ALGEBRE LINEAIRE
TD
2026-2027
Chapitre 3
Correction

941

1 Matrices : révisions de première année

Exercice 1 *(Ens 2025)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $E_A = \{AM, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$.
Que vaut $\dim(E_A)$?

Correction
Soit $\phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$.
ϕ est une application linéaire dont l'image est E_A.
$M \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A)$
On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Ker}(A))) = n\dim(\mathrm{Ker}(A))$
On en déduit avec le formule du rang :
$\dim(E_A) = n^2 - n\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n\,\mathrm{rg}(A)$

Exercice 2 *(X 99)*

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale.
On suppose ses coefficients diagonaux tous distincts.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $AD^2 - 2DAD + D^2A = 0$.
Que dire de A ?

Correction
Le coefficient (i,j) de $AD^2 - 2DAD + D^2A$ est :
$(d_{j,j}^2 - 2d_{i,i}d_{j,j} + d_{i,i}^2)a_{i,j} = (d_{i,i} - d_{j,j})^2 a_{i,j}$.
On peut donc dire que A est diagonale.
La réciproque est vraie, on ne peut rien dire de plus.

Exercice 3 *(X 2013)*

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pour qu'elle puisse être factorisée sous le forme :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $a, c \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$?
Quand cette décomposition est possible, est-elle unique ?

Correction

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ ab & b^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & bc \\ ab & abc + b^{-1} \end{pmatrix}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
\exists (a,b,c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\ M = \begin{pmatrix} b & bc \\ ab & abc + b^{-1} \end{pmatrix} &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \begin{cases} x = b \\ y = bc \\ z = ab \\ t = abc + b^{-1} \end{cases} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \begin{cases} b = x \\ c = \dfrac{y}{b} = \dfrac{y}{x} \\ a = \dfrac{z}{x} \\ t = \dfrac{yz+1}{x} \end{cases} \\
&\iff x \neq 0 \text{ et } xt - yz = 1 \\
&\iff x \neq 0 \text{ et } \det M = 1
\end{aligned}$$

Si la factorisation existe, elle est unique.

Exercice 4 *(Mines 2019)*

Pour $j \in [\![0; n]\!]$, on pose $S_j = X^j(1-X)^{n-j}$.
Soit $\mathcal{B}$ la famille $(S_j)_{0 \leq j \leq n}$.

1. Déterminer P, la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer P^{-1}.

Correction

1. Compte tenu des décalages d'indice, $p_{i,j}$ est le coefficient de X^{i-1} dans S_{j-1}.

$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![1; n+1]\!]\ S_{j-1} &= X^{j-1}(1-X)^{n+1-j} = X^{j-1}\sum_{k=0}^{n+1-j}(-1)^k\binom{n+1-j}{k}X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1-j}(-1)^k\binom{n+1-j}{k}X^{k+j-1} \\
&= \sum_{i=j}^{n+1}(-1)^{i-j}\binom{n+1-j}{i-j}X^{i-1}
\end{aligned}$$

On a donc $p_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i < j \\ (-1)^{i-j}\binom{n+1-j}{i-j} \text{ si } i \geq j \end{cases}$.

2. P est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1 donc P est inversible.
3. Si on note Q l'inverse de P, $q_{i,j}$ est le coefficients de S_{i-1} dans la décomposition de X^{j-1} dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![1; n+1]\!]\ X^{j-1} &= X^{j-1}(X+1-X)^{n+1-j} = X^{j-1}\sum_{k=0}^{n+1-j}\binom{n+1-j}{k}X^k(1-X)^{n+1-j-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1-j}\binom{n+1-j}{k}X^{k+j-1}(1-X)^{n+1-j-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1-j}\binom{n+1-j}{k}S_{k+j-1} = \sum_{i=j}^{n+1}\binom{n+1-j}{i-j}S_{i-1}\end{aligned}$$

On a donc $q_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i < j \\ \binom{n+1-j}{i-j} \text{ si } i \geq j \end{cases}$.

Exercice 5 *(CCP 2017)*

Calculer selon les valeurs de a et b le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.

Correction

$L_1 = L_3$ et $L_2 = L_4$ donc M a le même rang que $M_1 = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.

$C_1 = C_3$ (pour M_1) et $C_2 = C_4$ donc M a le même rang que $M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$\det(M_2) = a^2 - b^2$ donc :
Si $b \neq \pm a$ alors le rang de M est 2.
Si $b = \pm a$ et $a \neq 0$ alors le rang de M est 1.
Si $a = b = 0$, le rang de M est nul.

Solution avec des matrices par blocs

$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
On veut retrancher la première ligne à la seconde.
On fait subir la même opération à la matrice $I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$, on obtient la matrice $P = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$.
La matrice P est inversible car $\det(P) = \det(I_2) \times \det(I_2) = 1$.
Donc la matrice $M_1 = PM = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a le même rang que la matrice M.
On peut évidemment supprimer la ligne de blocs nuls car les lignes de nombres correspondantes sont nulles.

Donc M a le même rang que $M_2 = \begin{pmatrix} A & A \end{pmatrix}$.
La matrice $Q = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ est inversible et M a le même rang que $M_3 = M_2 Q = \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix}$.
Finalement, M a le même rang que A.
$\det(A) = a^2 - b^2$ donc :
Si $b \neq \pm a$ alors le rang de M est 2.
Si $b = \pm a$ et $a \neq 0$ alors le rang de M est 1.
Si $a = b = 0$, le rang de M est nul.

Exercice 6 *(X 2014)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = j + n(i-1)$.
Quel est le rang de A ?

Correction

La remarque fondamentale est que $C_j(A) = j \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$.

On en déduit $rg(A) \leq 2$.
Si $n = 1$, $A = (1)$ est de rang 1.
On suppose désormais $n \geq 2$.
$C_1(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ n+1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et $C_2(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ n+2 \\ \vdots \end{pmatrix}$.
Si ces colonnes sont liées alors $C_2(A) = 2\,C_1(A)$ et $n + 2 = 2\,(n+1)$ ce qui conduit à $n = 1$ absurde.
Donc les deux premières colonnes de A sont indépendantes et $rg(A) \geq 2$.
Donc si $n \geq 2$ alors $rg(A) = 2$.

Exercice 7 *(Centrale 2004)*

Soit B une matrice réelle de taille $(2,3)$ et A une matrice réelle de taille $(3,2)$. On donne :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Peut-on obtenir la valeur de x ?
2. Quelles informations peut-on en déduire sur A et B ?

Correction

1. $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$ donc $r(AB) \leq r(A)$.
   Mais le rang de A est inférieur au nombre de colonnes de A ie 2.
   Donc $r(AB) \leq 2$.
   C_1 et C_3 (de AB) sont linéairement indépendantes donc C_2 est combinaison linéaire de C_1 et C_3.
   On en déduit $x = 8$.

2. $r(AB) = 2 \leq r(A) \leq 2$ donc $r(A) = 2$.
   A est injective.
   $\text{Ker}\,(B) \subset \text{Ker}\,(AB)$
   Donc $3 - r(B) \leq 3 - r(AB)$
   Donc $r(B) \geq r(AB) = 2$.
   $r(B)$ est inférieur au nombre de lignes de B donc $r(B) = 2$.
   B est surjective.
   $\text{Im}\,(AB) \subset \text{Im}\,(A)$ donc $\text{Im}\,(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.
   Les matrices suivantes conviennent :
   $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$
   $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

Exercice 8 *(Ens 2025)*

Soient N et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(M) = k$ et $\text{rg}(N) = l$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $\text{rg}(NM)$?

Correction
On sait que $\text{rg}(NM) \leq \min(\text{rg}(N), \text{rg}(M))$:
En effet $\text{Im}\,(NM) \subset \text{Im}\,(N)$ donc $\text{rg}(NM) \leq \text{rg}(N)$
$\text{Ker}\,(M) \subset \text{Ker}\,(NM)$ donc $n - \text{rg}(M) \leq n - \text{rg}(NM)$
On a donc $\text{rg}(NM) \leq \min(k, l)$.
On considère $M = \text{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ et $N = \text{Diag}(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$: il y a k uns dans M et l dans N.
Si N commence par des 1 alors $\text{rg}(NM) = \min(k, l)$.
Si N commence par 1 seul zéro alors $\text{rg}(NM) = \min(k, l) - 1$
Et ainsi de suite, sachant que N ne peut pas commencer par plus de $n - l$ zéros.
Si $\min(k, l) leq n - l$ alors on aura tous les rang de 0 à $\min(k, l)$.
En inversant les rôles des deux diagonales, on a le même résultat si $\min(k, l) \leq n - k$
Donc si $k + l \leq n$, la réponse est $[\![0; \min(k, l)]\!]$.
Mais ce n'est pas toujours la réponse car si M et N sont de rang n alors M et N sont inversibles donc NM aussi et le rang de NM ne peut prendre que la valeur n.
Mais $\text{rg}(NM) = \dim(N(\text{Im}\,(M)) = \text{rg}(M) - \dim(\text{Ker}\,(N) \cap \text{Im}\,(M)) \geq \text{rg}(M) - \dim(\text{Ker}\,(N)) \geq \text{rg}(M) + \text{rg}(N) - n$
Donc si $k + l > n$ alors $\text{rg}(NM) \in [\![k + l - n; \min(k, l)]\!]$
En reprenant les diagonales du début, on voit que toutes ses valeurs sont bien possibles.

Exercice 9 *(Mines 2016)*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
On suppose que $I_n - AB \in GL_n(\mathbb{K})$.
A-t-on $I_n - BA \in GL_n(\mathbb{K})$?

Correction

Soit $X \in \text{Ker}\,(I_n - BA)$.
On a $X = BAX$.
On multiplie par A à gauche : $AX = ABAX$.
Ou encore $(I_n - AB)(AX) = 0$.
Par hypothèse, $I_n - AB \in GL_n(\mathbb{K})$, donc $AX = 0$.
Enfin, $X = BAX = B0 = 0$.
Donc $\text{Ker}\,(I_n - BA) = \{0\}$ et $I_n - BA \in GL_n(\mathbb{K})$.

Autre méthode
On montre :
$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ $\det(I_n - BA) = \det(I_n - AB)$.
(Cf plus tard dans l'année $\chi_{BA} = \chi_{AB}$)
Si A est inversible :

$$\begin{aligned}\det(I_n - BA) &= \det\left(\left(A^{-1} - B\right)A\right) = \det\left(A^{-1} - B\right) \times \det(A) \\ &= \det(A) \times \det\left(A^{-1} - B\right) = \det\left(A\left(A^{-1} - B\right)\right) \\ &= \det(I_n - AB)\end{aligned}$$

Si A n'est pas inversible, il existe une suite (A_p) de matrices inversibles qui convergent vers A.
D'après ce qui précède :
$\forall p \in \mathbb{N}$ $\det(I_n - BA_p) = \det(I_n - A_pB)$
En faisant tendre p vers $+\infty$ (et en anticipant sur la continuité du déterminant), on obtient :
$\det(I_n - BA) = \det(I_n - AB)$

Exercice 10 *(X 2007)*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB + A + B = 0$.
Montrer que A et B commutent.

