

PC*1
DS N°2
samedi 17 octobre 2026

Les deux exercices sont indépendants.

1 Exercice 1

Dans tout l'exercice l'espace E est l'espace des fonctions continues sur le segment $[0; 1]$:
 $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$.

A toute fonction f de E , on associe la fonction $u(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0; 1] \quad u(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) \, dt$$

ainsi que la fonction $v(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0; 1] \quad v(f)(x) = \int_0^1 \max(x, t) f(t) \, dt$$

1.1 Noyau et image de u

1. Montrer que pour tout $f \in E$, on a :

$$\forall x \in [0; 1] \quad u(f)(x) = \int_0^x t f(t) \, dt - x \int_1^x f(t) \, dt$$

En déduire que u est un endomorphisme de E .

2. Soit $f \in E$.
Montrer que $u(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner la dérivée seconde de $u(f)$.
3. Déterminer le noyau de u .
4. Calculer $u(f)(0)$ ainsi que $[u(f)]'(1)$.
En déduire l'image de u .
5. E est-il de dimension finie ?

1.2 Quelques exemples

Déterminer $u(f)$ dans les cas suivants :

1. $f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases}$
2. $f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$
3. $f \begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{cases}$
Que remarque-t-on ?

1.3 Eléments propres de u

1. 0 est-il valeur propre de u ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$.
Montrer que λ n'est pas valeur propre de u .
On pourra poser $\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que λ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est de la forme λ_n où $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de réels strictement positifs.
Quels sont les sous-espaces propres de u ?
4. Quelle est la nature de la série de terme général λ_n ?

1.4 Eléments propres de v

v est un endomorphisme de E . On ne demande pas la démonstration.

1. 0 est-il valeur propre de v ?
2. Soit $\lambda > 0$.
On pose $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer :
 λ valeur propre de $v \iff \omega$ solution de $(E_1) : (x+1)e^{-x} = (x-1)e^x$
Quel est alors le sous-espace propre associé ?
3. Montrer que (E_1) possède une et une seule solution strictement positive.
4. v possède donc une seule valeur propre positive. On la note μ .
Montrer que μ est compris entre 0 et 1.
5. Soit $\lambda < 0$.
On pose $\lambda = \frac{-1}{\omega^2}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer :
 λ valeur propre de $v \iff \omega$ solution de $(E_2) : \omega \sin \omega + \cos \omega = 0$
Quel est alors le sous-espace propre associé ?
6. On s'intéresse dans cette question aux solutions de l'équation (E_2) .
 - (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
Montrer que sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, (E_2) a exactement une solution. On la note ω_k .
Montrer que $\omega_k \in \left] \frac{\pi}{2} + k\pi; (k+1)\pi \right[$.
On note $\lambda_k = \frac{-1}{\omega_k^2}$ la valeur propre correspondante de v .
 - (b) Que peut-on dire de la monotonie de la suite $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$? de sa convergence ?
 - (c) Donner un équivalent simple de ω_k .
 - (d) Quelle est la nature de la série de terme général λ_k ?
 - (e) Donner un développement asymptotique de ω_k de la forme :
 $\omega_k = k\pi + a + \frac{b}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$ où a et b sont des constantes à déterminer.
En déduire un développement asymptotique de λ_k .

2 Exercice 2

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels **non nuls**.

On dit que le **produit infini** $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \prod_{k=0}^n a_k$$

admet une **limite finie non nulle**.

Dans tous les autres cas, on dit que le produit infini $\prod_{n \geq 0} a_n$ diverge.

En cas de convergence, le réel $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k$ est appelé le produit de $\prod_{n \geq 0} a_n$ et se note $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Etudier le produit infini $\prod_{n \geq 0} a_n$ consiste à déterminer si le produit est convergent ou divergent.

2.1 Premiers exemples et condition nécessaire

1. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ converge et calculer $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.
3. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge et calculer $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$.
4. On se propose de montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

- (a) Montrer :
 $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{2n} = 1$
 - (b) Conclure.
5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.
 On suppose que le produit infini $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge.
 Montrer que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
 En considérant le produit infini $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, montrer que la réciproque est fausse.

2.2 Utilisation de la positivité

6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels **strictement positifs**.
 Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} a_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} \ln(a_n)$ converge.
 Montrer en cas de convergence :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \exp \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n) \right)$$

7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs**.

Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

8. Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature du produit infini $\prod_{n \geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$.

2.3 Quelques résultats dans le cas général

9. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

- (b) Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

La convergence de la série $\sum u_n$ n'entraîne donc pas celle du produit $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$.

10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et } u_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

- (b) Calculer $(1 + u_{2n-1})(1 + u_{2n})$.

- (c) $1 + u_1 = 0$ mais :

$\forall n \geq 2 \quad 1 + u_n \neq 0$ (on ne demande pas de justifier ce point)

Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} (1 + u_n)$ converge et donner la valeur de $\prod_{n=2}^{+\infty} (1 + u_n)$.

La convergence du produit $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ n'entraîne donc pas celle de la série $\sum u_n$.

11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > -1$
- La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.

Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$ converge.