

ANALYSE 1
TD
2026-2027
Chapitre 2
Séries de nombres réels ou complexes
Correction

941

1 Natures de séries

Exercice 1 (*Mines 2007*)

Déterminer la nature de la série $\sum \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + a} \right)$, $a \in \mathbb{R}$

Correction

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{1/2}} \right) \\ &= \ln \left(\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{-1/2} \right) \text{ subtilité pour simplifier les calculs} \\ &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) \text{ pour } n \text{ assez grand} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} - \frac{a}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{a+1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

La suite (u_n) est alternée à partir d'un certain rang.

Pour avoir la monotonie, à partir d'un certain rang, on fait un développement asymptotique de :

$$|u_{n+1}| - |u_n| = (-1)^{n+1}u_{n+1} - (-1)^nu_n = (-1)^{n+1}(u_{n+1} + u_n)$$

- $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée.
- $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- La suite $\left(\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ converge.

D'après le théorème spécial sur la convergence des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

Une série dont le terme général est en $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge absolument donc converge.

En conséquence :

$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum \frac{a+1}{2n}$ converge.

Finalement :

$$\sum \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}} \right) \text{ converge } \iff a = -1$$

Exercice 2 (X)

Déterminer la nature de la série $\sum n \left(\arctan(n) - 2 \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$

Correction

Avec Taylor-Young, on montre :

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + O(h^3)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_n &= n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) - 2 \arctan\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) \\ &= n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right) \\ &= n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Une série dont le terme général est en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.

La série $\sum \frac{1}{2n}$ diverge.

Finalement, la série $\sum n \left(\arctan(n) - 2 \arctan\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$ diverge.

Remarque

Comment montre-t-on la formule pour $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$?

• Première méthode

Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée nulle donc constante sur chaque intervalle de son domaine de définition $\mathbb{R}^*$

• Deuxième méthode

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

$$\text{Donc } \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Donc } \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + k\pi$$

$$\text{Si } x > 0, \arctan(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ comme } \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $x < 0$, $\arctan(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$ et $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ comme $\pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
 Donc : $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \right)$ (Mines 99)

Correction

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $2n > 1$ donc $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^{2n}}$ converge et u_n est bien défini.

Si on démarrait à $k = 1$, on aurait :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \geq \frac{1}{n} \frac{1}{1^{2n}} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

La série divergerait.

- **Première méthode**

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \frac{1}{4} = \frac{u_n}{4} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n \leq \frac{u_1}{4^{n-1}}$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$u_{n+1} \leq \frac{1}{4} u_n \leq \frac{u_1}{4^n}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq \frac{u_1}{4^{n-1}}$ terme général d'une série convergente

Donc la série $\sum \left(\frac{1}{n} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \right)$ converge.

- **Deuxième méthode**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall k \geq 2 \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{2n}} \leq \frac{1}{k^{2n}} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^{2n}} dt$$

D'où en sommant :

$$\int_2^{+\infty} t^{-2n} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \int_1^{+\infty} t^{-2n} dt$$

Donc :

$$\frac{1}{n} \left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_2^{+\infty} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_1^{+\infty}$$

Donc :

$$\frac{1}{n(2n-1)2^{2n-1}} \leq u_n \leq \frac{1}{n(2n-1)}$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(2n-1)}$$

Donc $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $\frac{1}{n^2}$ positif et terme général d'une série convergente.

Donc la série de terme général u_n converge absolument donc converge.

• **Troisième méthode**

Soit $n \geq 1$.

$$\forall k \geq 2 \quad \frac{1}{(k+1)^{2n}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{2n}} \leq \frac{1}{k^{2n}}$$

D'où en sommant :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^{2n}} \leq \int_2^{+\infty} t^{-2n} dt \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

Donc :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \left[\frac{t^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_2^{+\infty} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

Donc :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} - \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

Donc :

$$\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$$

Donc :

$$0 \leq u_n \leq v_n = \frac{1}{n} \frac{1}{2^{2n}} \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)$$

Donc $u_n = o\left(\frac{1}{4^n}\right)$ et la série de terme général u_n converge.

2. $\sum \left(\prod_{k=2}^n (2 - e^{1/k}) \right)$ (Centrale)

Correction

$$\forall k \geq 2 \quad e^{1/k} \leq \sqrt{e} < 2 \text{ car } e < 4$$

Donc :

$$\forall n \geq 2 \quad u_n > 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - e^{1/(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 : \text{la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.}$$

$$\forall n \geq 2 \quad \ln u_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{1/k})$$

$$\begin{aligned} \ln(2 - e^{1/k}) &= \ln\left(2 - 1 - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k \geq 2} \ln(2 - e^{1/k}) + \frac{1}{k}$ converge absolument.

$$\text{Donc } \ln u_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 \in \mathbb{R}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\ln u_n &= -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + l_1 + o(1) = -\ln n - \gamma + l_1 + o(1) \\ &= -\ln n + l + o(1) \text{ avec } l \in \mathbb{R} \\ u_n &= \exp(-\ln n + l + o(1)) = \frac{e^l}{n} e^{o(1)} \\ &\sim \frac{K}{n} \text{ avec } K > 0\end{aligned}$$

Finalement, $\sum \left(\prod_{k=2}^n (2 - e^{1/k}) \right)$ diverge.

