

PC\*1  
DS N°2  
Corrigé

## 1 Exercice 1

### 1.1 Noyau et image de $u$

1. La relation de Chasles donne :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; 1] \quad u(f)(x) &= \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt \\ &= \int_0^x \min(x, t) f(t) dt + \int_x^1 \min(x, t) f(t) dt \\ &= \int_0^x t f(t) dt + \int_x^1 x f(t) dt \\ &= \int_0^x t f(t) dt - x \int_1^x f(t) dt\end{aligned}$$

Sous cette forme,  $u(f)$  est clairement continue et même de classe  $\mathcal{C}^1$ .

La linéarité de  $u$  découle directement de la linéarité de l'intégrale.

$u$  est bien un endomorphisme de  $E$ .

2. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel-intégral,  $u(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; 1] \quad [u(f)]'(x) &= x f(x) - \int_1^x f(t) dt - x f(x) \\ &= - \int_1^x f(t) dt\end{aligned}$$

Sous cette forme, la dérivée de  $u(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ie  $u(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et :

$$[u(f)]'' = -f$$

3. Si  $f$  est dans le noyau de  $u$  alors :  $f = -[u(f)]'' = -(0)'' = 0$ .

$\ker(u) = \{0\}$  et  $u$  est injective.

4. On déduit des expressions précédentes :

$$u(f)(0) = [u(f)]'(1) = 0.$$

$$\text{Donc } \text{Im}(u) \subset G = \{g \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \text{ tq } g(0) = g'(1) = 0\}.$$

Réciproquement soit  $g \in G$ .

$$-g'' \in E$$

$$\begin{aligned}\forall x \in [0; 1] \quad u(-g'')(x) &= - \int_0^x t g''(t) dt + x \int_1^x g''(t) dt \\ &= -[t g'(t)]_0^x + \int_0^x g'(t) dt + x(g'(x) - g'(1)) \\ &= -x g'(x) + g(x) - g(0) + x g'(x) \\ &= g(x)\end{aligned}$$

$$g = u(-g'') \in \text{Im}(u)$$

Finalement :

$$\text{Im}(u) = \{g \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R}) \text{ tq } g(0) = g'(1) = 0\}$$

5.  $u$  est injective mais n'est pas surjective donc  $E$  n'est pas de dimension finie.

## 1.2 Quelques exemples

1.  $\forall x \in [0; 1] \quad u(f)(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$
2.  $\forall x \in [0; 1] \quad u(f)(x) = -1/6x^3 + 1/2x$
3. On trouve  $u(f) = \frac{4}{\pi^2}f$ .

$f$  est un vecteur propre de  $u$ , associé à la valeur propre  $\frac{4}{\pi^2}$ .

## 1.3 Eléments propres de $u$

1.  $\ker(u - 0Id_E) = \ker(u) = \{0\}$  donc 0 n'est pas valeur propre de  $u$ .
2. Soit  $f \in E$  tq  $u(f) = \lambda f$ .

$\lambda \neq 0$  donc  $f = \frac{1}{\lambda}u(f) = u\left(\frac{1}{\lambda}f\right) \in \text{Im}(u)$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

De plus  $f(0) = f'(1) = 0$ .

On peut dériver  $u(f) = \lambda f$  et obtenir  $-f = -\frac{1}{\omega^2}f''$ .

$f$  est donc solution de l'équation différentielle :  $y'' - \omega^2 y = 0$ .

On en déduit qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = A e^{\omega x} + B e^{-\omega x}$$

Les conditions  $f(0) = 0$  et  $f'(1) = 0$  conduisent au système : 
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ \omega(A e^{\omega} - B e^{-\omega}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} B = -A \\ A(e^{\omega} + e^{-\omega}) = 0 \end{cases}$$

On en déduit  $A = B = 0$ , puis  $f = 0$

$\ker(u - \lambda Id_E) \subset \{0\}$  mais l'autre inclusion est triviale donc :

$\ker(u - \lambda Id_E) = \{0\}$  donc  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $u$ .

3. On pose cette fois  $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$  avec  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $f \in E$  tq  $u(f) = \lambda f$ .