Correction
$(A + I_n)(B + I_n) = AB + A + B + I_n = I_n$
Donc $A + I_n$ est inversible et $(A + I_n)^{-1} = B + I_n$
D'où $(B + I_n)(A + I_n) = I_n$
$BA + B + A + I_n = I_n$
$BA = -A - B = AB$

Exercice 11 *(Mines 2016)*

Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$.
Montrer que $A(\text{Im}\,B) \subset \text{Im}\,B$ ou $A(\text{Ker}\,B) \subset \text{Ker}\,B$.

Correction

- **Première méthode**
  On suppose que $A(\text{Ker}\,B)$ n'est pas inclus dans $\text{Ker}\,B$.
  Soit $y_I \in A(\text{Im}\,B)$.
  Il existe x_I dans $\mathbb{C}^n$ tel que $y_I = ABx_I$.
  Il existe y_K qui appartient à $A(\text{Ker}\,B)$ mais pas à $\text{Ker}\,B$.
  Il existe x_K dans $\text{Ker}\,B$ tel que $y_K = Ax_K$.

$By_K = BAx_K = BAx_K - ABx_K : Bx_K = 0$ car $x_K \in \operatorname{Ker}(B)$
Donc $By_K = (AB - BA)(-x_K) \in \operatorname{Im}(AB - BA)$
$y_K \notin \operatorname{Ker} B$ donc $By_K \neq 0$ et (By_K) est une base de $\operatorname{Im}(AB - BA)$ qui est de dimension 1.
$y_I - BAx_I = ABx_I - BAx_I = (AB - BA)x_I \in \operatorname{Im}(AB - BA)$ donc :
$\exists \lambda \in \mathbb{C}$ tq $y_I - BAx_I = \lambda By_K$
D'où $y_I = BAx_I + \lambda By_K = B(Ax_I + \lambda y_K) \in \operatorname{Im}(B)$
D'où $A(\operatorname{Im} B) \subset \operatorname{Im} B$.

- **Deuxième méthode**
  On note a (reps. b) l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A (reps. B).
  $\operatorname{rg}(ab - ba) = 1$ donc il existe un vecteur e_1 non nul tel que $\operatorname{Im}(ab - ba) = \mathbb{C}e_1$.
  On complète (e_1) en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$.
  La matrice de $ab - ba$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.
  A cause de la trace $\alpha_1 = 0$ **mais cela ne sert à rien ici**.
  Soit $\varphi \begin{cases} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \end{cases}$
  φ est linéaire et :
  $\forall x \in \mathbb{C}^n \ (ab - ba)(x) = \varphi(x)e_1$

  Soit $x \in \operatorname{Ker}(b)$.
  $(ab - ba)(x) = -b(a(x)) = \varphi(x)e_1$.
  Si $\varphi(\operatorname{Ker}(b)) = \{0\}$ alors :
  $\forall x \in \operatorname{Ker}(b)\ b(a(x)) = 0$ ie $a(x) \in \operatorname{Ker}(b)$
  Donc $a(\operatorname{Ker}(b)) \subset \operatorname{Ker}(b)$.
  On suppose désormais $\varphi(\operatorname{Ker}(b)) \neq \{0\}$.
  Il existe donc $x_0 \in \operatorname{Ker}(b)$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.
  $-b(a(x_0)) = \varphi(x_0)e_1$ donc $e_1 \in \operatorname{Im}(b)$.
  Soit $y \in a(\operatorname{Im}(b))$.
  Il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $y = ab(x)$.
  $y - ba(x) = \varphi(x)e_1$ donc $y = b(a(x)) + \varphi(x)e_1 \in \operatorname{Im}(b)$.
  Donc $a(\operatorname{Im}(b)) \subset \operatorname{Im}(b)$.

2 Déterminants

Exercice 12

Calculez les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}$

Correction

1.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} \quad \forall i \in \{2;3\}\ C_i \leftarrow C_i - C_1 \\ &= (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4 \\
&= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} \quad \forall i \in \{2;3;4\}\ L_i \leftarrow L_i - L_1 \\
&= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b-c+d & d-c & c-d \\ a-b-c+d & a-c & b-d \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1+C_2 \\
&= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-d & b-c \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} a-d & b-c \\ b-c & a-d \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\left((a-d)^2-(b-c)^2\right) \\
&= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)
\end{aligned}$$

Solution avec des matrices par blocs

$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$

Sur le modèle du pivot de Gauss, on cherche à remplacer le bloc C en bas à gauche par un bloc nul.

Il faut donc faire $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{C}{A}L_1$ mais que signifie $\dfrac{C}{A}$? $A^{-1}C$ ou $C = A^{-1}$.

On peut dans un premier temps supposer A inversible et ensuite conclure par un argument de continuité.

Ensuite $A = aI_2 + bS$ et $C = cI_2 + dS$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc A et C commutent. On en déduit que C et A^{-1} commutent :

$AC = CA$ qu'on multiplie par A^{-1} de chaque côté.

On considère donc la matrice $P = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -CA^{-1} & I_2 \end{pmatrix}$ obtenue en faisant subir à $I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ l'opération qu'on étudie.

$\det(P) = \det(I_2) \times \det(I_2) = 1$ donc :
$\det(M) = \det(PM) = \begin{pmatrix} A & C \\ -CA^{-1}A + C & A - CA^{-1}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A - A^{-1}C^2 \end{pmatrix}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \det(A) \times \det(A - A^{-1}C^2) = \det\left(A^2 - C^2\right) \\
&= \det(A - C)(A + C)) \text{ car } A \text{ et } C \text{ commutent} \\
&= \det(A - C) \times \det(A + C) = \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{vmatrix} \\
&= \left((a-c)^2 - (b-d)^2\right)\ \left((a+c)^2 - (b+d)2\right) \\
&= (a-c+b-d)(a-c-b+d)(a+c+b+d)(a+c-b-d)
\end{aligned}$$

Que se passe-t-il si A n'est pas inversible ?
$\det(A) = a^2 - b^2$ donc $a^2 = b^2$.
On considère $A_n = \begin{pmatrix} a + \dfrac{1}{n} & b \\ b & a + \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$ qui a la même forme que A.
$\det(A_n) = \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^2 - b^2 = \dfrac{2a}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
Si $a = 0$, $\det(A_n) = \dfrac{1}{n^2} \neq 0$.
Si $a \neq 0$, $\det(A_n) \sim \dfrac{2a}{n}$ avec $a \neq 0$ donc $\det(A_n) \neq 0$ au moins pour n assez grand.
On en déduit pour n assez grand :

$$\begin{vmatrix} a + \frac{1}{n} & b & c & d \\ b & a + \frac{1}{n} & d & c \\ c & d & a + \frac{1}{n} & b \\ d & c & b & a + \frac{1}{n} \end{vmatrix} = \left(a + \frac{1}{n} - c + b - d\right)\left(a + \frac{1}{n} - c - b + d\right)\left(a + \frac{1}{n} + c + b + d\right)\left(a + \frac{1}{n}\right.$$

et il ne reste plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$.

3.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & a'-a & 0 & (a'-a)b \\ 0 & 0 & b'-b & a(b'-b) \\ 0 & a'-a & b'-b & a'b'-ab \end{vmatrix} \quad \forall i \in \{2;3;4\}\ L_i \leftarrow L_i - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} a'-a & 0 & (a'-a)b \\ 0 & b'-b & a(b'-b) \\ a'-a & b'-b & a'b'-ab \end{vmatrix} = (a'-a)(b'-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & (a'-a)b \\ 0 & 1 & a(b'-b) \\ 1 & 1 & a'b'-ab \end{vmatrix} \\
&= (a'-a)(b'-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & (a'-a)b \\ 0 & 1 & a(b'-b) \\ 0 & 1 & a'(b'-b) \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (a'-a)(b'-b) \begin{vmatrix} 1 & a(b'-b) \\ 1 & a'b'-ab \end{vmatrix} = (a'-a)(b'-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a' \end{vmatrix} \\
&= (a'-a)^2(b'-b)^2
\end{aligned}$$

Solution avec des matrices par blocs

$M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & bA \\ A & b'A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a' \end{pmatrix}$.

On veut retrancher la première ligne à la seconde.

On fait subir la même opération à la matrice $I_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$, on obtient la matrice $P = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}$.

$\det(P) = \det(I_2) \times \det(I_2) = 1$.

Donc :

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(PM) = \begin{pmatrix} A & bA \\ 0 & (b'-b)A \end{pmatrix} = \det(A) \times \det((b'-b)A) = (a'-a)(b'-b)^2 \det(A) \\ &= (a'-a)^2(b'-b)^2 \end{aligned}$$

Exercice 13

Calculer $\left|a^{|i-j|}\right|_{1\leq i,j\leq n}$.

Correction

Soit $D_n = \left|a^{|i-j|}\right|_{1\leq i,j\leq n}$.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & \dots & a^{n-1} \\ a & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a \\ a^{n-1} & \dots & \dots & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a^2 & a & \dots & a^{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & D_{n-1} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} (C_1 \leftarrow C_1 - aC_2) \\ &= (1-a^2)D_{n-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; D_n = (1-a^2)^{n-1} D_1 = (1-a^2)^{n-1}$$

Exercice 14 *(CCP)*

Calculer $\begin{vmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix}$.

Correction

- **Première méthode**

$$\begin{pmatrix} a+b & a+c & b+c \\ a^2+b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ a^3+b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} . \left(1. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= abcVdM(a,b,c).(-1-1) \\ &= -2abc(c-b)(c-a)(b-a) \end{aligned}$$

- **Deuxième méthode**

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2b & a+c & b+c \\ 2b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ 2b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3 \\ &= 2 \begin{vmatrix} b & a+c & b+c \\ b^2 & a^2+c^2 & b^2+c^2 \\ b^3 & a^3+c^3 & b^3+c^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} b & a+c & c \\ b^2 & a^2+c^2 & c^2 \\ b^3 & a^3+c^3 & c^3 \end{vmatrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &= 2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ b^2 & a^2 & c^2 \\ b^3 & a^3 & c^3 \end{vmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2abcVdM(b,a,c) = 2abc(c-a)(c-b)(a-b) \\ &= -2abc(c-b)(c-a)(b-a) \end{aligned}$$

Exercice 15 *(X 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$.
Montrer :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \det(xA+B) = 0$

Correction
Soit $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \det(xA+B) \end{cases}$.
Il suffit d'écrire le déterminant et de le développer pour voir que f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3.
Par hypothèse, $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$ donc :
$\exists a \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax(x-1)(x+1)$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) &= \det(xA+B) = x^3 \det\left(A + \frac{1}{x}B\right) \\ \frac{f(x)}{x^3} &= \det\left(A + \frac{1}{x}B\right) \\ a\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \det\left(A + \frac{1}{x}B\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $a = 0$.
On conclut facilement.

