ALGEBRE LINEAIRE
TD
2026-2027
Chapitre 3

941

1 Matrices : révisions de première année

Exercice 1 *(Ens 2025)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $E_A = \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$.
Que vaut $\dim(E_A)$?

Exercice 2 *(X 99)*

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale.
On suppose ses coefficients diagonaux tous distincts.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $AD^2 - 2DAD + D^2A = 0$.
Que dire de A ?

Exercice 3 *(X 2013)*

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pour qu'elle puisse être factorisée sous le forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a, c \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$?
Quand cette décomposition est possible, est-elle unique ?

Exercice 4 *(Mines 2019)*

Pour $j \in [\![0; n]\!]$, on pose $S_j = X^j(1-X)^{n-j}$.
Soit $\mathcal{B}$ la famille $(S_j)_{0 \leq j \leq n}$.

1. Déterminer P, la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer P^{-1}.

Exercice 5 *(CCP 2017)*

Calculer selon les valeurs de a et b le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 6 *(X 2014)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = j + n(i-1)$.
Quel est le rang de A ?

Exercice 7 *(Centrale 2004)*

Soit B une matrice réelle de taille $(2,3)$ et A une matrice réelle de taille $(3,2)$. On donne :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on obtenir la valeur de x ?
2. Quelles informations peut-on en déduire sur A et B ?

Exercice 8 *(Ens 2025)*

Soient N et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(M) = k$ et $\text{rg}(N) = l$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\text{rg}(NM)$?

Exercice 9 *(Mines 2016)*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
On suppose que $I_n - AB \in GL_n(\mathbb{K})$.
A-t-on $I_n - BA \in GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 10 *(X 2007)*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB + A + B = 0$.
Montrer que A et B commutent.

Exercice 11 *(Mines 2016)*

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$.
Montrer que $A(\text{Im}\, B) \subset \text{Im}\, B$ ou $A(\text{Ker}\, B) \subset \text{Ker}\, B$.

2 Déterminants

Exercice 12

Calculez les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}$

Exercice 13

Calculer $\left|a^{|i-j|}\right|_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 14 *(CCP)*

Calculer $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 15 *(X 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$.
Montrer :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \det(xA+B) = 0$
Variante 2024 aux Mines
Montrer :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \det(xA+yB) = 0$

Exercice 16 *(X, Mines 2007)*

Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$

Exercice 17 *(Mines 2017)*

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ \det(A+M) = \det(A) + \det(M)$
Montrer que $M = 0$.

3 Matrices semblables

Exercice 18 *(Centrale 2009)*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donner les matrices de passage pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

4 Trace

Exercice 19 *(Mines 2017)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(AB-BA) = 1$.
Calculer $(AB-BA)^2$.

Exercice 20 *(X 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
Montrer :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$ tr $\left((A+B)^k\right) =$ tr $\left(A^k\right) +$ tr $\left(B^k\right)$

Exercice 21 *(Mines 2014, 2017, 2022)*

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $X + X^T = \mathrm{Tr}\,(X)A$.

Exercice 22 *(X 2014, Mines 2015)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M\,A + A^T\,M \end{cases}$.

1. Montrer que l'image par f d'une matrice antisymétrique est une matrice antisymétrique.
2. Soit g l'endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$ induit par f.
   Calculer tr (g).

5 Polynôme caractéristique

Exercice 23 *(Centrale 2024)*

Soit F sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$\forall M \in F \setminus \{0\}$ $M \in GL_n(\mathbb{K})$

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que dim $(F) \leq 1$
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair, que dire de F ?
3. Dans le cas n pair, trouver un exemple où F est de dimension 2.

Exercice 24 *(X 2013)*

On considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$ où t est un paramètre réel.
Trouver deux nombres réels $a < b$ indépendants de t, tels que pour tout t, chacun des intervalles $]-\infty; a[,]a; b[$ et $]b; +\infty[$ contienne une valeur propre de $M(t)$.

Exercice 25 *(Mines 2018)*

Chercher le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & & \dots & n \end{pmatrix}$

Exercice 26 *(Mines 2013)*

$P_n(X) = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$ avec $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i \geq 0$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$
   Montrer que A admet une unique valeur propre positive.

6 Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 27 *(CCP 2022)*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et telle que $A^3 = -A$.
A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 28 *(CCP 2022)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $4A^2 + 3A - I_n = 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 29 *(CCP 2022)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^3 - 2M^2 + M = 0$.
Combien M peut-elle avoir de valeurs propres ?

Exercice 30 *(Mines 2014)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$.
Déterminer le déterminant et la trace de A.