$\lambda \neq 0$  donc  $f = \frac{1}{\lambda}u(f) = u\left(\frac{1}{\lambda}f\right) \in \text{Im}(u)$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

De plus  $f(0) = f'(1) = 0$ .

On peut dériver  $u(f) = \lambda f$  et obtenir  $-f = \frac{1}{\omega^2}f''$ .

$f$  est donc solution de l'équation différentielle :  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

On en déduit qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

Les conditions  $f(0) = 0$  et  $f'(1) = 0$  conduisent au système : 
$$\begin{cases} A = 0 \\ \omega(-A \sin \omega + B \cos \omega) = 0 \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B \cos \omega = 0 \end{cases}$$

$$\cos \omega = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \omega = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$$

On est donc amené à poser pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}$ .

Si  $\lambda$  n'est pas de la forme  $\lambda_n$  alors  $\cos \omega \neq 0$  et on montre comme dans la question précédente que  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $u$ .

Reste à montrer que  $\lambda_n$  est bien valeur propre de  $u$ .

On a déjà établi  $\ker(u - \lambda_n Id_E) \subset \mathbb{R}f_n$  où  $f_n$  est la fonction  $\begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \end{cases}$

Réciproquement on détermine l'image de  $f_n$  par  $u$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1] \quad u(f_n)(x) &= \int_0^x t f_n(t) dt + x \int_x^1 f_n(t) dt \\ &= \left[ \frac{-2t}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right) \right]_0^x + \int_0^x \frac{2}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right) dt \\ &\quad + x \left[ \frac{-2}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right) \right]_x^1 \\ &= \frac{-2x}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) + \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} f_n(x) \\ &\quad + \frac{2x}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) \\ &= \lambda_n f_n(x) \end{aligned}$$

Donc  $\lambda_n$  est bien valeur propre de  $u$ .

En conclusion :

- les valeurs propres de  $u$  sont les nombres  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad E_{\lambda_n}(u) = \mathbb{R}f_n$

4.  $\lambda_n \sim \frac{1}{n^2\pi^2}$  et tout est positif donc la série de terme général  $\lambda_n$  converge.

## 1.4 Eléments propres de $v$

Soit  $f \in E$ . On a cette fois :

$$\forall x \in [0; 1] \quad v(f)(x) = x \int_0^x f(t) dt + \int_x^1 t f(t) dt$$

On en déduit que  $v(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  avec :

$$\forall x \in [0; 1] \quad [v(f)]'(x) = x f(x) + \int_0^x f(t) dt - x f(x) = \int_0^x f(t) dt$$

On en déduit que  $v(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  avec :  $[v(f)]'' = f$ .

On peut aussi utiliser :

$$\forall x \in [0; 1] \quad u(f)(x) + v(f)(x) = \int_0^1 (x+t) f(t) dt = x \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 t f(t) dt$$

De plus, on a  $[v(f)]'(0) = 0$ .

Par contre, contrairement à  $u$ , il n'y a pas de valeur simple de  $v(f)$ .

On a tout de même,  $v(f)(1) = [v(f)]'(1)$ , ce qui peut rendre des services dans la suite.

1. Soit  $f \in \ker(v)$ .  
 $v(f) = 0$  donc, en dérivant deux fois :  $f = 0$ .  
 $0$  n'est pas valeur propre de  $v$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $f \in E$  telle que  $v(f) = \lambda f$ .

$\lambda \neq 0$  donc  $f = \frac{1}{\lambda} v(f)$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

De plus  $f'(0) = 0$ .

En dérivant deux fois  $f = \frac{1}{\lambda} v(f)$ , on obtient  $f'' = \omega^2 f$ .

Donc :

$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$  tq  $\forall x \in [0; 1] f(x) = A e^{\omega x} + B e^{-\omega x}$ .

La condition  $f'(0) = 0$  donne  $A = B$ .

Notons  $f_\omega$  la fonction  $\begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\omega x} + e^{-\omega x} \end{cases}$ .

