque $a > 0$, on a donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx \text{ converge} \iff a < b < 1$$

• **Cas $a < 0$**

$$f(x) \sim_0 -\frac{1}{x^{b-a}} \text{ et } f(x) \sim_{+\infty} \frac{a}{x^{b-a+1}}$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, lorsque $a < 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx \text{ converge} \iff a < b < 1 + a$$

Finalement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)^a - x^a}{x^b} dx \text{ converge} \iff \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ 0 < a < b < 1 \\ \text{ou} \\ a < b < 1 + a \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

Exercice 10

Quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} dx$?

Correction

$$\text{Soit } f \begin{cases}]0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} \end{cases}.$$

f est continue sur $]0; 1]$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant $x = \frac{1}{y}$.

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} dx \text{ est de même nature que } \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(y + \frac{1}{y}\right)}{y} dy$$

$$\frac{\sin\left(y + \frac{1}{y}\right)}{y} = \frac{\sin y}{y} \cos\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\cos y}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

En $+\infty$: $\frac{\cos y}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$ donc $y \mapsto \frac{\cos y}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) dy$ converge absolument donc converge.

$$\frac{\sin y}{y} \cos\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\sin y}{y} \left(1 + O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right) = \frac{\sin y}{y} + O\left(\frac{1}{y^3}\right).$$

On a vu en cours mais il faut savoir le redémontrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ converge.

Par ailleurs si $g(y) = O\left(\frac{1}{y^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$ alors g est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y} \cos\left(\frac{1}{y}\right) dy$ converge.

Finalement :

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x} dx \text{ converge}$$

Exercice 11 (*Centrale 2016*)

Soient a et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et α -périodique.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$.

On veut déterminer λ tel que $I(\lambda)$ converge.

1. Montrer qu'il existe au plus une valeur de λ tel que $I(\lambda)$ converge.

2. $G_\lambda : x \mapsto \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.

Montrer que si G_λ est bornée alors $I(\lambda)$ converge.

Conclure.

Correction

Remarquons qu'on introduit $a > 0$ pour que l'intégrale soit uniquement impropre à droite.

1. Si $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ convergent alors en faisant la différence $\int_a^{+\infty} \frac{\lambda - \mu}{t} dt$ converge. Cela entraîne $\lambda = \mu$.

2. On procède à une intégration par parties :

$$u(t) = \frac{1}{t}, u'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$$v'(t) = \lambda - f(t), v = G_\lambda$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (en utilisant G_λ bornée).

Toujours avec G_λ bornée, $u'v$ est intégrable sur $[a; +\infty[$.

En effet $u'(t)v(t) = -\frac{G(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

On en déduit que $\int_a^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ converge absolument donc converge.

D'après le cours sur les intégrations par parties, $I(\lambda)$ converge.

On prend $\lambda = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(t) dt$ la valeur moyenne de f sur une période.

Soit $x > a$.

Soit n la partie entière de $\frac{x-a}{\alpha}$ de sorte que $x = a + n\alpha + y$ avec $0 \leq y < \alpha$.

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x \lambda dt - \int_a^{a+n\alpha+y} f(t) dt \\ &= \lambda(x-a) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\alpha}^{a+(k+1)\alpha} f(t) dt - \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} f(t) dt \\ &= \lambda(x-a) - n \int_0^\alpha f(t) dt - \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} f(t) dt \\ &= \lambda(x-a-n\alpha) - \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} f(t) dt \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq |\lambda| (x-a-n\alpha) + \int_{a+n\alpha}^{a+n\alpha+y} |f(t)| dt \\ &\leq |\lambda| \alpha + \int_{a+n\alpha}^{a+(n+1)\alpha} |f(t)| dt \\ &\leq |\lambda| \alpha + \int_0^\alpha |f(t)| dt \text{ par périodicité} \end{aligned}$$

G est bornée sur $[a; +\infty[$.

2.3 Calculs d'intégrales

Exercice 12

Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

En $+\infty$: $f(x) = 1 - x \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.

On réalise une intégration par parties :

$$u(x) = 1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad u'(x) = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{1+x^2}$$

$$v'(x) = 1 \quad v(x) = x$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc l'intégration par parties est justifiée.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx &= \int_0^{+\infty} \left(x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \left(1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 13

Montrer que $\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx$ converge et la calculer..