Variante 2024
On a donc prouvé :
$\forall x \in \mathbb{R}\ \det(xA+B)=0$
On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\ \det(xA+yB) &= y^3\det\left(\frac{x}{y}A+B\right)=y^3\times 0=0\\ \forall (x,0)\in\mathbb{R}\times\{0\}\ \det(xA+yB) &= \det(xA)=x^3\det(A)=0\end{aligned}$$

Solution auto contenue pour la variante des Mines
Soit $f\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ (x,y)\mapsto\det(xA+yB)\end{cases}$.
On a $f(1,0)=f(0,1)=f(1,1)=f(1,-1)=0$.
Mais :
$\forall (x,y,t)\in\mathbb{R}^3\ f(tx,ty)=t^3f(x,y)$
Donc f est nulle le long des deux axes et le long des deux bissectrices du repère.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $x\neq 0$.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tq $a\neq 0$, $b\neq 0$, $b\neq a$, $b\neq -a$ et $\frac{b}{a}\neq\frac{y}{x}$ ie $ay-bx\neq 0$.
Soit $g\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto f(x+ta,y+tb)\end{cases}$.

$$\forall t\in\mathbb{R}\ g(t)=\begin{vmatrix}(x+ta)a_{1,1}+(y+tb)b_{1,1} & (x+ta)a_{1,2}+(y+tb)b_{1,2} & (x+ta)a_{1,3}+(y+tb)b_{1,3}\\ (x+ta)a_{2,1}+(y+tb)b_{2,1} & (x+ta)a_{2,2}+(y+tb)b_{2,2} & (x+ta)a_{2,3}+(y+tb)b_{2,3}\\ (x+ta)a_{3,1}+(y+tb)b_{3,1} & (x+ta)a_{3,2}+(y+tb)b_{3,2} & (x+ta)a_{3,3}+(y+tb)b_{3,3}\end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par la règle de Sarrus, on constate que c'est la somme de 6 produits de trois fonctions polynomiales de degré au plus 1. g est donc une fonction polynomiale de degré au plus 3.
On prend $t=t_1=-\frac{x}{a}$.
$g(t_1)=f\left(0,\frac{ay-bx}{a}\right)=0$
On prend $t=t_2=-\frac{y}{b}$.
$g(t_2)=f\left(\frac{bx-ay}{b},0\right)=0$
$t_1-t_2=\frac{ay-bx}{ab}\neq 0$ donc $t_1\neq t_2$
On prend $t=t_3=\frac{x-y}{b-a}$.

$$\begin{aligned}g(t_3) &= f\left(\frac{(b-a)x+a(x-y)}{b-a},\frac{(b-a)y+b(x-y)}{b-a}\right)\\ &= f\left(\frac{bx-ay}{b-a},\frac{bx-ay}{b-a}\right)=0\\ t_3-t_1 &= \frac{a(x-y)+x(b-a)}{a(b-a)}=\frac{bx-ay}{a(b-a)}\neq 0\\ t_3-t_2 &= \frac{b(x-y)+(b-a)y}{b(b-a)}=\frac{bx-ay}{b(b-a)}\neq 0\end{aligned}$$

Enfin, on prend $t = t_4 = -\dfrac{x+y}{a+b}$.

$$\begin{aligned} g(t_4) &= f\left(\frac{(a+b)x-a(x+y)}{a+b}, \frac{(a+b)y-b(x+y)}{a+b}\right) = f\left(\frac{bx-ay}{a+b}, \frac{ay-bx}{a+b}\right) = 0 \\ t_4 - t_1 &= \frac{(a+b)x-a(x+y)}{a(a+b)} = \frac{bx-ay}{a(a+b)} \neq 0 \\ t_4 - t_2 &= \frac{(a+b)y-b(x+y)}{b(a+b)} = \frac{ay-bx}{b(a+b)} \neq 0 \\ t_3 - t_4 &= \frac{(a+b)(x-y)+(b-a)(x+y)}{(b-a)(b+a)} = \frac{2bx-2ay}{(b-a)(b+a)} \neq 0 \end{aligned}$$

g s'annule en 4 points deux à deux distincts et g est une fonction polynomiale de degré au plus 3 donc g est la fonction nulle.
En particulier, $f(x,y) = g(0) = 0$.

Exercice 16 *(X, Mines 2007)*

Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$

Correction

Soit $f \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{C}\ f(x) = \left(\prod_{i<j}(x_j - x_i)\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)\right)$ (Vandermonde)

En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que le déterminant cherché est l'opposé du coefficient de x^{n-1} dans $f(x)$. Or :

$\forall x \in \mathbb{C}\ f(x) = \left(\prod_{i<j}(x_j - x_i)\right)\left(x^n - x^{n-1}\sum_{k=1}^{n} x_k + \dots\right)$

Finalement le déterminant cherché est :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) . \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i)\right)$$

Autre méthode

$P = (X - x_1)\dots(X - x_{n-1})(X + x_1 + \dots + x_{n-1})$ est un polynôme unitaire de degré n scindé et la somme de ses racines est nulle.
Donc il existe $a_0, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{C}$ tq $P = X^n + a_{n-2}X^{n-2} + \dots a_0$.
On fait $C_n \leftarrow C_n + a_0C_1 + \dots + a_{n-2}C_{n-1}$.

Le déterminant devient : $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & P(x_1) = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} & P(x_{n-1}) = 0 \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & P(x_n) \end{vmatrix}$

On développe ensuite par rapport à la dernière colonne.
On obtient $P(x_n)VdM(x_1,\dots,x_{n-1})$ et on conclut facilement.

Exercice 17 *(Mines 2017)*

Soit $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\det(A+M) = \det(A) + \det(M)$
Montrer que $M = 0$.

Correction
On prend $A = M$ et on obtient $\det M = 0$.
Supposons que M ne soit pas nulle.
M a une colonne non nulle : $C_j(M)$.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe une matrice A inversible telle que $C_j(A) = -C_j(M)$.
$\det(A+M) = \det M = 0$ et $\det A \neq 0$: on aboutit une contradiction.

3 Matrices semblables

Exercice 18 *(Centrale 2009)*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donner les matrices de passage pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Correction
$\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$ donc $r(A) \leq 3 - r(A)$.
On en déduit $r(A) \leq 3/2$ puis $r(A) = 0$ ou 1.
A n'est pas nulle donc $r(A) = 1$.
Soit $\epsilon_2 \in \mathrm{Im}(A) \setminus \{0\}$.
$\epsilon_2 \in \mathrm{Ker}(A)$ et (ϵ_2) est libre donc on peut compléter (ϵ_2) en (ϵ_1, ϵ_2) base de $\mathrm{Ker}(A)$ ($\dim \mathrm{Ker}(A) = 3 - r(A) = 2$)
$\epsilon_2 \in \mathrm{Im}(A)$ donc il existe ϵ_3 tq $\epsilon_2 = A\epsilon_3$.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 + \lambda_3\epsilon_3 = 0$.
On applique A, il reste $\lambda_3\epsilon_2 = 0$ avec $\epsilon_2 \neq 0$.
On en déduit $\lambda_3 = 0$.
On reporte : $\lambda_1\epsilon_1 + \lambda_2\epsilon_2 = 0$ avec (ϵ_1, ϵ_2) libre.
On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est donc libre.
Vu son cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ alors :
$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a trivialement $r(A) = 1$ et $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose donc $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(A) \iff x_1 - x_2 + x_3 = 0.$

On remarque $A\epsilon_2 = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}\,(A)$.
D'où $A^2 = 0$ et bien sûr $A \neq 0$.
Les hypothèses précédentes sont bien vérifiées.

On prend $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ϵ_1, ϵ_2) est une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

$\epsilon_2 = A\epsilon_3$ avec $\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4 Trace

Exercice 19 *(Mines 2017)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{rg}(AB - BA) = 1$.
Calculer $(AB - BA)^2$.

Correction

- **Première méthode**
  Soient a l'endomorphisme canoniquement associé à A et b l'endomorphisme canoniquement associé à B.
  $ab - ba$ est de rang 1. Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(ab - ba)$. On a $\mathrm{Im}\,(ab - ba) = \mathbb{R}e_1$.
  On complète (e_1) en $(e_1, \ldots, e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$.
  Dans cette base la matrice de $ab - ba$ est de la forme $\begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.
  Mais la trace de $ab - ba$ est nulle donc $c_1 = 0$ et on a alors :
  $\forall i \in [\![1; n]\!]$ $(ab - ba)^2(e_i) = (ab - ba)(c_i e_1) = c_i c_1 e_1 = 0$
  $(ab - ba)^2$ est nulle sur une base donc $(ab - ba)^2 = 0$
- **Deuxième méthode**

Si M est une matrice de rang 1 alors il existe deux colonnes non nulles X et Y telles que $M = XY^T$.
En effet les colonnes de M sont proportionnelles.
On en choisit une non nulle et on la note X.
$\forall i \in [\![1;n]\!]\ \exists y_i \in \mathbb{R}$ tq $C_i(M) = y_i X$.
On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et on a $M = XY^T$.
Cela ne sert pas dans l'exercice mais réciproquement une matrice de la forme XY^T avec X et Y deux colonnes non nulles est de rang 1.
On a alors : $\text{tr}\,(M) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et :

$$\begin{aligned} M^2 &= (XY^T)(XY^T) = X(Y^TX)Y^T \text{ avec } Y^TX \in \mathbb{R} \\ &= (Y^TX)XY^T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) M = \text{tr}\,(M)M \end{aligned}$$

On conclut facilement.