3. $\sum \frac{\sin(\pi e n!)}{\ln n}$ (X)

Correction

Soit $n \geq 2$.

$$e = e^1 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

$$\pi n! e = \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} \right) \pi + \pi \left(\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!} \right) + \pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n-2} (n(n-1) \dots (k+1)) \text{ est un entier pair.}$$

De plus, $\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!} = n+1$ donc :

$$\begin{aligned}\sin(\pi n! e) &= \sin \left(\pi(n+1) + \pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \right) \\ &= (-1)^{n+1} \sin \left(\pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \right)\end{aligned}$$

$n \geq 2$ donc :

$$0 \leq \pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \pi e \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{\pi e}{n+1} \leq \pi$$

On en déduit :

- $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(\pi e n!)}{\ln n}$ est alternée.

On a directement :

- $\frac{\sin(\pi e n!)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Pour la monotonie, on utilise :

$\sin$ est décroissante sur $[0; \pi/2]$ (mais pas sur $[0; \pi]$).

$$\forall n \geq 5 \quad 0 \leq \pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \frac{\pi e}{n+1} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$$

On montre facilement que $\left(\pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \right)_{n \geq 5}$ est décroissante et prend ses valeurs dans $[0; \pi/2]$.

On en déduit que $\left(\sin \left(\pi \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \right) \right)_{n \geq 5}$ est décroissante et positive.

De même $\left(\frac{1}{\ln n} \right)_{n \geq 5}$ est décroissante et positive.

On peut faire le produit membre à membre.

Donc :

- $\left(\left| \frac{\sin(\pi e n!)}{\ln n} \right| \right)_{n \geq 5}$ est décroissante.

Finalement la série converge par application du théorème spécial sur la convergence des séries alternées.

Exercice 4 (Mines 2018)

Soit $a > 0$.

Pour tout $n \geq 2$, soit $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a} \right)$.

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Correction

$a > 0$ donc :

$$\forall n \geq 2 \quad 0 \leq \frac{1}{n^a} < \frac{1}{1^a} = 1$$

La suite est bien définie.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \text{ donc :}$$

$$u_n - \frac{(-1)^n}{n^a} \sim -\frac{1}{2n^{2a}} \leq 0$$

Comme $a > 0$, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^a}$ converge (les détails sont dans le cours) et :

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} &\iff \sum u_n - \frac{(-1)^n}{n^a} \text{ converge} \\ &\iff \sum \frac{1}{2n^{2a}} \text{ converge} \\ &\iff a > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5 (Mines 2018)

Nature de la série de terme général $u_n = \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^\alpha}$?

Correction

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < \sin \left(\frac{1}{n} \right) \leq 1$$

Donc u_n est bien défini pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= n^\alpha \ln \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) = n^\alpha \ln \left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= n^\alpha \left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = -\frac{n^{\alpha-2}}{6} + o(n^{\alpha-2}) \end{aligned}$$

- **Premier cas : $\alpha < 2$**

$\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$: la série diverge grossièrement.

- **Deuxième cas :** $\alpha = 2$

$\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{6}$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1/6}$: la série diverge grossièrement.

- **Troisième cas :** $\alpha > 2$

$2 \ln n + u_n = -\frac{n^{\alpha-2}}{6} + o(n^{\alpha-2}) + 2 \ln n$ et $\ln n = o(n^{\alpha-2})$ car $\alpha - 2 > 0$

$2 \ln n + u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

$n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ie $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On en déduit classiquement que la série converge (absolument).

Exercice 6 (Mines 2018)

On définit pour tout $n \geq 0$, $u_n = \ln \left(\tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \right)$.

Etudier la nature de la série de terme général u_n .

Correction

Indication de l'examinatrice : $\frac{1}{2k+1} = \int_0^1 x^{2k} dx$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x^2)^k dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n I_n \text{ avec } I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1 + x^2} dx \end{aligned}$$

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3} \text{ donc } I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + (-1)^n I_n \right) \right) \\ &= \ln \left(1 + 2(-1)^n I_n + O(I_n^2) \right) \quad (\text{Taylor-Young}) \\ &= 2(-1)^n I_n + O(I_n^2) = 2(-1)^n I_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

- La série de terme général $(-1)^n I_n$ est alternée.
- $(-1)^n I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- La suite $(|(-1)^n I_n|)_{n \in \mathbb{N}} = (I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante :
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad x^{2n+4} \leq x^{2n+2}$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad \frac{x^{2n+4}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 \frac{x^{2n+4}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

Donc la série de terme général $(-1)^n I_n$ converge.

Mais $u_n - 2(-1)^n I_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n - 2(-1)^n I_n$ converge absolument donc converge.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Exercice 7 (Mines 2016)

Nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right)^n$$

Correction : Attention au signe : $a - b$ peut être négatif

• Première méthode

La présence de n à l'exposant peut inciter à utiliser la règle de d'Alembert.

Il faut d'abord s'assurer que u_n est différent de 0 au moins à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} &= n \left(\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \right) \\ &= n \left(1 + \frac{a}{2n} + \left(1 - \frac{a^2}{8} \right) \frac{1}{n^2} - 1 - \frac{b}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{8} \right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= \frac{a-b}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc si $a > b$, $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} > 0$ à partir d'un certain rang, ce qui légitime l'utilisation de la règle de d'Alembert.