Correction

Soit $f \begin{cases}]0; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \ln(\tan x) \end{cases}$

f est continue sur $]0; \pi/2[$.

$f(x) = \cos x \ln(\sin x) - \cos x \ln(\cos x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 0$ donc f est prolongeable en une fonction continue

sur $]0; \pi/2]$.

En 0 : $\tan x \sim x$ et ce sont des infiniment petits donc $f(x) \sim \ln x$. Comme $\ln$ est intégrable sur $]0; \pi/2]$, on en déduit que f est intégrable sur $]0; \pi/2]$ ou $]0; \pi/2[$.

On réalise une intégration par parties :

$$u(x) = \ln(\tan x) \quad u'(x) = \frac{1}{\cos^2 x \tan x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

$$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi/2[$.

$u(x)v(x) \sim_0 x \ln x$ donc $u(x)v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais en $\pi/2$ il y a un problème.

On peut néanmoins légitimement écrire, pour $X \in]0; \pi/2[$:

$$\begin{aligned} \int_0^X \cos x \ln(\tan x) dx &= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^X \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^X \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^X \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \sin X \ln(\tan X) - \int_0^{\sin X} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \sin X \ln(\tan X) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin X}{1 - \sin X} \right) \\ &= \sin X \ln(\sin X) - \sin X \ln(\cos X) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin X) + \frac{1}{2} \ln(1 - \sin X) \end{aligned}$$

$$\sin X \ln(\sin X) \xrightarrow{X \rightarrow \pi/2} 0$$

$$-\frac{1}{2} \ln(1 + \sin X) \xrightarrow{X \rightarrow \pi/2} -\frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{On pose } h = \frac{\pi}{2} - X, \quad X = \frac{\pi}{2} - h$$

$$\begin{aligned} \sin X \ln(\cos X) &= \cos h \ln(\sin h) = \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \ln \left(h \left(1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \left(\ln h + \ln \left(1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)\right)\right) \\ &= \ln h + o(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln(1 - \sin X) &= \frac{1}{2} \ln(1 - \cos h) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{h^2}{2} (1 + o(1)) \right) \\ &= \frac{1}{2} (2 \ln h - \ln 2 + o(1)) \\ &= \ln h - \frac{\ln 2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

On déduit : $\int_0^X \cos x \ln(\tan x) dx \xrightarrow{X \rightarrow \pi/2} -\ln 2$ et finalement :

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx = -\ln 2$$

Exercice 14

Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ converge et la calculer.

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\sqrt{x}} \end{cases}$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = y^2$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy$$

On réalise une intégration par parties :

$$u(y) = y \quad u'(y) = 1$$

$$v'(y) = e^{-y} \quad v(y) = -e^{-y}$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$u(y)v(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$ et il n'y a pas de problème en 0 donc l'intégration par parties est justifiée.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = 2$$

Exercice 15 (Centrale 2018)

- Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$.
Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- A l'aide de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la valeur de I .

Correction

- L'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ a été justifiée en cours.
- On justifie rapidement l'existence de $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt$:
la fonction $t \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est clairement continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et elle est prolongeable par continuité en 0 car : $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(t) \cos((2n+2)t)}{\sin(t)} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos((2n+2)t) dt \\ &= 2 \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2} \right]_0^{\pi/2} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}$$

- $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin t}{t} dt$.

On fait le changement de variable $t = (2n+1)x$:

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx.$$

Mais :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) dx$$

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}.$$

f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

En 0 : $f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \sim \frac{-x^3/6}{x^2} = -\frac{x}{6}$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On note toujours f ce prolongement et on a donc $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \quad f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)} \left(\cos(x) - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

On fait un DL du numérateur en 0 :

$$\begin{aligned} \cos(x) - \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right)^2 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \\ &= -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \end{aligned}$$

On en déduit facilement que $f'(x) \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} -\frac{1}{6}$.