Exercice 20 *(X 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
Montrer :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$ tr $\left((A+B)^k\right) =$ tr $\left(A^k\right) +$ tr $\left(B^k\right)$

Correction
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Quand on développe $(A+B)^k$ (sans commutation), il y a 2^k termes de la forme $M_1 M_2 \dots M_k$ avec $M_i = A$ ou B.
Supposons que $M_1 = A$.
Si il existe $j \in [\![2;k]\!]$ tel que $M_j = B$ alors on peut définir $j_0 = \min(\{j \in [\![2;k]\!] \text{ tq } M_j = B\})$.
On a alors $M_1 \dots M_k = A^{j_0-2}AB? = 0$, de trace évidemment nulle.
Supposons que $M_1 = B$.
Si il existe $j \in [\![2;k]\!]$ tel que $M_j = A$ alors on peut définir $j_0 = \min(\{j \in [\![2;k]\!] \text{ tq } M_j = A\})$.
On a alors $M_1 \dots M_k = B^{j_0-1}A?$ qui a la même trace que $A?B^{j_0-1}$ et cette matrice est de trace nulle d'après ce qui précède.
Parmi les 2^k matrices du développement de $(A+B)^k$, seules A^k et B^k ont une trace éventuellement non nulle.
On conclut avec la linéarité de la trace.

Remarque
Si on pousse le raisonnement précédent, on peut montrer que les seuls produits $M_1 \dots M_k$ qui peuvent être non nuls sont ceux de la forme $A \dots A$, $B \dots B$ et $B \dots BA \dots A$.
On peut aussi le démontrer par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*\ (A+B)^k = \sum_{l=0}^{k} B^l A^{k-l}$
On vérifie facilement que cette propriété est vraie pour $k = 1$.

On la suppose vraie au rang k.

$$\begin{aligned}(A+B)^{k+1} &= (A+B)(A+B)^k = (A+B)\sum_{l=0}^{k} B^l A^{k-l} \\ &= AB^0A^k + \sum_{l=1}^{k} ABB^{l-1}A^{k-l} + \sum_{l=0}^{k} B^{l+1}A^{k-l} \\ &= A^{k+1} + \sum_{l=1}^{k} 0B^{l-1}A^{k-l} + \sum_{l=1}^{k+1} B^l A^{k+1-l} \\ &= \sum_{l=0}^{k+1} B^l A^{k+1-l}\end{aligned}$$

Et la propriété est vraie au rang $k+1$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathrm{tr}\left((A+B)^k\right) &= \sum_{l=0}^{k} \mathrm{tr}\left(B^l A^{k-l}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(A^k\right) + \mathrm{tr}\left(B^k\right) + \sum_{l=1}^{k-1} \mathrm{tr}\left(A^{k-1-l}ABB^{l-1}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(A^k\right) + \mathrm{tr}\left(B^k\right) + \sum_{l=1}^{k-1} \mathrm{tr}\left(A^{k-1-l}\,0\,B^{l-1}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(A^k\right) + \mathrm{tr}\left(B^k\right)\end{aligned}$$

Exercice 21 *(Mines 2014, 2017, 2022)*

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $X + X^T = \mathrm{Tr}\,(X)A$.

Correction
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\exists!(X_s, X_a) \in S_n \times A_n$ tq $X = X_s + X_a$

$$\begin{aligned}X \text{ solution} &\iff X_s + X_a + X_s - X_a = (\mathrm{tr}\,(X_s) + \mathrm{tr}\,(X_a))\,A \\ &\iff 2X_s = \mathrm{tr}\,(X_s)A \text{ car la diagonale de } X_a \text{ est nulle} \\ &\iff X_s = \frac{\mathrm{tr}\,(X_s)}{2}.A\end{aligned}$$

- **Premier cas :** A n'est pas symétrique ou $A = 0$.
  D'après ce qui précède :
  X solution $\Longrightarrow X_s \in \mathbb{K}A \cap S_n = \{0\}$ ie $X_s = 0$
  Réciproquement si $X_s = 0$ alors X solution : $0 = \frac{\mathrm{tr}\,(0)}{2}.A$.
  Finalement l'ensemble des solutions est, dans ce cas, l'ensemble des matrices antisymétriques, de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
- **Deuxième cas :** A est symétrique non nulle.
  D'après ce qui précède :

X solution $\Longrightarrow X_s = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} X_s = \frac{\mathrm{tr}\,(X_s)}{2}A &\iff \lambda A = \frac{\mathrm{tr}\,(\lambda A)}{2}.A \\ &\iff \lambda A = \frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}\,(A).A \\ &\iff \lambda\left(1 - \frac{\mathrm{tr}\,(A)}{2}\right).A = 0 \end{aligned}$$

Si $\mathrm{tr}\,(A) \neq 2$ alors l'ensemble des solutions est l'ensemble des matrices antisymétriques, de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Si $\mathrm{tr}\,(A) = 2$ alors l'ensemble des solutions est $\mathbb{K}A \oplus A_n$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2} + 1$.

Exercice 22 *(X 2014, Mines 2015)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $f \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M\,A + A^T\,M \end{cases}$.

1. Montrer que l'image par f d'une matrice antisymétrique est une matrice antisymétrique.
2. Soit g l'endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$ induit par f.
   Calculer $\mathrm{tr}\,(g)$.

Correction

1. Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$.
   $f(M) = M\,A + A^T\,M = M\,A - A^T\,M^T = M\,A - (M\,A)^T$
   $f(M)^T = (M\,A)^T - (M\,A)^{TT} = (M\,A)^T - M\,A = -f(M)$
2. La trace d'un endomorphisme est la trace de sa matrice dans une base.
   Il faut donc d'abord choisir une base de $A_n(\mathbb{R})$.
   On prendra $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$.
   Il n'est pas indispensable de déterminer l'intégralité de la matrice de g dans cette base : seule la diagonale nous intéresse.
   On détermine donc ensuite le coefficient (i,j) de la matrice $g(E_{i,j} - E_{j,i}) = f(E_{i,j} - E_{j,i})$.
   $g(E_{i,j} - E_{j,i}) = f(E_{i,j}) - f(E_{j,i}) = E_{i,j}\,A + A^T\,E_{i,j} - E_{j,i}\,A - A^T\,E_{j,i}$.
   - Le coefficient (i,j) de la matrice $E_{i,j}\,A$ est :
     $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_{i,j}(i,k)a_{k,j} = a_{j,j}$
   - Le coefficient (i,j) de la matrice $A^T\,E_{i,j}$ est :
     $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\,E_{i,j}(k,j) = a_{i,i}$
   - Le coefficient (i,j) de la matrice $E_{j,i}\,A$ est :
     $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_{j,i}(i,k)a_{k,j} = 0$ car $i \neq j$
   - Le coefficient (i,j) de la matrice $A^T\,E_{j,i}$ est :
     $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\,E_{j,i}(k,j) = 0$

On en déduit que le coefficient (i,j) de la matrice $g(E_{i,j}-E_{j,i})$ vaut $a_{i,i}+a_{j,j}$.
On peut passer au calcul de la trace :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(g) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{i,i}+a_{j,j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,a_{i,i}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{j,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,a_{i,i}+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_{j,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\,a_{i,i}+\sum_{j=2}^{n}(j-1)\,a_{j,j} \\
&= (n-1)\,a_{1,1}+\sum_{i=2}^{n-1}(n-i+i-1)\,a_{i,i}+(n-1)\,a_{n,n} \\
&= (n-1)\operatorname{tr}(A)
\end{aligned}$$

5 Polynôme caractéristique

Exercice 23 *(Centrale 2024)*

Soit F sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$\forall M \in F\setminus\{0\}\ M \in GL_n(\mathbb{K})$

1. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, montrer que $\dim(F)\leq 1$
2. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et n impair, que dire de F ?
3. Dans le cas n pair, trouver un exemple où F est de dimension 2.

Correction

1. Si $F=\{0\}$, F est évidemment de dimension inférieure ou égale à 1.
   On suppose donc $F\neq\{0\}$.
   Soit A un élément non nul de F.
   A est donc inversible.
   Soit $B\in F$.
   $\forall x\in C\ \det(xA-B)=\det\left(A(xI_n-A^{-1}B)\right)=\det(A)\chi_{A^{-1}B}(x)$
   $\chi_{A^{-1}B}$ est un polynôme de degré $n\geq 1$ donc il possède au moins une racine z.
   $zA-B$ n'est donc pas inversible. Mais F est stable par combinaison linéaire donc $zA-B$ est un élément non inversible de F.
   On en déduuit $zA-B=0$ ie $B=zA$.
   D'où $F\subset\mathbb{C}A$, puis $F=\mathbb{C}A$ de dimension 1.
2. Le résultat est le même puisque tout polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle.
3. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, soit $M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ et $P(a,b)=\operatorname{Diag}(M(a,b),\ldots,M(a,b))$.
   $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \det(P(a,b))=(\det(M(a,b)))^{n/2}=(a^2+b^2)^{n/2}$
   $F=\left\{P(a,b),\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ convient.

Exercice 24 *(X 2013)*

On considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$ où t est un paramètre réel.
Trouver deux nombres réels $a < b$ indépendants de t, tels que pour tout t, chacun des intervalles $]-\infty; a[,]a; b[$ et $]b; +\infty[$ contienne une valeur propre de $M(t)$.

Correction
$\chi_t(X) = X^3 - (2+t)\,X^2 - (1-2\,t)\,X + 1$
$\chi_t(0) = 1$ est indépendant de t.
$\chi_t(X) = (-X^2 + 2\,X)\,t + X^3 - 2\,X^2 - X + 1$
Donc $\chi_t(2)$ est également indépendant de t, $\chi_t(2) = -1$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_t(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_t(x) = +\infty$
On a donc mis en évidence trois changements de signe.
$a = 0$ et $b = 2$ conviennent.

Exercice 25 *(Mines 2018)*

Chercher le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & & \dots & n \end{pmatrix}$

Correction
Plusieurs méthodes sont possibles.
Le cas $n = 2$ est de peu d'intérêt. On suppose $n \geq 3$.