Si $a < b$ alors u_n a le signe de $(-1)^n$ mais on peut appliquer la règle de d'Alembert à la série de terme général $|u_n|$.

Si $a = b$, $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \sim \frac{1}{2n} > 0$.

On commence par le cas $a > b$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{\sqrt{(n+1)^2 + a(n+1) + 2} - \sqrt{(n+1)^2 + b(n+1) + 1}}{\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}} \right)^n \left(\sqrt{(n+1)^2 + a(n+1) + 2} - \sqrt{(n+1)^2 + b(n+1) + 1} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{(a-b)/2}{(a-b)/2} = 1 \text{ mais } 1^\infty \text{ est} \end{aligned}$$

une forme indéterminée.

Par contre :

$$\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} = \frac{a-b}{2} \left(1 + \frac{2}{a-b} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

Il est notoire que pour tout réel x (et même pour tout complexe x), $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$ donc :

$$u_n = \left(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right)^n \sim \left(\frac{a-b}{2} \right)^n \exp \left(\frac{2}{a-b} \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} \right) \right) \geq 0$$

Le recours explicite à la règle de d'Alembert n'est pas utile : on a un équivalent de u_n .

On a pour tout x réel ou complexe :

$$\sum_{n \geq 0} x^n \text{ converge} \iff |x| < 1$$

On en déduit :

Si $0 < \frac{a-b}{2} < 1$ alors la série de terme général u_n converge.

Si $\frac{a-b}{2} \geq 1$ alors la série de terme général u_n diverge.

Dans le cas $a = b$, $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc à partir d'un certain rang :

$0 \leq \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \leq \frac{1}{2}$ et par suite $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^n}$. On en déduit que la série converge.

Passons au cas $a < b$.

$|u_n| = \left(\sqrt{n^2 + bn + 1} - \sqrt{n^2 + an + 2} \right)^n$ avec

$$\sqrt{n^2 + bn + 1} - \sqrt{n^2 + an + 2} = \frac{b-a}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Si $-1 < \frac{a-b}{2} < 0$, la série de l'énoncé converge absolument donc converge.

Lorsqu'une série géométrique diverge, elle diverge grossièrement.

Donc si $\frac{a-b}{2} \leq 1$ alors la série de terme général $|u_n|$ diverge grossièrement donc la série de terme général u_n diverge grossièrement. Finalement la série converge si, et seulement si, $|a-b| < 2$.

• Deuxième méthode

L'idée cette fois-ci est la suivante : est-ce que la suite (u_n) converge vers 0, à quelle vitesse ?

On précise donc le comportement de $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} &= n \left(\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2} \right)^{1/2} - \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \right) \\ &= n \left(1 + \frac{a}{2n} + \left(1 - \frac{a^2}{8} \right) \frac{1}{n^2} - 1 - \frac{b}{2n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{b^2}{8} \right) \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= \frac{a-b}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{8} \right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

— **Premier cas :** $|a-b| > 2$.

$$\left| \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|a-b|}{2} > 1$$

l^∞ avec $l > 1$ n'est pas une forme indéterminée donc $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

La série de l'énoncé diverge donc grossièrement.

— **Deuxième cas :** $|a-b| < 2$.

Cette fois (u_n) converge vers 0 rapidement.

On pourrait s'en sortir en montrant que $n^2 u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ mais cela nécessite des précautions dans la rédaction car on doit écrire un logarithme.

Soit $c \in \left] \frac{|a-b|}{2}; 1 \right[$.

$$\left| \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|a-b|}{2} \text{ donc :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0 \left| \sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} \right| < c$$

- $\forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq c^n$
 La série converge absolument
- **Troisième cas : $a = b + 2$**
 $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} = 1 - \frac{b}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
 $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-b/2} \neq 0$
 La série diverge grossièrement.
- **Quatrième cas : $a = b - 2$**
 $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1} = -1 + \frac{b}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
 $\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + bn + 1}$ est donc négatif pour n grand.
 $|u_n| = \left(1 - \frac{b}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-b/2} \neq 0$
 La série diverge grossièrement.
- Finalement la série converge si, et seulement si, $|a - b| < 2$.

Exercice 8 (Centrale 2014)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \\ u_0 \in [0; \pi] \end{cases}$

- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{u_n^2}{2}$
- En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Correction

- On introduit classiquement $f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - \cos x \end{cases}$
 f est continue et croissante sur $[0; \pi]$ donc $f([0; \pi]) = [f(0); f(\pi)] = [0; 2] \subset [0; \pi]$.
 On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0; \pi]$ (il n'y a pas de problème de définition ici)
 On étudie ensuite le signe de $g \begin{cases} [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 - \cos x - x \end{cases}$, ce qui nécessite ici une étude de la fonction g .
 $\forall x \in [0; \pi] \quad g'(x) = \sin x - 1 \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x = \frac{\pi}{2}$.
 g est donc (strictement) décroissante sur $[0; \pi]$. Or $g(0) = 0$ donc :
 $\forall x \in [0; \pi] \quad f(x) \leq x$
 On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Etant minorée par 0, elle converge vers $l \in [0; \pi]$ tel que $f(l) = l$ ie vers $l = 0$.
- $\forall x \in [0; \pi] \quad \cos x - 1 = \cos x - \cos 0 = (x - 0)(-\sin(0)) = \cos x - 1 - (x - 0) \cos'(0) = \int_0^x (x - t)(-\cos t) dt$ (formule de Taylor avec reste intégral)

