

ANALYSE 1
TD
2026-2027
Chapitre 2
Séries de nombres réels ou complexes

941

1 Natures de séries

Exercice 1 (*Mines 2007*)

Déterminer la nature de la série $\sum \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + a} \right)$, $a \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (*X*)

Déterminer la nature de la série $\sum n \left(\arctan(n) - 2 \arctan \left(\frac{n-1}{n} \right) \right)$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \right)$ (Mines 99)
2. $\sum \left(\prod_{k=2}^n (2 - e^{1/k}) \right)$ (Centrale)
3. $\sum \frac{\sin(\pi e^{n!})}{\ln n}$ (X)

Exercice 4 (*Mines 2018*)

Soit $a > 0$.

Pour tout $n \geq 2$, soit $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a} \right)$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 5 (*Mines 2018*)

Nature de la série de terme général $u_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^\alpha}$?

Exercice 6 (*Mines 2018*)

On définit pour tout $n \geq 0$, $u_n = \ln \left(\tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \right)$.

Etudier la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 7 (*Mines 2016*)

Nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right)^n$$

Exercice 8 (*Centrale 2014*)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \\ u_0 \in [0; \pi] \end{cases}$

1. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n^2}{2}$
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 9 (*X 2017*)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive décroissante.

Montrer :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge} \iff \begin{cases} a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sum_{n \geq 0} n(a_n - a_{n+1}) \text{ converge} \end{cases}$$

Exercice 10 (*X 2018*)

Soit (a_n) une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge.

1. $\sum (a_n)^{2018}$ peut-elle diverger ?
2. $\sum (a_n)^{2019}$ peut-elle diverger ?

Exercice 11 (*Centrale 2024*)

1. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui admet pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la même limite.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Montrer que $v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

La réciproque est-elle vraie ?

3. On suppose $v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Montrer que si $l < 1$ alors la série de terme général v_n converge.

Montrer que si $l > 1$ alors la série de terme général v_n diverge.

Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Commenter.

Exercice 12 (X 2024)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$?

Exercice 13 (Ens 2025)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$

La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle ?

2 Sommes de séries

Exercice 14 (CCP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

1. Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$

2. (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer, à l'aide d'une comparaison série intégrale, que $H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

4. Exprimer $\sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+1}$ en fonction de H_{2n} , H_n et n .

5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 15 (Mines 2017)

$$h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{h(t)}{2 \sin(t/2)} & \text{si } t \in]0; \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.
2. Soit $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$. Domaine de définition de φ .
3. Soit $I_k = \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt$. Calculer I_k .
4. En déduire $\varphi(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 16 (*Mines 2005, 2019*)

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 17 (*X 2005*)

Soient α et β appartenant à $]0, 2\pi[$.

$$I_n = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^n e^{ki\theta} d\theta$$

1. Montrer que I_n admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. La calculer.
2. Que dire des séries de terme général $\frac{e^{ika}}{ik}$ avec $a \in]0, 2\pi[$?
3. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi/2}}{ik}$.

2.1 Séries et intégrales**Exercice 18** (*Mines 2019*)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. En posant $x = \tan(t)$, montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.
2. Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général $\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$.
3. Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.
4. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

Exercice 19 (*Centrale 2005*)

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

1. Montrer que F est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

3. Montrer que $F(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0.
4. Montrer qu'il existe un unique $r \in]0, \pi]$ tel que $F(r) = 0$.

Exercice 20 (*Mines 2016*)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.
Etudier la série de terme général a_n pour montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
2. (a) On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$.
Etablir une relation entre I_n et I_{n+1} .
(b) Donner un équivalent de I_n .