- **Première méthode**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & & \dots & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & -2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & \lambda & \vdots \\ -1 & -2 & \dots & & \dots & \lambda - n \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) = (\lambda - n)\lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k}(-k) \begin{vmatrix} A_k(\lambda) & B_k \\ 0 & C_k(\lambda) \end{vmatrix}$$

Avec $A_k(\lambda) = \lambda I_{k-1}$, $B_k = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -(k-1) \end{vmatrix}$ et $C_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -k \\ \lambda & & & -(k+1) \\ & \ddots & 0 & -(n-2) \\ & & \lambda & -(n-1) \end{pmatrix}$

En développant le déterminant de $C_k(\lambda)$ par rapport à sa première ligne :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) &= \lambda^n - n\lambda^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+k}(-k) \det(\lambda I_{k-1})(-1)^{1+n-k}(-k) \det(\lambda I_{n-k-1}) \\ &= \lambda^n - n\lambda^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \lambda^{n-2} \end{aligned}$$

Donc $\chi_A = X^n - nX^{n-1} - \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}X^{n-2}$

- **Deuxième méthode**

A est de rang 2 donc son noyau est de dimension $n-2>0$.
Donc $\chi_A = X^{n-2}(X^2+aX+b)$.
Avec la trace, $a=-n$.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1, \lambda_2, 0, \ldots, 0$.
$b = \lambda_1\lambda_2$.
Donc $2b = (\lambda_1+\lambda_2)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = n^2 - \mathrm{tr}\,(A^2)$

Or $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 4 & \ldots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & (n-1)^2 & n(n-1) \\ n & 2n & & n(n-1) & n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \end{pmatrix}$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2b &= n^2 - \mathrm{tr}\,(A^2) = -2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ b &= -\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

Comment montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est la liste des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités alors $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ est la liste des valeurs propres de A^2 comptées avec leurs multiplicités ?
On verra plus tard comment utiliser la trigonalisation.
Pour l'instant :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_{A^2}(\lambda^2) &= \det\left(\lambda^2 I_n - A^2\right) = \det\left((\lambda I_n - A)(\lambda I_n + A)\right) \\ &= \det(\lambda I_n - A)\det(\lambda I_n + A) = \chi_A(\lambda)(-1)^n\chi_A(-\lambda) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)\right)(-1)^n\left(\prod_{k=1}^{n}(-\lambda-\lambda_k)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left((\lambda-\lambda_k)(\lambda+\lambda_k)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(\lambda^2-\lambda_k^2) \end{aligned}$$

Mais tout nombre complexe a une racine carrée donc :
$\forall z \in \mathbb{C}\ \chi_{A^2}(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k^2)$
Donc :
$\chi_{A^2}(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k^2)$

- **Troisième méthode**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ 2x_n = 0 \\ \vdots \\ (n-1)x_n = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que les vecteurs $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\epsilon_{n-2} = \begin{pmatrix} -(n-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$.

On pose ensuite $\epsilon_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\epsilon_n = A\epsilon_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \epsilon_i = 0$.

On applique A et il reste $\lambda_{n-1} A\epsilon_{n-1} + \lambda_n A\epsilon_n = 0$.

$$\lambda_{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} n \\ 2n \\ \vdots \\ n(n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \end{pmatrix} = 0$$

Avec la première ligne, on a $\lambda_{n-1} = -n\lambda_n$.

Les lignes suivantes donnent la même chose.

Par contre, la dernière donne : $\left(-n^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2\right) \lambda_n = 0$.

On en déduit $\lambda_n = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$.

Il reste alors $\sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \epsilon_i = 0$ qui entraîne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-2} = 0$.

Finalement, la famille $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, espace vectoriel de dimension n, donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Pour écrire la matrice de l'endomorphisme a, canoniquement associé à A, dans cette base, on doit décomposer $A\epsilon_n = \begin{pmatrix} n \\ 2n \\ \vdots \\ n(n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \end{pmatrix}$.

$$A\epsilon_n - n\epsilon_n = \begin{pmatrix} n \\ 2n \\ \vdots \\ n(n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 \end{pmatrix} - n\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \end{pmatrix} \epsilon_{n-1}$$

La matrice de a dans la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ 1 & n \end{pmatrix}$.

On conclut avec $\chi_A = X^{n-2}\chi_B = X^{n-2}\left(X^2 - nx - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right)$.

Exercice 26 *(Mines 2013)*

$P_n(X) = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$ avec $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_i \geq 0$.

1. Montrer que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$
   Montrer que A admet une unique valeur propre positive.

Correction

1. $P_n(0) = -\alpha_0 < 0$ et $P_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, d'où l'existence.

   On raisonne par récurrence sur n.
   Pour $n = 1$, $P_1(X) = X - \alpha_0$ avec $\alpha_0 > 0$.
   Donc P_1 admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On suppose la propriété vraie du rang 1 au rang $n-1$ ($n \geq 2$).
   $P_n'(X) = nX^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha_i X^{i-1}$
   On suppose d'abord $\alpha_1 > 0$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, P_n' admet une unique racine, notée r, sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donc P_n' est de signe constant sur $[0; r[$ et sur $]r; +\infty[$ (TVI).
   $P_n'(0) = -\alpha_1 < 0$ et $P_n'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
   Donc P_n décroît strictement sur $[0; r]$ et croît strictement sur $[r; +\infty[$.
   Comme $P_n(0) < 0$, on en déduit que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$ (dresser le tableau).
   On examine ensuite le cas $\alpha_1 = 0$.
   Si $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ alors $P_n = X^n - \alpha_0$ avec $\alpha_0 > 0$ donc P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Reste donc le cas $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, $\alpha_k > 0$.
   $P_n' = nX^{n-1} - k\alpha_k X^{k-1} - \dots - (n-1)\alpha_{n-1}X^{n-2}$

$P_n' = nX^{k-1}\left(X^{n-k} - \dfrac{k\alpha_k}{n} - \cdots - \dfrac{(n-1)\alpha_{n-1}}{n}X^{n-k-1}\right)$
P_n' a donc une unique racine, notée r, sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc P_n' est de signe constant sur $]0;r[$ et sur $]r;+\infty[$ (TVI).
$P_n'(x) \sim_0 -k\alpha_k x^{k-1} < 0$ et $P_n'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
Donc P_n décroît strictement sur $[0;r]$ et croît strictement sur $[r;+\infty[$.
Comme $P_n(0) < 0$, on en déduit que P_n admet une unique racine sur $\mathbb{R}_+^*$ (dresser le tableau).

2. Cf les matrices compagnes vues en cours. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & X & -1 & 0 & \dots \\ -3 & 0 & X & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ -n & 0 & \dots & & X \end{vmatrix}$
On fait $L_n \leftarrow L_n + XL_{n-1} + \cdots + X^{n-1}L_1$:

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & X & -1 & 0 & \dots \\ -3 & 0 & X & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ -n-(n-1)X-\cdots-2X^{n-2}+X^n-X^{n-1} & 0 & \dots & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= (-1)^{n+1}\left(X^n - X^{n-1} - 2X^{n-2} - (n-1)X - n\right)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 \end{vmatrix} \\ &= X^n - X^{n-1} - 2X^{n-2} - (n-1)X - n \end{aligned}$$

et il suffit d'appliquer la première question.

6 Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 27 *(CCP 2022)*

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et telle que $A^3 = -A$.
A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Correction
$X^3 + X = X(X^2+1)$ donc les valeurs propres complexes de A appartiennent à $\{0; i; -i\}$.
La seule valeur propre réelle possible de A est 0.
A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sauf si elle est nulle.
Si A est non nulle alors A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $\mathrm{Diag}(0, i, -i)$. On peut par exemple affirmer que la trace de A est nulle.

Exercice 28 *(CCP 2022)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $4A^2 + 3A - I_n = 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

Correction
Le discriminant du polynôme $4X^2 + 3X - 1$ vaut 25 donc ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 29 *(CCP 2022)*

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^3 - 2M^2 + M = 0$.
Combien M peut-elle avoir de valeurs propres ?

Correction
Le polynôme $X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$ annule M donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0; 1\}$.
D'après d'Alembert-Gauss, χ_M étant unitaire de degré n, $\chi_M = X^\alpha (X-1)^\beta$ avec $\alpha + \beta = n$
α ou $\beta > 0$ donc M a au moins une valeur propre dans $\mathbb{K}$.
M peut avoir une seule valeur propre, c'est le cas de la matrice nulle ou de I_n par exemple.
Si $n = 1$, M ne peut pas avoir deux valeurs propres.
On suppose $n \geq 2$.
Soit $M = \mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$ alors $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et M a deux valeurs propres.

Exercice 30 *(Mines 2014)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_n = 0$.
Déterminer le déterminant et la trace de A.

Correction
Les racines du polynôme $1 + X + X^2$ sont j et $\overline{j} = j^2$.
Les valeurs propres de A sont j et $\overline{j}$ avec la même multiplicité α. n doit donc être pair si A existe.
$\det(A) = j^\alpha \, \overline{j}^\alpha = (j\,\overline{j})^\alpha = 1$
$\mathrm{tr}(A) = \alpha\,(j + \overline{j}) = -\alpha = -\dfrac{n}{2}$

Exercice 31 *(Centrale 2014)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3\,A - 4\,I_n = 0$.
Vérifier que A est inversible et donner le signe de son déterminant.

Correction
$A(A^2 - 3\,I_n) = 4\,I_n$ permet de montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{4}A^2 - \dfrac{3}{4}I_n$.
Soit $P(X) = X^3 - 3\,X - 4$.
$P'(X) = 3(X^2 - 1)$.
P croît de $-\infty$ à $P(-1) = -2$, puis décroît de $P(-1) = -2$ à $P(1) = -6$ et enfin croît de $P(1) = -6$ à $+\infty$.
Les racines de P sont $r_1 > 1$, $r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\overline{r_2}$ simples.
On a $\det(A) = r_1^{\alpha_1}\, r_2^{\alpha_2}\, \overline{r_2}^{\alpha_3}$
A étant réelle, $\alpha_3 = \alpha_2$ et $\det(A) = r_1^{\alpha_1}\, |r_2|^{2\alpha_2} > 0$.
On peut également remarquer que χ_A ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$ qu'en $r_1 > 2$ car $P(2) = -2$.
Donc $\chi_A(-\sqrt{3})$ et $\chi_A(\sqrt{3})$ sont de même signe.
Donc $\chi_A(-\sqrt{3})\,\chi_A(\sqrt{3}) > 0$.
Mais $\det(A)\,\chi_A(-\sqrt{3})\,\chi_A(\sqrt{3}) = \det\left(A(A - \sqrt{3}I_n)(A + \sqrt{3}I_n)\right) = \det\left(A(A^2 - 3\,I_n)\right) = \det(4I_n) = 4^n > 0$ donc le déterminant de A est strictement positif.