D'après le théorème de la dérivée f est $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On peut alors faire une IPP :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) f(x) dx \\ &= \left[-\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1} f(x) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)x) f'(x) dx \\ &= \frac{f(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)x) f'(x) dx \\ \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right| &\leq \frac{1}{2n+1} \left(|f(0)| + \int_0^{\pi/2} |f'(x)| dx \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On conclut facilement : $I = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 16 (Centrale 2005)

1. Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ dont la valeur sera notée I .
2. Calcul de I avec Maple¹.
Maple donne $I = \frac{3}{4} \ln 3$
3. $J(\epsilon) = \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.
Trouver a et b tels que $J(\epsilon) = a \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt + b \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt$
Montrer que $J(\epsilon) = \frac{3}{4} \int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2} dt$
En déduire I .

Correction

1. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^3 t}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
En 0 : $f(t) \sim \frac{t^3}{t^2} = t$ donc f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus en $+\infty$, $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$ converge absolument donc converge.
- 2.
3. Il s'agit de linéariser $\sin^3 t$.

$$\begin{aligned} \sin^3(t) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{8i} (2i \sin(3x) - 6i \sin(x)) = -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) \end{aligned}$$

$a = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$ conviennent.

On fait le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x = 3t$ dans $\int_\epsilon^{+\infty} \frac{\sin 3t}{t^2} dt$ et

on obtient $J(\epsilon) = \frac{3}{4} \int_\epsilon^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2} dt$

Pour la conclusion, il y a plusieurs justifications possibles.

On peut, par exemple, utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour prouver :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2} \leq t^2$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sin(t) = t + \int_0^t (t-x) \sin^{(2)}(x) dx = t - \int_0^t (t-x) \sin(t) dx$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |\sin(t) - t| &= \left| \int_0^t (t-x) \sin(t) dx \right| \\ &\leq \int_0^t (t-x) |\sin(t)| dx \text{ car les bornes sont dans le bon sens et } t-x \geq 0 \\ &\leq \int_0^t (t-x) dx = \left[-\frac{(t-x)^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

1. Maple est le logiciel de calcul symbolique en vigueur dans les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs avant l'introduction de Python

Comme la fonction $\sin$ est impaire, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin t - t| \leq \frac{t^2}{2} \leq t^2$$

On a alors :

$$\begin{aligned} |J(\epsilon) - \ln 3| &= \left| \frac{3}{4} \int_{\epsilon}^{3\epsilon} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_{\epsilon}^{3\epsilon} \frac{1}{t} dt \right| = \frac{3}{4} \left| \int_{\epsilon}^{3\epsilon} \frac{\sin(t) - t}{t^2} dt \right| \\ &\leq \frac{3}{4} \int_{\epsilon}^{3\epsilon} \frac{|\sin(t) - t|}{t^2} dt \leq \frac{3}{4} \int_{\epsilon}^{3\epsilon} dt \\ &\leq \frac{3\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc $J(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon > 0]{\epsilon \rightarrow 0} \ln(3)$.

Mais $J(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon > 0]{\epsilon \rightarrow 0} I$ donc $I = \ln(3)$.

Exercice 17 (Mines 2018)

1. Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$?
2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Correction

1. L'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ a été justifiée en cours.
2. Il faut prolonger $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ par continuité en 0. On note g ce prolongement.
 g est continue sur $\mathbb{R}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge donc d'après la relation de Chasles, $f(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_x^0 g(t) dt + \int_0^{+\infty} g(t) dt = - \int_0^x g(t) dt + \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

Sous cette forme, on peut invoquer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral.
 f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -g(x).$$

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{\sin(x)}{x}.$$

3.

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \int_0^x f(t) dt &= [tf(t)]_0^x - \int_0^x tf'(t) dt \text{ il n'y a rien à justifier : } f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \\ &= xf(x) + \int_0^x \sin t dt = x \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt + 1 - \cos(x) \\ &= x \left(\left[\frac{-\cos(t)}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \right) + 1 - \cos(x) \end{aligned}$$

Justification de l'IPP

$$u'(t) = \sin(t), \quad u(t) = -\cos(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{t}, v'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[x; +\infty[$ ($x > 0$) et $u(t)v(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \int_0^x f(t) dt &= \cos(x) - x \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt + 1 - \cos(x) \\ &= 1 - x \left(\left[\frac{\sin(t)}{t^2} \right]_x^{+\infty} + 2 \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} dt \right) \end{aligned}$$

On justifie l'IPP comme ci-dessus

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{\sin(x)}{x} - 2x \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} dt \\ &= 1 + \frac{\sin(x)}{x} - 2x O\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3} dt \right| &\leq \int_x^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^3} dt \\ &\leq \int_x^{+\infty} t^{-3} dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_x^{+\infty} \\ &\leq \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Exercice 18 (X 2016)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $f(x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $a > 0$.