On a :  $\ker(v - \lambda Id_E) \subset \mathbb{R} f_\omega$

Réciproquement, il s'agit de déterminer si  $f_\omega$  est vecteur propre de  $v$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1] \quad v(f_\omega)(x) &= x \int_0^x (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) dt + \int_x^1 t (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) dt \\ &= \frac{x}{\omega} (e^{\omega x} - e^{-\omega x}) + \left[ \frac{t}{\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \right]_x^1 - \frac{1}{\omega} \int_x^1 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) dt \\ &= \frac{e^\omega - e^{-\omega}}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}]_x^1 \\ &= \frac{(\omega - 1)e^\omega - (\omega + 1)e^{-\omega}}{\omega^2} + \lambda f_\omega(x) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$\lambda$  valeur propre de  $v \iff \omega$  solution de  $(E) : (x + 1)e^{-x} = (x - 1)e^x$  et dans ce cas le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la fonction  $f_\omega$ .

3. Soit  $\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x + 1)e^{-x} - (x - 1)e^x \end{cases}$

$\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$  et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'(x) = -x(e^{-x} + e^x) < 0$

De plus  $\varphi(0) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$ .

D'après le théorème de la bijection,  $\varphi$  s'annule une fois et une seule sur  $\mathbb{R}_+$ .

4. Notons  $\omega_0$  la seule solution positive de  $(E)$ .

$\varphi(1) = 2e^{-1} > 0$  donc  $\omega_0 > 1$  (regarder le tableau de variations).

Donc  $\lambda = \frac{1}{\omega_0^2} < 1$ .

5. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ .

Soit  $f \in E$  telle que  $v(f) = \lambda f$ .

$\lambda \neq 0$  donc  $f = \frac{1}{\lambda} v(f)$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

De plus  $f'(0) = 0$ .

En dérivant deux fois  $f = \frac{1}{\lambda} v(f)$ , on obtient  $f'' = -\omega^2 f$ .

Donc :

$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$  tq  $\forall x \in [0; 1] f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ .

La condition  $f'(0) = 0$  donne  $B = 0$ .

Notons  $g_\omega$  la fonction  $\begin{cases} [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(\omega x) \end{cases}$ .

On a :  $\ker(v - \lambda Id_E) \subset \mathbb{R} g_\omega$

Réciproquement, il s'agit de déterminer si  $g_\omega$  est vecteur propre de  $v$ .

$$\begin{aligned}
 \forall x \in [0; 1] \quad v(g_\omega)(x) &= x \int_0^x \cos(\omega t) dt + \int_x^1 t \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{x}{\omega} \sin(\omega x) + \left[ \frac{t}{\omega} \sin(\omega t) \right]_x^1 - \frac{1}{\omega} \int_x^1 \sin(\omega t) dt \\
 &= \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} [\cos(\omega t)]_x^1 \\
 &= \frac{\omega \sin \omega + \cos \omega}{\omega^2} + \lambda g_\omega(x)
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$\lambda$  valeur propre de  $v \iff \omega$  solution de  $(E_2) : \omega \sin \omega + \cos \omega = 0$

et dans ce cas le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la fonction  $g_\omega$ .

6. (a) Soit  $\psi : \omega \mapsto \omega \sin \omega + \cos \omega$ .

$\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  avec :

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \psi'(\omega) = \omega \cos(\omega).$$

$\psi$  est donc strictement monotone sur les deux intervalles :  $\left[ k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$  et  $\left[ k\pi + \frac{\pi}{2}; (k+1)\pi \right]$ .

$\psi(k\pi) = (-1)^k$  et  $\psi\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  sont de même signe.

$\psi\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$  et  $\psi((k+1)\pi) = (-1)^{k+1}$  sont de signes opposés.

Le théorème de la bijection permet de conclure.

(b)  $\omega_k < (k+1)\pi < (k+1)\pi + \frac{\pi}{2} < \omega_{k+1}$  : la suite  $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

$$\omega_k > k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ donc } \omega_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

(c)  $k\pi + \frac{\pi}{2} < \omega_k < (k+1)\pi$  donc  $\omega_k \sim k\pi$ .

(d)  $\lambda_k \sim \frac{-1}{k^2 \pi^2}$  et tout est de signe constant donc la série de terme général  $\lambda_k$  converge.

(e) On commence par écrire  $\omega_k = k\pi + \theta_k$  avec  $\theta_k \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ .

$\psi(\omega_k) = 0$  donne :

$$\omega_k \sin \theta_k + \cos \theta_k = 0.$$

On en déduit  $\sin \theta_k = -\frac{\cos \theta_k}{\omega_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ , ce qui conduit compte tenu des intervalles envisagés à :

$$\theta_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \pi.$$

On a donc  $a = \pi$ .

On écrit ensuite :  $\omega_k = k\pi + \pi + \epsilon_k$  avec  $\epsilon_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

$\omega_k \sin \theta_k + \cos \theta_k = 0$  donne :

$\omega_k \sin \epsilon_k + \cos \epsilon_k = 0$  d'où on tire :

$$\epsilon_k \sim \sin \epsilon_k = -\frac{\cos \epsilon_k}{\omega_k} \sim \frac{-1}{\omega_k} \sim \frac{-1}{k\pi}$$

et finalement :

$$\omega_k = k\pi + \pi - \frac{1}{k\pi} + o\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= -\frac{1}{\omega_k^2} = -\omega_k^{-2} \\
&= -\left(k\pi\left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)^{-2} \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2} \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)^{-2} \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2} \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{2}{k^2\pi^2} + \frac{(-2)(-2-1)}{2} \left(\frac{1}{k}\right)^2 + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2} \left(1 - \frac{2}{k} + \frac{2}{k^2\pi^2} + \frac{3}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{k^2\pi^2} + \frac{2}{k^3\pi^2} - \frac{2+3\pi^2}{k^4\pi^4} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)
\end{aligned}$$

## 2 Exercice 2

### 2.1 Premiers exemples et condition nécessaire

1.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2 \quad P_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} \\
&= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} \\
&= \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc le produit infini  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  converge et  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ .

2.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1 \quad P_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2 - 1}{4k^2} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k+1)}{4k^2} \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \prod_{k=1}^n (2k-1) \prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \\
&= (2n+1) \frac{((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}
\end{aligned}$$

Avec la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
P_n &\sim 2n(4\pi n) \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \frac{1}{2^{4n}} \frac{1}{(2\pi n)^2} \left(\frac{e}{n}\right)^{4n} \\
&\sim \frac{8\pi n^2}{4\pi^2 n^2} = \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Donc le produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$  converge et  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$ .

3.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2 \quad P_n &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k - 2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\
&= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k+1} \\
&= \frac{1}{n} \frac{n+2}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Donc le produit infini  $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$  converge et  $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$ .

4. (a) On procède par récurrence sur  $n$ .

$$P_2 = \left(1 - \frac{(-1)^1}{1}\right) \left(1 - \frac{(-1)^2}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

On suppose  $P_{2n} = 1$ .

$$\begin{aligned}
P_{2n+2} &= \left(1 - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}\right) P_{2n} \\
&= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) \\
&= \frac{2n+2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède,  $P_{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

$$\text{On en déduit } P_{2n+1} = \left(1 - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right) P_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\text{Donc } P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc le produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$  converge et  $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$ .

5. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels non nuls.

On suppose que le produit infini  $\prod_{n \geq 0} a_n$  converge ie  $P_n = \prod_{k=0}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \neq 0$ .

Comme les  $a_n$  sont tous non nuls, les  $P_n$  aussi et :

$$\forall n \geq 1 \quad a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{l} = 1.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $a_n = 1 + \frac{1}{n} > 0$ .

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1 \quad P_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \\
&= \frac{n+1}{1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty
\end{aligned}$$

$a_n = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  mais le produit infini  $\prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  diverge.

## 2.2 Utilisation de la positivité

6. • On suppose que le produit infini  $\prod_{n \geq 0} a_n$  converge.

Les  $a_n$  étant strictement positifs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \prod_{k=0}^n a_k > 0$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient :

$$\prod_{k=0}^{+\infty} a_k \geq 0$$

Mais par définition,  $\prod_{k=0}^{+\infty} a_k \neq 0$  donc  $\Pi = \prod_{k=0}^{+\infty} a_k > 0$ .

Revenant à  $P_n = \prod_{k=0}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Pi > 0$  et prenant le logarithme, on a :

$$\sum_{k=0}^n \ln(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\Pi) \in \mathbb{R}$$

Donc la série  $\sum_{n \geq 0} \ln(a_n)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n) = \ln(\Pi)$ .