Exercice 32

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant chacune une seule valeur propre. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Correction
On note λ l'unique valeur propre de A et μ l'unique valeur propre de B.
χ_A est unitaire de degré n.
Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, χ_A est scindé.
Par conséquent : $\chi_A = (X-\lambda)^n$.
De même $\chi_B = (X-\mu)^n$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C}\ \chi_M(x) &= \det(xI_{2n} - M) = \begin{vmatrix} xI_n - A & -C \\ 0 & xI_n - B \end{vmatrix} \\ &= \det(xI_n - A) \times \det(xI_n - B) = \chi_A(x)\chi_B(x) \\ &= (x-\lambda)^n (x-\mu)^n \end{aligned}$$

Donc $\chi_M = (X-\lambda)^n (X-\mu)^n$.
D'après le cours :
M diagonalisable $\iff \prod_{\nu \in \mathrm{Sp}(M)} (X-\nu)$ annule M.
On est amené à distinguer deux cas :

- **Premier cas :** $\lambda = \mu$
  $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda\}$ donc :

$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable} &\iff X - \lambda \text{ annule } M \\ &\iff M = \lambda I_{2n} \\ &\iff \begin{cases} A = B = \lambda I_n \\ C = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Deuxième cas :** $\lambda \neq \mu$
  $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda; \mu\}$ donc :

$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable} &\iff (X-\lambda)(X-\mu) \text{ annule } M \\ &\iff (M - \lambda I_{2n})(M - \mu I_{2n}) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & C \\ 0 & B - \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \mu I_n & C \\ 0 & B - \mu I_n \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} (A-\lambda I_n)(A-\mu I_n) & (A-\lambda I_n)C + C(B-\mu I_n) \\ 0 & (B-\lambda I_n)(B-\mu I_n) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (A-\lambda I_n)(A-\mu I_n) = 0 \\ (A-\lambda I_n)C + C(B-\mu I_n) = 0 \\ (B-\lambda I_n)(B-\mu I_n) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  μ n'est pas valeur propre de A donc $A - \mu I_n$ est inversible.
  λ n'est pas valeur propre de B donc $B - \lambda I_n$ est inversible.

D'où :

$$M \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} A - \lambda I_n = 0 \\ (A - \lambda I_n)C + C(B - \mu I_n) = 0 \\ B - \mu I_n = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A = \lambda I_n \\ B = \mu I_n \\ C \text{ quelconque} \end{cases}$$

Exercice 33

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $P^2 = P$.
Soit $\Phi \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto MP + PM \end{cases}$.
Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: la vérification est facile, on ne demande pas de la faire.

1. Trouver un polynôme annulateur de Φ.
2. En déduire que Φ est diagonalisable.

Correction

1.

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \Phi^2(M) &= \Phi(\Phi(M)) = \Phi(M)P + P\Phi(M) \\ &= (MP + PM)P + P(MP + PM) = MP^2 + 2PMP + P^2M \\ &= MP + 2PMP + PM = \Phi(M) + 2PMP \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \Phi^3(M) &= \Phi(\Phi^2(M)) = \Phi(\Phi(M) + 2PMP) \\ &= \Phi^2(M) + 2\Phi(PMP) = \Phi(M) + 2PMP + 2\left(PMP^2 + P^2MP\right) \\ &= \Phi(M) + 6PMP \end{aligned}$$

On en déduit que $\Phi^3 - \Phi = 3\left(\Phi^2 - \Phi\right)$.
Le polynôme $Q = X^3 - X - 3(X^2 - X)$ annule Φ.

2. $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ donc Φ est diagonalisable.

7 Cayley-Hamilton

Exercice 34 *(Mines 2018, 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ telle que $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}\,(A) = 0$ et $A^n \neq 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

Correction
Grâce à la formule du rang le noyau est de dimension $n - 2 > 0$.
Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-2} = 0, \lambda_{n-1}, \lambda_n$.
Si $\lambda_{n-1} = 0$ alors à cause de la trace λ_n est nulle aussi.

0 est alors racine de multiplicité n de χ_A unitaire de degré n donc $\chi_A = X^n$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$: c'est absurde.
Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0, \lambda, -\lambda$ avec $\lambda \neq 0$.
Pour des valeurs propres simples multiplicité et dimension du sous-espace propre coïncident donc la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée.
A est bien diagonalisable.

Exercice 35 *(X 2018)*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nilpotentes telles que $A^3 = -A$ et $B^3 = -B$.
Montrer que A et B sont semblables.

Correction
Soit λ une valeur propre complexe de$A$.
$A^3 = -A$ entraîne $\lambda^3 = -\lambda$, puis $\lambda \in \{0; i; -i\}$.
A étant à coefficients réels il n'y a que deux possibilités pour la liste des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs multiplicités : $0, 0, 0$ et $0, i, -i$.
La première est à écarter : 0 étant racine triple de χ_A unitaire de degré 3, on aurait $\chi_A = X^3$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on aurait alors $A^3 = 0$: c'est absurde.
Donc la liste des valeurs propres complexes de A comptées avec leurs multiplicités est $0, i, -i$.
Partant de là deux méthodes sont possibles :

- **Première méthode**
  A est diagonalisable, semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.
  B aussi bien sûr.
  A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
  $\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$ tq $A = PBP^{-1}$
  On a donc $AP = PB$.
  $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
  On a alors $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$ mais a priori P_1 et P_2 ne sont pas inversibles.
  On a tout de même :
  $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ A(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2)B$
  $f \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \lambda \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2) \end{cases}$ est polynômiale.
  Si f était nulle sur $\mathbb{R}$ qui est infini, elle serait nulle sur $\mathbb{C}$. Or $f(i) \neq 0$ donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 + \lambda_0 P_2$ est inversible.
  On a $A = (P_1 + \lambda_0 P_2)B(P_1 + \lambda_0 P_2)^{-1}$.
- **Deuxième méthode**
  On prend v un vecteur propre de A pour la valeur propre i.
  A étant réelle, $\overline{v}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$.
  On prend e_1 un vecteur propre de A pour la valeur propre 0.
  On prend $e_2 = \Im m(v)$ et $e_3 = \Re e(v)$.
  On montre que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
  Vu son cardinal, il suffit de prouver qu'elle est libre.
  Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tq $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda e_3 = 0$.
  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 \dfrac{v - \overline{v}}{2i} + \lambda_3 \dfrac{v + \overline{v}}{2} = 0$
  $\lambda_1 e_1 + \dfrac{-i\lambda_2 + \lambda_3}{2} v + \dfrac{i\lambda_2 + \lambda_3}{2} \overline{v}$

e_1, v et $\overline{v}$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes donc $(e_1, v, \overline{v})$ est libre.
Donc $\lambda_1 = 0$ et $-i\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ avec λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.
D'où $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
$\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} Ae_3 &= A\frac{v+\overline{v}}{2} = \frac{1}{2}(Av + A\overline{v}) = \frac{1}{2}(iv - i\overline{v}) \\ &= i\frac{v-\overline{v}}{2} = i\, ie_2 = -e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ae_2 &= A\frac{v-\overline{v}}{2i} = \frac{1}{2i}(Av - A\overline{v}) = \frac{1}{2i}(iv - (-i)\overline{v}) \\ &= \frac{v+\overline{v}}{2} = e_3 \end{aligned}$$

En notant P la matrice de passage de $Can_{\mathbb{R}^3}$ à $\mathcal{B}$, on a :
$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$
A est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
B aussi bien sûr.
A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 36

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

1. Montrer qu'une matrice et sa transposée ont le même spectre.
2. Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$.
   Montrer que $UV^T \neq 0$.
3. Montrer que Φ est un endomorphisme et que $\mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) \subset \mathrm{Sp}(\Phi)$.
4. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et Y un vecteur propre associé à λ. Montrer :
   $\forall P \in \mathbb{C}[X]\ P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$
5. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(\Phi)$

Correction

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_{M^T}(\lambda) &= \det\left(\lambda I_n - M^T\right) = \det\left((\lambda I_n - M)^T\right) \\ &= \det\left(\lambda I_n - M\right) = \chi_M(\lambda) \end{aligned}$$

   Donc $\chi_M = \chi_{M^T}$.
   Or $\mathrm{Sp}(M)$ est l'ensemble des racines de χ_M et $\mathrm{Sp}(M^T)$ est l'ensemble des racines de χ_{M^T} donc M et M^T ont le même spectre.
2. U est non nulle donc il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tq $u_i \neq 0$.
   V est non nulle donc il existe $j \in [\![1; n]\!]$ tq $v_j \neq 0$.
   D'où $\left(UV^T\right)_{i,j} = u_i v_j \neq 0$.
   Donc $UV^T \neq 0$.

3. Il est clair que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $AM + MB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
La vérification de la linéarité de Φ est laissée au lecteur.
Soit λ une valeur propre de A et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.
Soit μ une valeur propre de B.
D'après la première question, c'est aussi une valeur propre de B^T.
Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre de B^T associé à la valeur propre μ.
D'après la deuxième question, la matrice (carrée à n lignes et n colonnes) $M = UV^T$ est non nulle.

$$\begin{aligned}\Phi(M) &= AM + MB = AUV^T + UV^TB = (AU)V^T + U(B^TV)^T \\ &= \lambda UV^T + U(\mu V)^T = \lambda UV^T + \mu UV^T \\ &= (\lambda + \mu)M\end{aligned}$$

Donc $\lambda + \mu \in \mathrm{Sp}(\Phi)$.
D'où : $\mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B) \subset \mathrm{Sp}(\Phi)$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k) : A^kY = Y\left(\lambda I_n - B\right)^k$
$A^0 = (\lambda I_n - B)^0 = I_n$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(k)$ varie.

$$\begin{aligned}A^{k+1}Y &= A^k(AY) = A^k\left(\Phi(Y) - YB\right) = A^k\left(\lambda Y - YB\right) \\ &= \lambda A^kY - A^kYB = A^kY\left(\lambda I_n - B\right) \\ &= Y\left(\lambda I_n - B\right)^k\left(\lambda I_n - B\right) \\ &= Y\left(\lambda I_n - B\right)^{k+1}\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ A^kY = Y\left(\lambda I_n - B\right)^k$
Les applications $P \mapsto P(A)Y$ et $P \mapsto YP(\lambda I_n - B)$ étant linéaires, on en déduit :
$\forall P \in \mathbb{C}[X]\ P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$

5. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et Y un vecteur propre associé à λ.
D'après la question précédente, $\chi_A(A)Y = Y\chi_A(\lambda I_n - B)$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $Y\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ avec $Y \neq 0$.
Donc $\chi_A(\lambda I_n - B) = 0$ ie $\chi_A(\lambda - X)$ annule B.
Donc le spectre de B est inclus dans l'ensemble des racines de $\chi_A(\lambda - X)$ ie $\{\lambda - \alpha, \alpha \in \mathrm{Sp}(A)\}$.
Comme on travaille avec des matrices complexes, B a au moins une valeur propre β et il existe α valeur propre de A telle que $\beta = \lambda - \alpha$.
On en déduit $\lambda = \alpha + \beta \in \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$.
D'où $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$ et par double inclusion :
$\mathrm{Sp}(\Phi) = \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$.

8 Diagonalisation

Exercice 37 *(X 2018)*

Soit E un $\mathbb{C}$-ev, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E tel que :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ u(e_i) = \lambda_i e_i + e_{i-1}$ (en posant $e_0 = 0$).
Donner une CNS sur les λ_i pour que u soit diagonalisable.