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; \pi] \quad 1 - \cos x &= |\cos x - 1| = \left| \int_0^x (x - t)(-\cos t) dt \right| \\ &\leq \int_0^x (x - t) dt = \left[\frac{-(x - t)^2}{2} \right]_0^x \\ &\leq \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

On peut également utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{aligned}
 \forall x \in [0; \pi] \quad 1 - \cos x &= |\cos x - 1| \text{ car } \cos x \leq 1 \\
 &= |\cos x - 1 - (x - 0)(-\sin(0))| = |\cos x - 1 - (x - 0)\cos'(0)| \\
 &\leq \frac{x^2}{2} \sup_{t \in [0; x]} (|\cos^{(2)}(t)|) = \frac{x^2}{2} \sup_{t \in [0; x]} (|\sin(t)|) \\
 &\leq \frac{x^2}{2}
 \end{aligned}$$

3. Si $u_0 = 0$ alors $u_n = 0$ pour tout n et la série converge.

Si $u_0 \in]0; \pi]$ qui est stable par f alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{u_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$ et par la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 9 (X 2017)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive décroissante.

Montrer :

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge} \iff \begin{cases} a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \\ \sum_{n \geq 0} n(a_n - a_{n+1}) \text{ converge} \end{cases}$$

Correction

On commence par un calcul préliminaire :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_p &= \sum_{n=0}^p n(a_n - a_{n+1}) \text{ c'est une définition} \\
 &= \sum_{n=0}^p na_n - \sum_{n=0}^p na_{n+1} = \sum_{n=0}^p na_n - \sum_{n=1}^{p+1} (n-1)a_{n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^p a_n - pa_{p+1}
 \end{aligned}$$

On a donc :

$$S_p = a_0 + \Sigma_p + \frac{p}{p+1}(p+1)a_{p+1} \text{ et on a le sens retour.}$$

Dans le sens direct, on écrit :

$$\Sigma_p \leq \sum_{n=1}^p a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

$\sum_{n \geq 0} n(a_n - a_{n+1})$ est une série à termes positifs (à cause de la décroissance) dont la suite des sommes partielles converge.

Donc $\sum_{n \geq 0} n(a_n - a_{n+1})$ converge.

Revenant au calcul précédent, on voit que la suite (pa_{p+1}) converge. Cela ne peut être que vers 0.

Exercice 10 (X 2018)

Soit (a_n) une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge.

1. $\sum (a_n)^{2018}$ peut-elle diverger ?
2. $\sum (a_n)^{2019}$ peut-elle diverger ?

Correction

1. Oui, il suffit de prendre $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[2018]{n}}$.

2. Oui, on prend :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \forall r \in \llbracket 0; 2017 \rrbracket a_{2019q+r} = \frac{1}{\sqrt[2019]{q}}$$

$$\forall q \in \mathbb{N}^* a_{2019q+2018} = -\frac{2018}{\sqrt[2019]{q}}.$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \sum_{r=0}^{2018} a_{2019q+r} = 0$$

On prend le temps de le justifier mais la série $\sum a_n$ converge et sa somme est nulle.

$$\text{Pour tout } n, \text{ soit } S_n = \sum_{k=2019}^n a_k.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* S_{2019n+2018} = \sum_{q=1}^n \left(\sum_{r=0}^{2018} a_{2019q+r} \right) = \sum_{q=1}^n 0 = 0$$

Donc la suite extraite $(S_{2019n+2018})$ converge vers 0.

Mais la suite (a_n) converge vers 0, donc par linéarité, pour tout $r \in \llbracket 0; 2017 \rrbracket$ les suites extraites :

$$(S_{2019n+r}) = \left(S_{2019n+2018} - \sum_{l=r+1}^{2018} a_{2019n+l} \right) \text{ convergent vers } 0.$$

Sur le modèle des suites extraites paires et impaires, on peut alors en revenant à la définition montrer que la suite (S_n) converge vers 0.

Par contre la série $\sum (a_n)^{2019}$ diverge :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \sum_{r=0}^{2018} (a_{2019q+r})^{2019} = \sum_{r=0}^{2017} \frac{1}{q} - \frac{2018^{2019}}{q} = \frac{2018 - 2018^{2019}}{q}.$$

$$\text{Pour tout } n, \text{ soit } \Sigma_n = \sum_{k=2019}^n a_k^{2019}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \Sigma_{2019n+2018} = \sum_{q=1}^n \left(\sum_{r=0}^{2018} a_{2019q+r}^{2019} \right) = \sum_{q=1}^n \frac{2018 - 2018^{2019}}{q} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Donc la suite (Σ_n) diverge.

Exercice 11 (Centrale 2024)

1. On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui admet pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet la même limite.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs réelles strictement positives telle que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Montrer que $v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

La réciproque est-elle vraie ?

3. On suppose $v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Montrer que si $l < 1$ alors la série de terme général v_n converge.

Montrer que si $l > 1$ alors la série de terme général v_n diverge.

Montrer que si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Commenter.