Prenant l'exponentielle, on a :

$$\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(a_n)\right)$$

- On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} \ln(a_n)$  converge.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad P_n &= \prod_{k=0}^n a_k = \exp\left(\sum_{k=0}^n \ln(a_k)\right) \quad (a_k > 0) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(a_k)\right) \in \mathbb{R}_+^* \text{ continuité de l'exponentielle} \end{aligned}$$

Donc le produit infini  $\prod_{n \geq 0} a_n$  converge.

7. • On suppose que le produit infini  $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$  converge.

D'après la question 4),  $1 + u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + u_n > 0$$

Donc, d'après ce qui précède, la série  $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$  converge.

Mais  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  donc  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$  et tout est positif donc la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

- On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

En particulier,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  donc  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ .

Tout est positif donc la série  $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$  converge.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + u_n > 0$$

Donc, d'après ce qui précède, le produit infini  $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$  converge.

8.  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = n^{(n^{-\alpha})} > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(a_n) = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

- **Premier cas :**  $\alpha < 0$

$n^{-\alpha} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  donc  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  et le produit infini  $\prod_{n \geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$  diverge (cf

3)).

• **Deuxième cas :  $\alpha = 0$**

$a_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  et le produit infini  $\prod_{n \geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$  diverge.

• **Troisième cas :  $\alpha > 0$**

Si  $\alpha \leq 1$ ,  $n \ln(a_n) \sim n^{1-\alpha} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$  donc  $\ln(a_n) \geq \frac{1}{n} \geq 0$  à partir d'un certain rang et la série de terme général  $\ln(a_n)$  diverge. D'après la question 6), le produit infini  $\prod_{n \geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$  diverge.

Si  $\alpha > 1$ ,  $n^{(1+\alpha)/2} \ln(a_n) \sim n^{(1-\alpha)/2} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Donc  $\ln(a_n) = o\left(\frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}}\right)$  avec  $\frac{1+\alpha}{2} > 1$  et la série de terme général  $\ln(a_n)$  converge. D'après la question 6), le produit infini  $\prod_{n \geq 1} n^{(n^{-\alpha})}$  converge.

Finalement :

$$\prod_{n \geq 1} n^{(n^{-\alpha})} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

### 2.3 Quelques résultats dans le cas général

9. (a) • La série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  est alternée.

•  $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

•  $\left(\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  est décroissante.

Donc d'après le théorème spécial sur la convergence des séries alternées, la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge.}$$

(b)  $\forall n \geq 2 \quad 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} > 0$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + v_n \text{ avec } v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

La série  $\sum_{n \geq 2} v_n$  converge absolument donc converge.

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

$$\text{Donc } P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \exp\left(\sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

10. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^n (u_{2k-1} + u_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Or la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/2}}$  converge donc  $S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

La suite  $(S_n)$  diverge donc la série  $\sum_{n \geq 1} u_n$  diverge.

(b)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* (1 + u_{2n-1})(1 + u_{2n}) &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

(c) Pour tout  $n \geq 2$ , soit  $P_n = \prod_{k=2}^n (1 + u_k)$ .

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad P_{2n} &= (1 + u_2) \prod_{k=3}^{2n} (1 + u_k) = 4 \prod_{k=2}^n ((1 + u_{2k-1})(1 + u_{2k})) \\ &= 4 \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= 4 \times \frac{n+1}{2n} \text{ d'après la première question} \\ &= \frac{2(n+1)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \end{aligned}$$

De plus  $P_{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) P_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$  donc  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ .

On en déduit que le produit infini  $\prod_{n \geq 2} (1 + u_n)$  converge et que  $\prod_{n=2}^{+\infty} (1 + u_n) = 2$ .

11.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + u_n > 0$

La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument donc converge et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On en déduit  $|\ln(1 + u_n)| \sim |u_n|$  et tout est positif.

La série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument donc la série  $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + u_n)$  converge absolument donc converge.

D'où  $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(1 + u_k)\right) \in \mathbb{R}_+^*$ .

Donc le produit infini  $\prod_{n \geq 0} (1 + u_n)$  converge.