Correction
La matrice est triangulaire donc les valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
A cause de l'échelonnement des 1 :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geq n-1$.
Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.
La somme de leurs dimensions est égale au cardinal du spectre.
La CNS est donc : les λ_i sont deux à deux distincts.

Exercice 38 *(Centrale 2003)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
Condition sur a pour que A soit diagonalisable.

Correction

- **Première méthode**
  $AX = \lambda X \iff \begin{cases} ax_3 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_3 \end{cases}$
  Si $\lambda = 0$ alors :
  $AX = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ ax_3 = 0 \end{cases}$
  On est donc amené à envisager le cas où $a = 0$.
  Dans ce cas, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'étude est standard, A n'est pas diagonalisable.
  Dans la suite, on suppose $a \neq 0$.
  $AX = 0 \iff X = 0$
  Donc 0 n'est pas valeur propre de A.
  On peut donc prendre $\lambda \in \mathbb{C}^*$, et écrire :

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{\lambda} x_3 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{\lambda} = \dfrac{a}{\lambda^2} x_3 \\ \dfrac{a}{\lambda} x_3 + \dfrac{a}{\lambda^2} x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{\lambda} x_3 \\ x_2 = \dfrac{x_1}{\lambda} = \dfrac{a}{\lambda^2} x_3 \\ (\lambda^3 - a\lambda - a) x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda$ racine de $P = X^3 - aX - a$
  et alors $\dim(E_\lambda(A)) = 1$
  On en déduit :
  A diagonalisable sur $\mathbb{K} \iff P$ a trois racines simples dans $\mathbb{K}$.
  $P' = 3\left(X^2 - \dfrac{a}{3}\right)$

— **Cas** $a < 0$
P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
P a une racine réelle simple et deux racines complexes (non réelles) conjuguées.
A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

— **Cas** $a > 0$
On fait le tableau de variations de P.
$P\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{2a}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{a} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$
$P\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -a - \frac{2a^{3/2}}{3\sqrt{3}} < 0$

— **Premier cas :** $\sqrt{a} > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ce qui revient à supposer : $a > \frac{27}{4}$
P a trois racines réelles simples.
A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur $\mathbb{C}$)

— **Deuxième cas :** $a = \frac{27}{4}$
P a une racine réelle double : $-\frac{3}{2}$ et une racine réelle simple.
A n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

— **Troisième cas :** $0 < a < \frac{27}{4}$
P a une racine réelle simple et deux racines complexes (non réelles) conjuguées.
A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Finalement :

$$A \text{ diagonalisable sur } \mathbb{R} \iff a > \frac{27}{4}$$
$$A \text{ diagonalisable sur } \mathbb{C} \iff a \neq 0, \frac{27}{4}$$

Remarque
Si on suppose $a \in \mathbb{C}$, le cas $a = 0$ se traite de la même manière.
On montre ensuite :
A diagonalisable sur $\mathbb{C} \iff P = X^3 - aX - a$ a trois racines simples dans $\mathbb{C}$.
Mais on n'a plus l'outil des variations.
Supposons que P ait une racine double z.
$P'(z) = 3z^2 - a = 0$
D'où $0 = z^3 - az - a = z^3 - 3z^3 - 3z^2 = z^2(-2z - 3)$
Donc $z = 0$ qui donne $a = 0$ ou $z = -\frac{3}{2}$ qui donne $a = 3z^2 = \frac{27}{4}$.
Le reste est standard.

- **Deuxième méthode**

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - a - a\lambda\end{aligned}$$

Donc $\chi_A = X^3 - aX - a$.

$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ et les deux premières colonnes sont échelonnées si $\lambda \neq 0$.
D'où un premier cas : $a = 0$, de sorte que 0 est valeur propre de A.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. L'étude est standard, A n'est pas diagonalisable.
Dans la suite, on suppose $a \neq 0$.
Les valeurs propres (réelles ou complexes) de A sont non nulles (car $\chi_A(0) = -a \neq 0$) donc les deux premières colonnes de $A-\lambda I_3$ sont échelonnées si λ est une valeur propre de A. $A-\lambda I_3$ est donc de rang supérieur ou égal à 2 sans être inversible : elle est de rang 2 et le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est de dimension 1.
La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est donc égal au cardinal de son spectre et A est diagonalisable si, et seulement si, A a trois valeurs propres simples ou encore $\chi_A = X^3 - aX - a$ est scindé à racines simples.
La discussion est alors identique à celle de la première méthode.

Exercice 39 *(Centrale 2019, Mines 2022)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
CNS pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction

- **Premier cas :** $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_1, \dots, b_{n-1}) = (0, \dots, 0)$
  $A = 0$ est diagonalisable.
- **Deuxième cas :** $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ et $(b_1, \dots, b_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$
  A est de rang 1 et de trace nulle donc A n'est pas diagonalisable.
- **Troisième cas :** $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et $(b_1, \dots, b_{n-1}) = (0, \dots, 0)$
  A est de rang 1 et de trace nulle donc A n'est pas diagonalisable.
- **Quatrième cas :** $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et $(b_1, \dots, b_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$
  A est de rang 2.
  Le noyau de A est de dimension $n-2$ (n est implicitement supposé de dimension supérieure ou égale à 2).
  Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathrm{Im}\,(A)$ qu'on peut compléter en une base de $\mathbb{R}^n$.
  La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans cette base est
  $\begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k & ? & \dots & ? \\ 1 & 0 & ? & \dots & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit $\chi_A = X^{n-2}\left(X^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k\right)$

Si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k < 0$, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$: A n'est pas diagonalisable.

Si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k = 0$, 0 est valeur propre de multiplicité n et A est non nulle donc A n'est pas diagonalisable.

Si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k > 0$, alors χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ avec 0 de multiplicité $n-2$ et deux valeurs propres simples opposées.

$E_0(A)$ est de dimension $n-2$ et pour une valeur propre simple la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité donc A est diagonalisable.

On a donc dans le quatrième cas la CNS : $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k > 0$.

On remarque ensuite $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k > 0 \Longrightarrow (a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ ou $(b_1, \dots, b_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ donc :

$$A \text{ diagonalisable } \iff (a_1, \dots, a_{n-1}) = (b_1, \dots, b_{n-1}) = (0, \dots, 0) \text{ ou } \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k > 0$$

9 Matrices par blocs

Exercice 40 *(Mines 2018)*

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et écrire explicitement N.

Correction

Vue la forme de N, il s'agit de trouver un plan stable.

En écrivant le système donnant les couples propres, j'ai remarqué :

$Ae_2 = e_2 - e_4$ et $Ae_4 = 2e_2 + e_4$ (en notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$)

(e_2, e_4, e_1, e_3) est également une base de $\mathbb{R}^4$.

La matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base est : $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **sans calcul de** P^{-1}

Exercice 41 *(Mines 2018)*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^3 = 0$, $f^2 \neq 0$ et $\text{rg}(f) = 2n$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Correction
La formule du rang donne $\dim(\text{Ker}(f)) = n$.
On ne peut donc pas avoir $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
L'hypothèse $f^2 \neq 0$ est une conséquence des autres hypothèses.
La formule du rang, appliquée à la restriction de f à $\text{Im}(f)$, donne également : $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f))$.
Or $\dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f)) = n$ donc $\text{rg}(f^2) \geq 2n - n = n$.
$f^3 = 0$ donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.
On a donc avec les dimensions : $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f^2)$.
On part de $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ une base de $\text{Ker}(f)$.
Il existe $e_1, \dots, e_n$ tels que :
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $e_{2n+i} = f^2(e_i)$
Enfin pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on pose $e_{n+i} = f(e_i)$.
On montre ensuite la liberté de $(e_1, \dots, e_{3n})$:
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{3n}) \in \mathbb{K}^{3n}$ tq $\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i e_i = 0$
On applique d'abord f^2.
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $f^2(e_i) = e_{2n+i}$
$\forall i \in [\![n+1; 2n]\!]$ $f^2(e_i) = f^2(f(e_{i-n}) = f^3(e_{i-n}) = 0$
$\forall i \in [\![2n+1; 3n]\!]$ $f^2(e_i) = f(f(e_i) = f(0) = 0$
Il reste donc :
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_{2n+i} = 0$
Mais la famille $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ est libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
Il reste donc : $\sum_{i=n+1}^{3n} \lambda_i e_i = 0$
On applique f :
$\forall i \in [\![n+1; 2n]\!]$ $f(e_i) = f(f(e_{i-n})) = f^2(e_{i-n}) = e_{i-n+2n} = e_{i+n}$
$\forall i \in [\![2n+1; 3n]\!]$ $f(e_i) = 0$
Il reste donc :
$\sum_{i=n+1}^{2n} \lambda_i e_{n+i} = 0$
Mais la famille $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ est libre donc $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$
Il reste donc : $\sum_{i=2n+1}^{3n} \lambda_i e_i = 0$
Mais la famille $(e_{2n+1}, \dots, e_{3n})$ est libre donc $\lambda_{2n+1} = \dots = \lambda_{2n} = 0$
$(e_1, \dots, e_{3n})$ est donc libre. Au vu de son cardinal,c'est une base de $\mathbb{K}^{3n}$ et la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 42 *(X 2016)*

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que $\det(M) = \det(I_n + BA) = \det(I_n + AB)$.
2. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que $\det(A + BC) = \det(A) \times \det(I_n + CA^{-1}B)$.

Correction

1. En pensant à $L_2 \leftarrow L_2 - BL_1$, on intuite et on vérifie :
   $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix}$
   En pensant à $L_1 \leftarrow L_1 + AL_2$, on intuite et on vérifie :
   $\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} I_n + AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$
   Remarque
   Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
   $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -A \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} I_n & \frac{1}{\lambda}A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & -A \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - \frac{1}{\lambda}AB & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$
   On en déduit :

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{C}^* \ \chi_{BA}(\lambda) &= \det(\lambda I_n - BA) = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_n & -A \\ -B & \lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & -A \\ -B & \lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & \frac{1}{\lambda}A \\ 0 & I_n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_n & -A \\ -B & \lambda I_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} I_n - \frac{1}{\lambda}AB & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{vmatrix} = \det\left(I_n - \frac{1}{\lambda}AB\right) \times \det(\lambda I_n) = \det(\lambda I_n - AB) \\
&= \chi_{AB}(\lambda)
\end{aligned}$$

   $\mathbb{C}^*$ est infini donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. $$\begin{aligned}
\det(A + BC) &= \det\left(A\left(I_n + A^{-1}BC\right)\right) = \det(A) \times \det\left(I_n + A^{-1}BC\right) \\
&= \det(A) \times \det\left(I_n + \left(A^{-1}B\right)C\right) \\
&= \det(A) \times \det\left(I_n + C\left(A^{-1}B\right)\right) \text{ d'après la première question} \\
&= \det(A) \times \det(I_n + CA^{-1}B)
\end{aligned}$$

Exercice 43 *(Mines 2021, 2023)*

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer :
   B diagonalisable $\iff$ A diagonalisable.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 7A & -6A \\ 2A & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer :
   B diagonalisable $\iff$ A diagonalisable.