Exercice 31 *(Centrale 2014)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3\,A - 4\,I_n = 0$.
Vérifier que A est inversible et donner le signe de son déterminant.

Exercice 32

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant chacune une seule valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 33

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $P^2 = P$.
Soit $\Phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto MP + PM \end{cases}$.
Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la vérification est facile, on ne demande pas de la faire.

1. Trouver un polynôme annulateur de Φ.
2. En déduire que Φ est diagonalisable.

7 Cayley-Hamilton

Exercice 34 *(Mines 2018, 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ telle que $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}\,(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 35 *(X 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nilpotentes telles que $A^3 = -A$ et $B^3 = -B$.
Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 36

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

1. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont le même spectre.
2. Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$.
   Montrer que $UV^T \neq 0$.
3. Montrer que Φ est un endomorphisme et que $\text{Sp}(A) + \text{Sp}(B) \subset \text{Sp}(\Phi)$.
4. Soient $\lambda \in \text{Sp}(\Phi)$ et Y un vecteur propre associé à λ. Montrer :
   $\forall P \in \mathbb{C}[X]\ P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$
5. Montrer que $\text{Sp}(A) + \text{Sp}(B) = \text{Sp}(\Phi)$

8 Diagonalisation

Exercice 37 *(CCP 2024)*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & -3 \end{pmatrix}$
A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Exercice 38 *(X 2018)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E tel que :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ u(e_i) = \lambda_i e_i + e_{i-1}$ (en posant $e_0 = 0$).
Donner une CNS sur les λ_i pour que u soit diagonalisable.

Exercice 39 *(Centrale 2003)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
Condition sur a pour que A soit diagonalisable.

Exercice 40 *(Centrale 2019, Mines 2022)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
CNS pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9 Matrices par blocs

Exercice 41 *(Mines 2018)*

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et écrire explicitement N.

Exercice 42 *(Mines 2018)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^3 = 0$, $f^2 \neq 0$ et $\text{rg}(f) = 2n$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 43 *(X 2016)*

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que $\det(M) = \det(I_n + BA) = \det(I_n + AB)$.
2. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\det(A + BC) = \det(A) \times \det(I_n + CA^{-1}B)$.

Exercice 44 *(Mines 2021, 2023)*

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer :
   B diagonalisable $\iff$ A diagonalisable.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 7A & -6A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer :
   B diagonalisable $\iff$ A diagonalisable.

Exercice 45 *(X 2011, Mines 2023)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 46 *(Mines 2015, Centrale 2018)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que si A est diagonalisable et inversible alors M l'est aussi.

Exercice 47 *(Mines 2025)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(C)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre les valeurs propres de A et les valeurs propres de B.
   De même pour les sous-espaces propres de A et de B.
2. Trouver une relation entre la dimension des sous-espaces propres de A et celle des sous-espaces propres de B.
3. Trouver une CNS sur A pour que B soit diagonalisable.

10 Suites de matrices

Exercice 48

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 4I_2$ et $A \neq \pm 2I_2$.
Montrer que la suite $\left(\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 49 *(Centrale 2006)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_n$.

1. Mq : $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists (a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$ tq $A^k = a_k I_n + b_k A + c_k A^2$

2. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$ existe et l'exprimer en fonction de I_n, A et A^2.

Exercice 50 *(CCP 2024)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $||A|| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max(\mathrm{Sp}(A))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $||A||$ et $\rho(A)$.
2. Montrer :
   $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ ||AB|| \leq ||A||\ ||B||$.
3. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

   Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\},\ |\lambda x_i| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|$.

   En déduire que $\rho(A) \leq ||A||$.

4. Montrer :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A^k) = \rho(A)^k$.
5. On suppose A diagonalisable. Montrer que $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 51 *(Ens 2024)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer pour $T \in \mathbb{R}$, $M(T) = \lim_{N\to+\infty} \left(I_2 + \frac{T}{N}A\right)^N$.

Exercice 52 *(Centrale 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A comptées sans leurs multiplicités.
On suppose que $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est libre.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.
4. 4 autres questions

Exercice 53 *(Ens 2025)*

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que

$$\lim_{n\to+\infty} (4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$$

11 Sous-espaces stables

Exercice 54 *(Centrale 2015)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice 55 *(Centrale 2016)*

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x + 2y - z = 0\}$.

1. F est-il stable par u ?
   Trouver un supplémentaire de F stable par u.
   Y a-t-il unicité ?
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n.
   Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.
   Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
   Trouver un supplémentaire de F stable par u.
   Y a-t-il unicité ?