Prouver que $g : x \mapsto f\left(\sqrt{4a+x^2}\right)$ et $h : x \mapsto f\left(x + \frac{a}{x}\right)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} h$.

Correction

- g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On pose $u(x) = \sqrt{4a+x^2} \sim_{+\infty} x$.
 $g(x) = f(u(x)) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{u(x)^2}\right) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
 g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
 $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $h(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$.
On peut prolonger h par continuité en 0.
On pose $v(x) = x + \frac{a}{x} \sim_{+\infty} x$.
 $h(x) = f(v(x)) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{v(x)^2}\right) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
 h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- Passons à l'égalité.

On cherche un changement de variable $x = \varphi(t)$ tel que $\sqrt{4a+x} = t + \frac{a}{t}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+x^2} = t + \frac{a}{t} &\iff 4a + x^2 = t^2 + 2a + \frac{a^2}{t^2} \\ &\iff x^2 = t^2 - 2a + \frac{a^2}{t^2} = \left(t - \frac{a}{t}\right)^2\end{aligned}$$

On fait donc le changement de variable $\mathcal{C}^1 : x = \varphi(t) = t - \frac{a}{t}$.

$\forall t > 0 \ \varphi'(t) = 1 + \frac{a}{t^2} > 0$: le changement de variable est bien strictement monotone.

De plus, $\varphi(\sqrt{a}) = 0$ et $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(x) \, dx &= \int_0^{+\infty} f(\sqrt{4a+x^2}) \, dx = \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(\sqrt{\left(t + \frac{a}{t}\right)^2}\right) \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \, dt \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right) \, dt + \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right) \frac{a \, dt}{t^2} \\ &= \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right) \, dt + \int_{\sqrt{a}}^0 f\left(\frac{a}{y} + y\right) (-dy) \quad y = \frac{a}{t} \searrow \swarrow \\ &= \int_0^{+\infty} f\left(t + \frac{a}{t}\right) \, dt = \int_0^{+\infty} h(x) \, dx\end{aligned}$$

2.4 Comportement asymptotique des fonctions intégrables

Exercice 19 (*X 2005, 2007*)

Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ tend-elle vers zéro à l'infini ?

Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée bornée, alors f tend vers zéro.

Correction

Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ ne tend pas forcément vers zéro à l'infini. Il y a des exemples dans le cours.

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée bornée.

Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$.

F est de classe $\mathcal{C}^2$ et $F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$.

On utilise la formule de Taylor avec reste intégral.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$:

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \int_x^{x+h} (x+h-t)F''(t) \, dt$$

$$f(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t)f'(t) \, dt$$

On note $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{|F(x+h) - F(x)|}{h} + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t) |f'(t)| dt \\ &\leq \frac{|F(x+h) - F(x)|}{h} + \frac{M_1}{h} \left[-\frac{(x+h-t)^2}{2} \right]_x^{x+h} \\ &\leq \frac{|F(x+h) - F(x)|}{h} + \frac{M_1 h}{2} \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.

$\exists x_0 \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \geq x_0$ $|F(x) - l| \leq \epsilon$

$\forall x \geq x_0$ $\forall h \in \mathbb{R}_+$ $|F(x+h) - F(x)| \leq 2\epsilon$

$\forall x \geq x_0$ $\forall h \in \mathbb{R}_+$ $|f(x)| \leq \frac{2\epsilon}{h} + \frac{M_1 h}{2}$

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{2\epsilon}{h} + \frac{M_1 h}{2} \right) = -\frac{2\epsilon}{h^2} + \frac{M_1}{2}$$

On prend $h = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{M_1}}$ ($M_1 > 0$ quitte à l'augmenter).

$\forall x \geq x_0$ $|f(x)| \leq 2\sqrt{M_1} \sqrt{\epsilon}$.