Correction

1. On commence par le cas $l = 0$.

Soit $\epsilon > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0 + 1 \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n \epsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \frac{n - n_0}{n} \epsilon \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \end{aligned}$$

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc :

$\exists n_1 \geq n_0 + 1$ tq $\forall n \geq n_1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \leq \epsilon$

Donc :

$$\forall n \geq n_1 \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq 2\epsilon$$

Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On suppose ensuite $l \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $w_n = u_n - l$.

$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Mais :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - l$$

donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

On suppose ensuite $l = +\infty$.

Soit $A > 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$

$$\forall n \geq n_0 + 1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{n - n_0}{n} A$$

$$\forall n \geq 2n_0 \quad 2(n - n_0) - n = n - 2n_0 \geq 0$$

Donc :

$$\forall n \geq 2n_0 \quad \frac{n - n_0}{n} \geq \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2n_0 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{2}A$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc :}$$

$$\exists n_1 \geq 2n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_1 \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right| \leq \frac{A}{4}$$

On a alors :

$$\forall n \geq n_1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \geq \frac{A}{4}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Enfin le cas $l = -\infty$ se traite avec $w_n = -u_n$.

2. On commence par le cas $l \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l).$$

D'après la première question :

$$\frac{\ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l)$$

$$\frac{\ln(v_1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \frac{\ln(v_{n+1})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(l).$$

$$\text{On en déduit } \frac{\ln(v_n)}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{\ln(v_n)}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times \ln(l) = \ln(l).$$

$$\text{En passant à l'exponentielle, } v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l.$$

On suppose ensuite $l = 0$.

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

D'après la première question :

$$\frac{\ln(v_{n+1}) - \ln(v_1)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(v_{k+1}) - \ln(v_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\frac{\ln(v_1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \frac{\ln(v_{n+1})}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

$$\text{On en déduit } \frac{\ln(v_n)}{n} = \frac{n-1}{n} \frac{\ln(v_n)}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

$$\text{En passant à l'exponentielle, } v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le cas $l = +\infty$ se traite de manière similaire.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad v_{2p-1} = 1 \text{ et } v_{2p} = 2$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad v_{2p-1}^{1/(2p-1)} = 1 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad v_{2p}^{1/(2p)} = \exp\left(\frac{\ln(2p)}{2p}\right) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Donc } v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Par contre } \frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = 2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 2$$

Par contre $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

Donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

3. Il s'agit donc ici d'établir une règle d'application plus générale que la règle de d'Alembert.

On commence par le cas $l < 1$.

Soit $r \in]l; 1[$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \ v_n^{1/n} \leq r$

$\forall n \geq n_0 \ 0 \leq v_n \leq r^n$

La série de terme général r^n converge donc la série de terme général v_n converge.

On passe ensuite au cas $l > 1$.

Soit $r \in]1; l[$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \geq n_0 \ v_n^{1/n} \geq r$

$\forall n \geq n_0 \ 0 \leq v_n \leq r^n$

Donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la série de terme général v_n diverge grossièrement.

Prenons $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$v_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et la série de terme général v_n diverge.

Prenons $v_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$v_n^{1/n} = \exp\left(\frac{-2 \ln(n)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et la série de terme général v_n converge.

Exercice 12 (X 2024)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$?

Correction

Soit $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{4} + k\pi; \frac{1}{4} + k\pi \right[$.

La longueur de chaque intervalle $\left] -\frac{1}{4} + k\pi; \frac{1}{4} + k\pi \right[$ est $\frac{1}{2} < 1$.

La distance entre deux intervalles consécutifs est $-\frac{1}{4} + (k+1)\pi - \left(\frac{1}{4} + k\pi\right) = \pi - \frac{1}{2} > 1$

Par conséquent, il ne peut pas y avoir 2 entiers consécutifs dans E .

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\tan(2n-1)|$ ou $|\tan(2n)| \geq \tan\left(\frac{1}{4}\right)$ noté a .

a est strictement positif.

On en déduit que :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{|\tan(2n-1)|}{2n-1} \geq \frac{a}{2n-1} \geq \frac{a}{2n}$ ou $\frac{|\tan(2n)|}{2n} \geq \frac{a}{2n}$

Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \frac{|\tan(2n-1)|}{2n-1} + \frac{|\tan(2n)|}{2n} \geq \frac{a}{2n}$

Si on note (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$ alors :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_{2n} \geq \frac{a}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Par conséquent la suite (S_n) diverge et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\tan(n)|}{n}$ aussi.

Exercice 13 (Ens 2025)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin(u_n)$$

La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle ?

Correction

La fonction $\sin$ étant définie sur $\mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne pose aucun problème de définition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$\sin$ est strictement croissante sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$ donc $0 = \sin(0) < u_{n+1} \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 < \frac{\pi}{2}$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc prouvé :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n < 0$ par stricte convexité de $\sin$ sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$ ou par étude de la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée donc convergente.

Sa limite est un nombre compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\sin(x) = x$.

