

ANALYSE 2

Chapitre 2

941

Exercice 1 (Ens 2026)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $\phi \begin{cases} E \rightarrow E \\ f \mapsto f^2 \end{cases}$

1. Soient N et N' deux normes sur E telles que

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad N(uv) \leq N'(u)N'(v)$$

Montrer que ϕ est continue de (E, N') dans (E, N) .

2. On pose pour $p > 1$:

$$\forall f \in E \quad \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

et on admet que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

On pose également pour α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_{\alpha, \beta, n} : t \mapsto n^{-\beta} \min(n^\alpha, t^{-\alpha})$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, p pour que la suite $(\|h_{\alpha, \beta, n}\|_p)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

3. Soient p et $q > 1$. Montrer que :

- soit ϕ est continue de $(E, \|\cdot\|_p)$ dans $(E, \|\cdot\|_q)$
- soit ϕ est discontinue de $(E, \|\cdot\|_p)$ dans $(E, \|\cdot\|_q)$

Cette question, ne peut évidemment pas être la bonne donc je propose la restitution suivante :

- Au moyen de la question 2 donner une condition nécessaire (portant sur p et $q > 1$) pour que ϕ soit continue de $(E, \|\cdot\|_p)$ dans $(E, \|\cdot\|_q)$.
- Montrer que cette condition est suffisante.

Correction

1. Soit $f_0 \in E$.

Soit $f \in \mathcal{B}(f_0, 1, N')$.

$$\begin{aligned} N(f^2 - f_0^2) &= N((f - f_0)(f + f_0)) \leq N'(f - f_0)N'(f + f_0) \\ &\leq (2N'(f_0) + 1)N'(f - f_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(E, N')} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(E, N)} f_0^2$$

2.

$$\begin{aligned}
\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p^p &= n^{-p\beta} \left(\int_0^{1/n} n^{p\alpha} dt + \int_{1/n}^1 t^{-p\alpha} dt \right) \\
&= n^{-p\beta} \left(n^{p\alpha-1} + \frac{1}{1-\alpha p} - \frac{n^{p\alpha-1}}{1-\alpha p} \right) \text{ si on suppose } p\alpha \neq 1 \\
&= \frac{-\alpha p}{1-\alpha p} n^{p(\alpha-\beta)-1} + \frac{n^{-\beta p}}{1-\alpha p}
\end{aligned}$$

Si $\alpha p - 1 > 0$ alors $\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p^p \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\alpha p}{1-\alpha p} n^{p(\alpha-\beta)-1}$ et on peut élever l'équivalent à la puissance $\frac{1}{p}$ car p est fixe.

Donc $\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\alpha p}{1-\alpha p} \right)^{1/p} n^{\alpha - \frac{1}{p} - \beta}$

et il y a convergence si, et seulement si $\beta \geq \alpha - \frac{1}{p}$

Si $\alpha p - 1 < 0$ alors $\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p^p \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{-\beta p}}{1-\alpha p}$ et on peut élever l'équivalent à la puissance $\frac{1}{p}$ car p est fixe.

Donc $\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha p} \right)^{1/p} n^{-\beta}$

et il y a convergence vers 0

Si $\alpha p = 1$ alors :

$$\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p^p = n^{-p\beta} (1 + \ln(n)) \sim n^{-p\beta} \ln(n)$$

$$\|h_{\alpha,\beta,n}\|_p \sim n^{-\beta} (\ln(n))^{1/p}$$

et il y a convergence vers 0

La CNS cherchée est $\alpha \leq \frac{1}{p}$ ou $(\alpha > \frac{1}{p} \text{ et } \beta \geq \alpha - \frac{1}{p})$

On a également montré :

$$h_{\alpha,\beta,n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(E, \|\cdot\|_p)} 0 \iff \alpha \leq \frac{1}{p} \text{ ou } (\alpha > \frac{1}{p} \text{ et } \beta > \alpha - \frac{1}{p})$$

3. $\|\phi(h_{\alpha,\beta,n})\|_q = \|h_{2\alpha,2\beta,n}\|_q$

Si on peut trouver α et $\beta > 0$ tels que $h_{\alpha,\beta,n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(E, \|\cdot\|_p)} 0$ et $(h_{2\alpha,2\beta,n})$ diverge dans $(E, \|\cdot\|_q)$ alors ϕ n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_p)$ dans $(E, \|\cdot\|_q)$

$$(h_{2\alpha,2\beta,n}) \text{ diverge dans } (E, \|\cdot\|_q) \iff 0 < 2\beta < 2\alpha - \frac{1}{q} \iff 0 < \beta < \alpha - \frac{1}{2q}$$

Si $p < 2q$ alors $\alpha - \frac{1}{p} < \alpha - \frac{1}{2q}$ et il existe β tel que $\alpha - \frac{1}{p} < \beta < \alpha - \frac{1}{2q}$

On en déduit que ϕ n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_p)$ dans $(E, \|\cdot\|_q)$

Donc :

$$\phi \text{ continue de } (E, \|\cdot\|_p) \text{ dans } (E, \|\cdot\|_q) \implies p \geq 2q$$

On suppose désormais : $2q \leq p$ (toujours avec $p, q > 1$).

Les suites de la question 2 ne peuvent pas servir à prouver la continuité de ϕ .

On cherche à utiliser la question 1 :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 \quad \|uv\|_q &= \left(\int_0^1 |u(t)|^q |v(t)|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\left(\int_0^1 u(t)^{2q} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 v(t)^{2q} dt \right)^{1/2} \right)^{1/q} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|u\|_{2q} \|v\|_{2q} \end{aligned}$$

La question qui se pose alors est :

Si $2q \leq p$ a-t-on :

$$\forall u \in E \quad \|u\|_{2q} \leq \|u\|_p ?$$

$$\forall u \in E \quad \|u\|_{2q}^{2q} = \int_0^1 (|u(t)|^p)^{\frac{2q}{p}} dt$$

$$\text{Soit } \psi \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{\frac{2q}{p}} \end{cases}$$

ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0 \quad \psi''(t) = \frac{2q}{p} \left(\frac{2q}{p} - 1 \right) t^{\frac{2q}{p}-2} \leq 0$$

Donc la fonction ψ est concave et l'inégalité de Jensen permet d'écrire :

$$\forall u \in E \quad \|u\|_{2q}^{2q} \leq \left(\int_0^1 |u(t)|^p dt \right)^{\frac{2q}{p}} = \|u\|_p^{2q}$$

et on conclut facilement.