On a bien $\lim_{+\infty} f = 0$.

On raisonne de même en $-\infty$ ou on utilise $x \mapsto f(-x)$.

Exercice 20 (*Mines 2022*)

Soit $f : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^1 f'(t)^2 dt$ converge et $\lim_{1-} f = 0$.

Montrer que $\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 0$.

Correction

Puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1[$:

$$\forall (x, y) \in [0; 1]^2 \quad f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt$$

Si on suppose $x < y$, on a par Cauchy-Schwarz :

$$|f(y) - f(x)| \leq \left(\int_x^y f'(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_x^y 1^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{y-x} \left(\int_x^y f'(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

On fait tendre y vers 1 :

$$|f(x)| \leq \sqrt{1-x} \left(\int_x^1 f'(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\int_x^1 f'(t)^2 dt \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 0 \text{ donc } \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} 0.$$

2.5 Propriétés des fonctions intégrables

Exercice 21 (*Mines 2016*)

Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, intégrable et monotone sur $]0; 1[$.

Montrer :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 f(t) dt$$

Correction

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer f croissante.

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt$$

Il n'y a pas de problème pour $k=1$ ou $k=n-1$ à cause de l'intégralité de f .

On somme :

$$\int_0^{1-1/n} f(t) dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt$$

et il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$.

2.6 Fonctions de carré intégrable**Exercice 22** (Centrale 2024)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ tq } f^2 \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+\}$.

1. Montrer :

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad fg \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.$$

2. Montrer que E est un espace vectoriel .

3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' appartiennent à E .

Montrer que $f' \in E$

Correction

1. Soit $(f, g) \in E^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

En effet :

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - |xy| = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|) = \frac{(|x| - |y|)^2}{2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad |(fg)(x)| &= |f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \\ &\leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2} \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2 \end{aligned}$$

Or $|f|^2 + |g|^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. E est inclus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et contient la fonction nulle.

E est stable par combinaisons linéaires :

Soit $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$(\lambda f + \mu g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda\mu fg + \mu^2 g^2$ est une combinaison linéaire de fonctions intégrables donc une fonction intégrable.

3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' appartiennent à E .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^x f'(t)^2 dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t) dt.$$

D'après la première question : $\int_0^x f(t)f''(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)f''(t) dt \in \mathbb{R}$

Supposons que f' n'appartiennent pas à E ie $(f')^2$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Comme c'est une fonction positive, $\int_0^x (f'(t))^2 dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a alors $f(x)f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc :

$$\exists x_0 > 0 \text{ tq } \forall x \geq x_0 \ f(x)f'(x) \geq 1.$$

$$\forall x \geq x_0 \ f(x)^2 - f(x_0)^2 = \int_x^{x_0} 2f(t)f'(t) \, dt \geq 2(x - x_0)$$

Donc :

$$\forall x \geq x_0 \ 0 \leq 2(x - x_0) \leq f(x)^2$$

f^2 étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto 2(x - x_0)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: c'est absurde.

Exercice 23 (Ens 2025)

Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\text{Soit } f_+ \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases} \quad \text{et } f_- \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{cases}.$$

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $L^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E bornées sur I et $L^2(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dont le carré est intégrable sur I .

1. On suppose que

$$E = \text{Vect}(f_+) + \text{Vect}(f_-) + G \text{ où } G \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ et } G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}$$

Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

2. On suppose de plus la propriété suivante :

$$E = F_1 + F_2 \text{ avec } \dim(F_1) = \dim(F_2) = 2, \quad F_1 \subset L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) \text{ et } F_2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}) = \{0\}$$

Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.

Correction

1. Soit $f \in E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Il existe deux réels a et b ainsi qu'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = a e^x + b e^{-x} + g(x)$$

Si a est non nul alors $f(x) \sim_{+\infty} a e^x$.

On en déduit que f n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$: c'est absurde.

Donc $a = 0$.

$g = f - b f_-$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$: ce n'est plus au programme mais une combinaison linéaire de fonctions de carré intégrable est de carré intégrable.

Donc $g \in G \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \{0\}$ et $g = 0$.

Il reste :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = b e^{-x}$$

Mais f_- n'est pas de carré intégrable sur $\mathbb{R}_-$ donc $b = 0$.