Seul $x = 0$ convient (convexité ou étude de fonction)

$$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6}$$

Les examinateurs s'intéressent alors à l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{6}y^3$

On a $\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{6}$ (les examinateurs ne se préoccupent pas dans cette phase de recherche de la division par un nombre qui pourrait être nul)

$$\text{Donc } -\frac{1}{y^2} = -\frac{t}{6} + C.$$

"Motivé par cette solution", on pose $v_n = \frac{1}{u_n^2}$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 u_{n+1}^2} = \frac{(u_n - u_{n+1})(u_n + u_{n+1})}{u_n^2 u_{n+1}^2} \\ &= \frac{(u_n + \sin(u_n))(u_n - \sin(u_n))}{u_n^2 \sin^2(u_n)} \sim \frac{2u_n \frac{u_n^3}{6}}{u_n^2 u_n^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } v_{n+1} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

Les examinateurs en déduisent, sans dire comment $v_n \sim \frac{n}{3}$.

$$\text{On peut utiliser Césaro : } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \frac{v_n}{n} - \frac{v_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}.$$

On a donc $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ et tout est positif donc la série de terme général u_n^2 diverge.

Une autre méthode est possible.

$u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^3}{6}$ donc :

$$\frac{u_n^2}{6} \sim 1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$$

Mais la suite $(\ln(u_n))$ diverge donc la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ diverge.

Tout étant positif, on en déduit que la série de terme général u_n^2 diverge.

2 Sommes de séries

Exercice 14 (CCP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

1. Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$

2. (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer, à l'aide d'une comparaison série intégrale, que $H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

4. Exprimer $\sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+1}$ en fonction de H_{2n} , H_n et n .

5. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Correction

1. Deux méthodes sont possibles :

• **Première méthode :** on admet l'existence de a, b, c

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

On multiplie par n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = a + \frac{bn}{n+1} + \frac{cn}{2n+1}$$

Mais $\mathbb{N}^*$ étant infini, on a une égalité entre fractions rationnelles :

$$\frac{1}{(X+1)(2X+1)} = a + \frac{bX}{X+1} + \frac{cX}{2X+1}$$

qu'on peut évaluer en 0 :

$$1 = a$$

On repart alors de l'égalité de départ, on la multiplie par $n+1$ et on évalue en -1 :

$$b = 1.$$

On repart ensuite de l'égalité de départ, on la multiplie par $2n+1$ et on évalue en

$$-\frac{1}{2} : c = -4.$$

- **Deuxième méthode :** on démontre l'existence de a, b, c :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} &= \frac{a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

On en déduit, toujours car $\mathbb{N}^*$ est infini :

$$\begin{aligned} &\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1} \right) \\ \iff &\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a}{n(n+1)(2n+1)} \right) \\ \iff &\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2a+2b+c)n^2 + (3a+b+c)n + a = 1 \right) \\ \iff &\begin{cases} 2a+2b+c \\ 3a+b+c \\ a=1 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-4 \end{cases} \end{aligned}$$

2. (a) C'est une question classique de Sup.

Vu l'énoncé, un raisonnement par récurrence suffit.

Reportez-vous à votre cours de sup pour d'autres méthodes.

- (b) $u_n \sim \frac{3}{n^3}$, tout est positif et $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc la série de terme général u_n converge.

$$3. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq H_{2n} - H_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$$

puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq H_{2n} - H_n \leq \int_n^{2n} \frac{dt}{t}$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln \left(\frac{2n+1}{n+1} \right) \leq H_{2n} - H_n \leq \ln \left(\frac{2n}{n} \right) = \ln(2)$$

Avec le théorème des gendarmes, on en déduit que $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(2)$.

4.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+1} &= \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \text{ attention } j \text{ démarre à } 1 \\ &= \frac{1}{2n+1} - 1 + H_{2n} - \frac{1}{2}H_n \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{6} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} - 4 \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j+1} \\
&= H_n + H_n + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{4}{2n+1} + 4 - 4H_{2n} + 2H_n \\
&= 3 - \frac{4}{2n+1} - 4(H_{2n} - H_n)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 6(3 - 4 \ln(2))$$

Exercice 15 (*Mines 2017*)

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{t^2}{2\pi} - t \\
g(t) &= \begin{cases} \frac{h(t)}{2 \sin(t/2)} & \text{si } t \in]0; \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.
2. Soit $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$. Domaine de définition de φ .
3. Soit $I_k = \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt$. Calculer I_k .
4. En déduire $\varphi(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction

1. g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \pi]$.
 En 0^+ , $g(t) \sim \frac{-t}{t} = -1$ donc g est continue en 0.
 On a donc facilement la continuité de g sur $[0; \pi]$.
 On calcule ensuite $g'(t)$:

$$\forall t \in]0; \pi] \quad g'(t) = \frac{2 \sin(t/2) h'(t) - \cos(t/2) h(t)}{4 \sin^2(t/2)}$$

Le numérateur est équivalent à t^2 . On fait donc un DL_2 du numérateur :

$$\begin{aligned}
2 \sin(t/2) h'(t) - \cos(t/2) h(t) &= (t + o(t^2)) \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) - (1 + o(t)) \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \\
&= t \left((1 + o(t)) \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) - (1 + o(t)) \left(\frac{t}{2\pi} - 1 \right) \right) \\
&= t \left(-1 + \frac{t}{\pi} + 1 - \frac{t}{2\pi} + o(t) \right) = \frac{t^2}{2\pi} + o(t^2)
\end{aligned}$$

On en déduit $g'(t) \xrightarrow[t>0]{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi}$.

