

ANALYSE 1

2026-2027

Correction

Correction des exercices du deuxième chapitre du cours

941

Exercice 1 (X 2024)

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Convergence de (S_n) en fonction de α .
2. On suppose $\alpha > 0$.
Donner un équivalent de S_n .
3. Equivalent de $S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Correction

1. C'est une question de cours.

La suite (S_n) converge si, et seulement si, $\alpha > -1$.

Si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k t^\alpha dt \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} t^\alpha dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^n t^\alpha dt \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

On en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$ et on a la réponse à la seconde question.

Si $\alpha = 0$, $S_n = n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Si $\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est décroissante.

Si $-1 < \alpha < 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k t^\alpha dt \geq S_n \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} t^\alpha dt$$

La fonction $t \mapsto t^\alpha$ étant bien intégrable en 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^n t^\alpha dt \geq S_n \geq \int_1^{n+1} t^\alpha dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \geq S_n \geq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \text{ car } \alpha+1 > 0$$

On en déduit que (S_n) diverge vers $+\infty$.

Si $\alpha = -1$ alors :

$$S_n \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Si $\alpha < -1$:

$$S_n \leq 1 + \int_1^n t^\alpha dt = 1 + \frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} \leq 1 - \frac{1}{\alpha + 1} \text{ car } \alpha + 1 < 0$$

La suite (S_n) est croissante et majorée donc elle converge.

2. Cf la première question. On remarquera que l'équivalent est en fait valable pour $\alpha > -1$.
- 3.

$$\begin{aligned} S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} &= \sum_{k=1}^n k^\alpha - \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k t^\alpha dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (k^\alpha - t^\alpha) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left([(t - (k-1))(k^\alpha - t^\alpha)]_{k-1}^k + \alpha \int_{k-1}^k (t - k + 1)t^{\alpha-1} dt \right) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (t - k + 1)t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \int_0^1 t^\alpha dt + \alpha \sum_{k=2}^n \left(\left[\frac{(t - k + 1)^2}{2} t^{\alpha-1} \right]_{k-1}^k - \frac{\alpha - 1}{2} \int_{k-1}^k (t - k + 1)^2 t^{\alpha-2} dt \right) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + 1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=2}^n k^{\alpha-1} - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (t - k + 1)^2 t^{\alpha-2} dt \end{aligned}$$

D'après les questions précédentes, $\sum_{k=2}^n k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$

De plus :

$$0 \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (t - k + 1)^2 t^{\alpha-2} dt \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k t^{\alpha-2} dt = \int_1^n t^{\alpha-2} dt = \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha - 1} \text{ si } \alpha \neq 1, = \ln(n) \text{ si } \alpha = 1.$$

Donc l'équivalent cherché est $\frac{n^\alpha}{2}$.

Remarque

La méthode suggérée par l'examineur était différente.

$$\text{Soit } F \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{cases}$$

$\alpha > 0$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 S_n - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} &= \sum_{k=1}^n F'(k) - \sum_{k=1}^n (F(k) - F(k-1)) \quad (F(0) = 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n (F(k-1) - F(k) - (k-1-k)F'(k)) \\
 &= F(0) - F(1) + F'(1) + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}(k-1-k)^2 F''(k) + \int_k^{k-1} \frac{(k-1-t)^2}{2} F^{(3)}(t) dt \right) \\
 &= \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=2}^n k^{\alpha-1} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (t-(k-1))^2 t^{\alpha-2} dt
 \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $\sum_{k=2}^n k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$ et :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k (t-(k-1))^2 t^{\alpha-2} dt \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k t^{\alpha-2} dt = \int_1^n t^{\alpha-2} dt = \frac{n^{\alpha-1} - 1}{\alpha - 1} \text{ si } \alpha \neq 1, \\
 &= \ln(n) \text{ si } \alpha = 1.
 \end{aligned}$$

Donc l'équivalent cherché est $\frac{n^\alpha}{2}$.

Exercice 2 (*X 2014, Mines 2024*)

Soit $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right)^n$.

1. Etudier (u_n) .

2. On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{n}$.

Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 2} v_n$?

Correction

1.

$$\begin{aligned}
 u_n &= \left(\frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)} \right) \right)^n \\
 &= \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)} \right) \right) \right) \\
 &= \exp \left(n \left(\frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)} \right) \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{1}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)} \right) \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n} \right)
 \end{aligned}$$

(u_n) converge vers 1.

2. $v_n \sim \frac{1}{n \ln n} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge (cf 2.1.3) pour les détails donc $\sum_{n \geq 2} v_n$ diverge.

Exercice 3 (*Mines 2019*)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un réel quelconque.

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = f\left(a + \frac{1}{n}\right) + f\left(a - \frac{1}{n}\right) - 2f(a)$?

Correction

$$u_n = f(a) + f'(a)\frac{1}{n} + f(a) - f'(a)\frac{1}{n} - 2f(a) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série converge absolument.

Exercice 4 (*Centrale 2019*)

Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Correction

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = (n+1)^{-1/2} - 2(n+1)^{1/2} + 2n^{1/2} \\ &= n^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2n^{1/2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + 2n^{1/2} \\ &= n^{-1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2n^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2n^{1/2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge absolument.

Donc la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.