Finalement $f = 0$.

2. $\exists (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2$ tq $f_+ = f_1 + f_2$
 $f_+ \in L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ donc $f_2 = f_+ - f_1 \in L^\infty(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$

Mais $f_2 \in F_2$ donc $f_2 = 0$ et $f_+ = f_1 \in F_1$

On peut compléter (f_+) en (f_+, g_1) base de F_1 .

Les hypothèses de la première question étant conservées :

$$\exists (a, b, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times G \text{ tq } g_1 = a f_+ + b f_- + g$$

La fonction $h = g_1 - a f_+ = b f_- + g$ appartient à F_1 comme combinaisons linéaires de fonctions de F_1 (f_+ et g_1) donc la fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_-$.

f_- est bornée sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que g qui appartient à G donc h est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

h n'est pas nulle car c'est $g_1 - a f$ avec (f, g_1) libre.

Donc $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \geq 1$.

Supposons $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) > 1$.

Il existe donc h_2 dans E bornée sur $\mathbb{R}$ telle que (h, h_2) est libre.

h_2 s'écrit $\phi_1 + \phi_2$ avec ϕ_1 dans F_1 et ϕ_2 dans F_2 .

$\phi_2 = h_2 - \phi_1$ est bornée sur $\mathbb{R}_-$ et appartient à F_2 donc $\phi_2 = 0$.

On en déduit $h_2 = \phi_1 \in F_1$.

(h, h_2) est libre et F_1 est de dimension 2 donc (h, h_2) est une base de F_1 .

Mais f_+ appartient à F_1 donc f_+ est combinaison linéaire de h et de h_2 qui sont bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f_+ est bornée sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde. Donc $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.

2.7 Deux exercices plus difficiles

Exercice 24 (X 2020)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique ($T > 0$).

Soient a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$.

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$.

1. Convergence de I .
2. Calcul de I .

Correction

En fait, les deux questions doivent être traitées simultanément.

La fonction $x \mapsto \frac{f(bx) - f(ax)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient c et $d \in \mathbb{R}$ tels que $0 < c < d$.

$$\begin{aligned} \int_c^d \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_c^d \frac{f(bx)}{x} dx - \int_c^d \frac{f(ax)}{x} dx \\ &= \int_{bc}^{bd} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ac}^{ad} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{bc}^{ac} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{ac}^{ad} \frac{f(t)}{t} dt + \int_{ad}^{bd} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ac}^{ad} \frac{f(t)}{t} dt \\ &= \int_{ad}^{bd} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$.

$\exists \delta > 0$ tq $\forall t \in [0; \delta] \quad |f(t) - f(0)| \leq \epsilon$ (continuité de f en 0)

Donc :

$$\begin{aligned} \forall c \in \left] 0; \frac{\delta}{b} \right[\quad \left| \int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ac}^{bc} \frac{f(0)}{t} dt \right| &\leq \int_{ac}^{bc} \frac{|f(t) - f(0)|}{t} dt \\ \forall c \in \left] 0; \frac{\delta}{b} \right[\quad \left| \int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right| &\leq \epsilon \ln \left(\frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{ac}^{bc} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{c \rightarrow 0} f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Dans l'intégrale de départ, on voit qu'ajouter à f une constante ne change rien.

On peut donc supposer que la valeur moyenne de f sur une période est nulle².

Soit F la primitive de f nulle en 0. F est T -périodique :

$$\frac{d}{dt} (F(t+T) - F(t)) = f(t+T) - f(t) = 0$$

$$\text{et } F(0+T) - F(0) = \int_0^T f(t) dt = 0$$

Par conséquent F est bornée.

$$\begin{aligned} \int_{ad}^{bd} \frac{f(t)}{t} dt &= \left[\frac{F(t)}{t} \right]_{ad}^{bd} + \int_{ad}^{bd} \frac{F(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{F(bd)}{bd} - \frac{F(ad)}{ad} + \int_{ad}^{bd} \frac{F(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{F(t)}{t^2}$ étant intégrable sur $[1; +\infty[$ (facile à justifier) :

$$\int_{ad}^{bd} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{d \rightarrow +\infty} 0 \text{ pour une fonction de valeur moyenne nulle.}$$