D'après le théorème de la limite de la dérivée, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.

2. $\varphi(x)$ est la somme d'une série de Riemann donc $\mathcal{D}_\varphi =]1; +\infty[$.

3.

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^* \quad I_k &= \int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt = \left[h(t) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi h'(t) \frac{\sin(kt)}{k} dt \\ &= - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\sin(kt)}{k} dt = \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(kt)}{k^2} dt \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(kt)}{k^3} \right]_0^\pi = \frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

$$4. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt$$

$$\begin{aligned}\forall t \in]0; \pi] \quad \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \Re e \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) = \Re e \left(e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} \right) \text{ car } e^{it} \neq 1 \\ &= \Re e \left(e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right) = \frac{\cos((n+1)t/2) \sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t/2) - \sin(t/2)}{2 \sin(t/2)}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall t \in]0; \pi] \quad h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = g(t) \sin((2n+1)t/2) - \frac{1}{2} h(t)$$

puis par continuité :

$$\forall t \in [0; \pi] \quad h(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) = g(t) \sin((2n+1)t/2) - \frac{1}{2} h(t)$$

ce qui entraîne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi g(t) \sin((2n+1)t/2) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt$$

Avec Riemann-Lebesgue :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi g(t) \sin((2n+1)t/2) dt &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et :} \\ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &= -\frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) dt = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Exercice 16 (Mines 2005, 2019)

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

Correction Pour montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge deux méthodes sont possibles.

- **Première méthode :** utilisation d'un développement asymptotique

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

— la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée

$$- \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

— La suite $\left(\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| \right) = \left(\frac{1}{n} \right)$ est décroissante

donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Si $v = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors la série $\sum v_n$ converge absolument donc converge (car $\frac{1}{n^2}$ est le terme général positif d'une série convergente).

• **Deuxième méthode**

— la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est alternée

$$- (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

— La suite $\left(\left| (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| \right) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ est décroissante

donc la série $\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^N (-1)^n (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \sum_{n=1}^N (-1)^n \ln(n+1) - \sum_{n=1}^N (-1)^n \ln(n) = \sum_{n=2}^{N+1} (-1)^{n-1} \ln(n) - \sum_{n=2}^N (-1)^n \ln(n) \\ &= (-1)^N \ln(N+1) - 2 \sum_{n=2}^N (-1)^n \ln(n) \end{aligned}$$

On va ensuite séparer les termes pairs et impairs. Comme on sait déjà que la suite $\left(\sum_{n=1}^N u_n \right)$ converge et qu'on cherche seulement sa limite, on peut se contenter d'étudier le cas N pair :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} u_n &= \ln(2N+1) - 2 \sum_{n=2}^{2N} (-1)^n \ln(n) \\ &= \ln(2N+1) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \ln(2k+1) - 2 \sum_{k=1}^N \ln(2k) \\ &= \ln(2N+1) + 2 \ln \left(\frac{\prod_{k=1}^{N-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^N (2k)} \right) \\ &= \ln(2N+1) + 2 \ln \left(\frac{\prod_{l=2}^{2N} l}{\left(\prod_{k=1}^N (2k) \right)^2} \right) \\ &= 2 \ln \left(\sqrt{2N+1} \frac{(2N)!}{(2^N N!)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{2N+1} \frac{(2N)!}{(2^N N!)^2} \sim \sqrt{2N} \sqrt{4N\pi} \left(\frac{2N}{e}\right)^{2N} \frac{1}{2^{2N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi N^2}} \left(\frac{e}{N}\right)^{2N} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

On en déduit $\sum_{n=1}^{2N} u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$

Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Exercice 17 (X 2005)

Soient α et β appartenant à $]0, 2\pi[$.

$$I_n = \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=1}^n e^{ki\theta} d\theta$$

1. Montrer que I_n admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. La calculer.
2. Que dire des séries de terme général $\frac{e^{ika}}{ik}$ avec $a \in]0, 2\pi[$?
3. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi/2}}{ik}$.

Correction

1. On montre comme d'habitude :

$$\forall \theta \in]0, 2\pi[\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\pi/2}}{ik} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} d\theta$$

La fonction $\theta \mapsto \frac{1}{1 - e^{i\theta}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha; \beta]$ donc classiquement :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} d\theta$$

Cette intégrale se calcule mais il faut proscrire le recours au logarithme complexe.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} d\theta &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\theta/2}}{-2i \sin(\theta/2)} d\theta \\ &= \frac{i}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} d\theta = i \int_{\alpha/2}^{\beta/2} \frac{e^{i\theta}}{\sin(\theta)} d\theta \\ &= i \int_{\alpha/2}^{\beta/2} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + i \right) d\theta = i [\ln(\sin \theta) + i\theta]_{\alpha/2}^{\beta/2} \\ &= \frac{\alpha - \beta}{2} + i \ln\left(\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)}\right) \end{aligned}$$

2. Si on calcule I_n avec la linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = i \left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\alpha}}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\beta}}{k} \right)$$

Comme la suite (I_n) converge, on en déduit que

$$\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\alpha}}{k} \text{ converge} \iff \sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\beta}}{k} \text{ converge}$$

Les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ sont toutes de même nature.

Pour $\alpha = \pi$, on a la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ qui converge donc :

$$\forall \alpha \in]0; 2\pi[\quad \sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\alpha}}{k} \text{ converge}$$

De plus :

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + i \ln \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\sin(\alpha/2)} \right) = i \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\beta}}{k} \right)$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ vaut notoirement $-\ln 2$, on peut obtenir la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$.

Pour obtenir la somme de l'énoncé, on prend $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pi$:

$$\frac{-\pi}{4} - i \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{-\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln(2) = i \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi/2}}{k} + \ln(2) \right)$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi/2}}{k} = -\frac{\ln(2)}{2} + i\frac{\pi}{4}$$

2.1 Séries et intégrales

Exercice 18 (Mines 2019)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. En posant $x = \tan(t)$, montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.
2. Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$.
3. Déterminer, en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série de terme général $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.
4. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$.

Correction

1.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + a \frac{x^2}{1+x^2}} \frac{dx}{1+x^2} \text{ changement de variable } \mathcal{C}^1 \nearrow \nearrow x = \tan t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2(1+a)} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+a}} \arctan(x\sqrt{1+a}) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} + \int_{\pi/2}^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} + \int_{\pi/2}^0 \frac{-dx}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(x)} \\
&\quad \text{changement de variable } x = \pi - t \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \\
&\sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}
\end{aligned}$$

$$\sum \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge } \iff \alpha > 2$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} &= \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^\alpha \sin^2(t)} \\
0 \leq \int_0^\pi \frac{dt}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} &\leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}
\end{aligned}$$

On en déduit par double implication :

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge } \iff \sum \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge.}$$

Donc :

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge } \iff \alpha > 2$$

4. On en déduit classiquement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \text{ converge } \iff \alpha > 2$$

$$\alpha > 0 \text{ donc la fonction } f \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \end{cases} \text{ est continue.}$$

C'est une fonction positive donc $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est croissante.On en déduit que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$$\text{Si } \alpha > 2, F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \in \mathbb{R}$$

Mais $F(n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ donc par unicité de la limite $l \in \mathbb{R}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$ converge.Si $\alpha \leq 2$, la série de terme général $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt$ diverge et c'est une série à termes positifs donc :

$$F(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Cette fois $l = +\infty$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$ diverge.**Exercice 19** (Centrale 2005)

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

1. Montrer que F est une fonction définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que :

$$F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$
3. Montrer que $F(x) \sim -\ln x$ au voisinage de 0.
4. Montrer qu'il existe un unique $r \in]0, \pi]$ tel que $F(r) = 0$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Soit } f \begin{cases} [x; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\sin t}{t^2} \end{cases}.$$

f est continue sur $[x; +\infty[$ et $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[x; +\infty[$.

Donc $F(x)$ est bien défini.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\cos x}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^3} dt \text{ IPP à justifier} \\ &= \frac{\cos x}{x^2} + 2 \frac{\sin x}{x^3} + 6 \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4} dt \text{ IPP à justifier} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^4} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{3x^3}$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{\cos x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) - (-\ln x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \int_x^1 \frac{\sin t - t}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$
 $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $F(x) - (-\ln x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} l \in \mathbb{R}$.
 $F(x) = -\ln x + l + o(1)$ donc $F(x) \sim_0 -\ln x$

4. $\forall x \in]0; \pi[\quad F'(x) = -\frac{\sin x}{x^2} < 0$

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

Il nous faut donc le signe de $F(\pi)$.

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(x + n\pi)}{(x + n\pi)^2} dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin x}{(x + n\pi)^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{On note } u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{(x + n\pi)^2} dx.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq 0$
- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: on sait déjà que la série converge.

•

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; \pi] & \quad 0 \leq x + n\pi \leq x + (n+1)\pi \\
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; \pi] & \quad 0 < (x + n\pi)^2 \leq (x + (n+1)\pi)^2 \\
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; \pi] & \quad \frac{1}{(x + (n+1)\pi)^2} \leq \frac{1}{(x + n\pi)^2} \\
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0; \pi] & \quad \frac{\sin x}{(x + (n+1)\pi)^2} \leq \frac{\sin x}{(x + n\pi)^2} \\
\forall n \in \mathbb{N}^* & \quad u_{n+1} \leq u_n
\end{aligned}$$

Donc $F(\pi)$ est du signe de $-u_1 : F(\pi) \leq 0$.

En affinant ce qui précède, $F(\pi) < 0$.

Exercice 20 (Mines 2016)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

Etudier la série de terme général a_n pour montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

2. (a) On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt$.
Etablir une relation entre I_n et I_{n+1} .
(b) Donner un équivalent de I_n .

Correction

1.

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général a_n converge absolument donc converge.

Donc $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$.

Donc $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^l \in \mathbb{R}_+^*$.

2. (a)

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} dt = \left[\frac{t^3}{3(1+t^4)^n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{3} \times \frac{-4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\
&= \frac{4n}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^{n+1}} dt = \frac{4n}{3} \int_0^{+\infty} \frac{t^6 + t^2 - t^2}{(1+t^4)^{n+1}} dt \\
&= \frac{4n}{3} (I_n - I_{n+1})
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = \frac{4n-3}{4n} I_n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \frac{3}{4n}.$$

D'après le début de l'exercice, $I_n \sim \frac{K}{n^{3/4}}$ avec $K > 0$.