On a donc pour une fonction de moyenne nulle $I = -f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

Dans le cas général :

$$I = \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt - f(0) \right) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Exercice 25 (Centrale 2019)

Soit F définie sur $]0; 1]$ par :

$$\forall x \in]0; 1] \quad F(x) = \int_0^x \sin \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

Soit f définie sur $[0; 1]$ par :

$$\forall x \in]0; 1] \quad f(x) = x(x+1) + F(x)$$

et

$$f(0) = 0$$

1. Définition et dérivabilité de f .
2. Déterminer $f'([0; 1])$.

Correction

1. Soit $x \in]0; 1]$.

La fonction $t \mapsto \sin \left(\frac{1}{t} \right)$ est continue sur $]0; x]$.

$$\forall t \in]0; x] \quad \left| \sin \left(\frac{1}{t} \right) \right| \leq 1$$

et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0; x]$.

On en déduit que la fonction $t \mapsto \sin \left(\frac{1}{t} \right)$ est intégrable sur $]0; x]$.

F est donc définie sur $]0; 1]$.

La relation de Chasles permet d'écrire :

$$\forall x \in]0; 1] \quad F(x) = \int_0^1 \sin \left(\frac{1}{t} \right) dt + \int_1^x \sin \left(\frac{1}{t} \right) dt$$

2. Une rédaction soignée commencerait par ce point, mais on ne le découvre qu'en faisant l'exercice

Sous cette forme, on peut appliquer le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral. f est donc $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$ avec :

$$\forall x \in]0; 1] \quad f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

f est donc bien définie sur $[0; 1]$.

f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1]$ et :

$$\forall x \in]0; 1] \quad f'(x) = 1 + 2x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$f'(x)$ n'a pas de limite en 0. Cela n'empêche pas f d'être dérivable en 0 mais elle ne sera pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

En 0 le taux d'accroissement est :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x + 1 + \frac{1}{x} \int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = x + 1 + \frac{1}{x} \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

$$\forall X > 0 \quad \int_X^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du = \frac{\cos(X)}{X^2} - 2 \int_X^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^3} du = O_{+\infty}\left(\frac{1}{X^2}\right) \text{ (classique)}$$

On en déduit :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x + 1 + \frac{1}{x} O(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

$$2. \quad f'([0; 1]) = \{f'(0)\} \cup f'([0; 1]) = \{1\} \cup f'([0; 1])$$

f' est continue sur $]0; 1]$ donc $f'([0; 1])$ est un intervalle.

$$\forall x \in]0; 1] \quad f'(x) = 1 + 2x + \sin\left(\frac{1}{x}\right) > 1 - 1 = 0$$

De plus $f'\left(\frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la borne inférieure de $f'([0; \pi])$ est 0 et elle n'est pas atteinte.

Comme $f'([0; 1]) = \{1\} \cup f'([0; 1])$, 0 est la borne inférieure de $f'([0; 1])$ et elle n'est pas atteinte. L'image du segment $[0; 1]$ par f' n'est pas un segment.

$$f'(1) = 3 + \sin(1) \simeq 3,84$$

$$\forall x \in]0; 1] \quad \frac{f'(1) - 2}{2} \left[f'(x) < 1 + f'(1) - 2 + 1 = f'(1) \right]$$

$$\text{On note } a = \frac{f'(1) - 2}{2} \simeq 0,92$$

f' est continue sur le segment $[a; 1]$ donc il existe x_0 dans ce segment tel que :

$$\forall x \in [a; 1] \quad f'(x) \leq f'(x_0)$$

On a donc :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f'(x) \leq f'(x_0)$$

$$x_0 > 0 \text{ donc si } x_0 < 1 \text{ alors } f''(x_0) = 0.$$

$$\text{Donc } x_0^{-2} \cos(x_0^{-1}) = 2$$

$$\text{Mais } x_0^{-2} \cos(x_0^{-1}) \leq x_0^{-2} \leq a^{-2} \simeq 1,18 \text{ donc on aboutit à une contradiction.}$$

Par conséquent $x_0 = 1$ et $f'([0; 1]) =]0, f'(1)]$.