Correction

1. Plusieurs méthodes sont possibles.
   - **Recherche des couples propres**
     Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$.

$$\begin{aligned} BX = \lambda X &\iff \begin{cases} AX_2 = \lambda X_1 \\ X_1 = \lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = \lambda X_2 \\ AX_2 = \lambda^2 X_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Si λ^2 n'est pas valeur propre de A alors :

$$\begin{aligned} BX = \lambda X &\iff \begin{cases} X_1 = \lambda X_2 \\ X_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff X = 0 \end{aligned}$$

λ n'est pas valeur propre de M.
Par contre, si λ^2 est valeur propre de A :

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} X_1 = \lambda X_2 \\ X_2 \in E_{\lambda^2}(A) \end{cases}$$

et on peut choisir $X_2 \neq 0$.
Donc :
$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff \lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A)$
Il s'agit maintenant de compter soigneusement les valeurs propres de B. Pour cela, il faut préciser les notations :
Les valeurs propres deux à deux distinctes de A sont notées $\mu_1, \ldots, \mu_p$.
A étant inversible, les μ_i sont non nuls.
μ_i a donc toujours deux racines carrées distinctes : ω_i et $-\omega_i$.
Les nombres $\omega_1, -\omega_1, \omega_2, \ldots$ sont deux à deux distincts. (si $\omega_i = \pm\omega_j$ alors en élevant au carré $\mu_i = \mu_j$).
Ce sont les valeurs propres de B.
Si ω est une valeur propre de B, le sous-espace propre associé est l'ensemble des colonnes $\begin{pmatrix} \omega X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où X_2 décrit $E_{\omega^2}(A)$.
On en déduit : $\dim(E_\omega(B)) = \dim(E_{\omega^2}(A))$.
En effet $\begin{cases} E_{\omega^2}(A) \to E_\omega(B) \\ X_2 \mapsto \begin{pmatrix} \omega X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme.

On a alors :
$\sum_{\omega\in\mathrm{Sp}(B)} \dim(E_\omega(B)) = 2\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A))$

$$\begin{aligned} B \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\omega\in\mathrm{Sp}(B)} \dim(E_\omega(B)) = 2n \\ &\iff 2\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\ &\iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n \\ &\iff A \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

- **Produit tensoriel ou de Kronecker**
Cette méthode permet seulement de prouver :
A diagonalisable $\implies$ B diagonalisable
On commence par diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}^*$.
$\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M) = X^2 - a$ est sindé à racines simples ω et $-\omega$ sur $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_\omega(M) &\iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1 \\ ax_1 = \omega x_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1 \\ ax_1 = \omega^2 x_1 \end{cases} \\ &\iff x_2 = \omega x_1 \text{ car } \omega^2 = a \end{aligned}$$

Donc : $E_\omega(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}$.
De même $E_\omega(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix}$.
Donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega & -\omega \end{pmatrix}^{-1}$.
On intuite alors $B = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ \Omega & -\Omega \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix}$ avec $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Omega^2 = A$.
A est diagonalisable donc il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = Q\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Q^{-1}$.
Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ soit ω_i une racine de λ_i.
Soit $\Omega = Q\mathrm{Diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n)Q^{-1}$ de sorte que $\Omega^2 = A$.
$P\Delta = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ \Omega^2 & \Omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ A & A \end{pmatrix}$.
$BP = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ A & A \end{pmatrix}$.
De plus P est inversible :
$P \times \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Omega & -2\Omega \end{pmatrix}$: pensez à l'interprétation matricielle de l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.
En prenant le déterminant, $\det(P) = (-2)^n \det(\Omega) \neq 0$ car Ω comme A est inversible.

Donc B est semblable à Δ.
Mais Δ est diagonalisable :

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{pmatrix}\Omega & 0\\ 0 & -\Omega\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}QDiQ^{-1} & 0\\ 0 & -QDiQ^{-1}\end{pmatrix} \text{ avec } Di = \mathrm{Diag}(\omega_1,\dots,\omega_n)\\ &= \begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}Di & 0\\ 0 & -Di\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}Q^{-1} & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}Di & 0\\ 0 & -Di\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}Q & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

et finalement B est diagonalisable.

- **Recherche d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, cette méthode n'est pas au programme en 2021-2022**
  $B^2 = \begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}$
  Par conséquent, pour tout polynôme P, $P(B^2) = \begin{pmatrix}P(A) & 0\\ 0 & P(A)\end{pmatrix}$
  Supposons B diagonalisable.
  Il existe $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ diagonale telles que $B = QDQ^{-1}$.
  $B^2 = QD^2Q^{-1}$ et D^2 est diagonale donc B^2 est diagonalisable.
  Par conséquent, il existe P scindé à racines simples qui annule B^2.
  P annule aussi A donc A est diagonalisable.
  Réciproquement, on suppose A diagonalisable.
  Le polynôme, scindé à racines simples, $P = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ annule A.
  Donc le polynôme $R = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X^2-\lambda)$ annule B.
  Mais A est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A.
  Par conséquent chaque valeur propre λ de A a deux racines distinctes : ω_λ et $-\omega_\lambda$.
  $R(X) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X-\omega_\lambda)(X+\omega_\lambda)$ est scindé à racines simples (si $\lambda \neq \mu$ alors $\pm\omega_\lambda \neq \pm\omega_\mu$, élever au carré) donc B est diagonalisable.
- **Utilisation du polynôme caractéristique**
  $\forall\lambda\in\mathbb{C}\ \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda I_n & -A\\ -I_n & \lambda I_n\end{vmatrix}$
  $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*\ \begin{pmatrix}I_n & 0\\ \frac{1}{\lambda}I_n & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I_n & -A\\ -I_n & \lambda I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda I_n & -A\\ 0 & \lambda I_n - \frac{1}{\lambda}A\end{pmatrix}$
  On en déduit :
  $\forall\lambda\in\mathbb{C}^*\ \chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_n)\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{\lambda}A\right) = \det(\lambda^2 I_n - A) = \chi_A(\lambda^2)$
  $\mathbb{C}^*$ étant infini, on en déduit :
  $\chi_B(X) = \chi_A(X^2) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X^2-\lambda)^{\mathrm{mul}(\lambda,\chi_A)}$
  A étant inversible, 0 n'est pas valeur propre de A et toute valeur propre λ de A a deux racines carrées ω_λ et $-\omega_\lambda$. Ces nombres sont deux à deux distincts.

Les valeurs propres de B sont donc les nombres $\pm\omega_\lambda$ et $\text{mul}(\pm\omega_\lambda, \chi_B) = \text{mul}(\lambda, \chi_A)$.
Soit λ une valeur propre de A.

$$\begin{aligned} BX = \pm\omega_\lambda X &\iff \begin{cases} AX_2 = \pm\omega_\lambda X_1 \\ X_1 = \pm\omega_\lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = \pm\omega_\lambda X_2 \\ AX_2 = (\pm\omega_\lambda)^2 X_2 = \lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = \pm\omega_\lambda X_2 \\ X_2 \in E_\lambda(A) \end{cases} \end{aligned}$$

Le sous-espace propre de B associé à la valeur propre $\pm\omega_\lambda$ est l'ensemble des colonnes $\begin{pmatrix} \pm\omega_\lambda X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$ où X_2 décrit $E_\lambda(A)$.
On en déduit : $\dim\left(E_{\pm\omega_\lambda}(B)\right) = \dim\left(E_\lambda(A)\right)$.
En effet $\begin{cases} E_\lambda(A) \to E_{\pm\omega_\lambda}(B) \\ X_2 \mapsto \begin{pmatrix} \pm\omega_\lambda X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme.
On a alors :

$$\begin{aligned} B \text{ diagonalisable} &\iff \forall \mu \in \text{Sp}(B)\ \dim\left(E_\mu(B)\right) = \text{mul}(\mu, \chi_B) \\ &\iff \forall \lambda \in \text{Sp}(A)\ \dim\left(E_{\pm\omega_\lambda}(B)\right) = \text{mul}(\pm\omega_\lambda, \chi_B) \\ &\iff \forall \lambda \in \text{Sp}(A)\ \dim\left(E_\lambda(A)\right) = \text{mul}(\lambda, \chi_A) \\ &\iff A \text{ est diagonalisable} \end{aligned}$$

2. Ici aussi plusieurs méthodes sont possibles.
   - **Recherche de couples propres**

   Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$.

$$\begin{aligned} BX = \lambda X &\iff \begin{cases} 7AX_1 - 6AX_2 = \lambda X_1 \\ 2AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = \dfrac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \text{ car } A \text{ est inversible} \\ \dfrac{7\lambda}{2} X_2 - 6AX_2 = \dfrac{\lambda^2}{2} A^{-1} X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = -\dfrac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ 12A^2 X_2 - 7\lambda A X_2 + \lambda^2 X_2 = 0 \text{ en multipliant par } -2A \text{ qui est inversible} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_1 = -\dfrac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ (3A - \lambda I_n)(4A - \lambda I_n) X_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   — **Premier cas** $\dfrac{\lambda}{3}$ et $\dfrac{\lambda}{4}$ ne sont pas valeurs propres de A.
   $3A - \lambda I_n$ et $4A - \lambda I_n$ sont inversibles donc :
   $BX = \lambda X \iff \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \iff X = 0$
   λ n'est pas valeur propre de B.

— **Deuxième cas** $\frac{\lambda}{3}$ est valeur propre de A et $\frac{\lambda}{4}$ ne l'est pas.

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2}A^{-1}X_2 \\ (4A - \lambda I_n)(3A - \lambda I_n)X_2 = 0 \text{ car les deux matrices commutent} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2}A^{-1}X_2 \\ (3A - \lambda I_n)X_2 = 0 \text{ car } 4A - \lambda I_n \text{ est inversible} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2}A^{-1}X_2 \\ X_2 \in E_{\lambda/3}(A) \end{cases}$$

Donc λ est valeur propre de B et $\dim(E_\lambda(B)) = \dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right)$

— **Troisième cas** $\frac{\lambda}{4}$ est valeur propre de A et $\frac{\lambda}{3}$ ne l'est pas.
On démontre comme dans le cas précédent que λ est valeur propre de B et $\dim(E_\lambda(B)) = \dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)$

— **Quatrième cas** $\frac{\lambda}{3}$ et $\frac{\lambda}{4}$ sont valeurs propres de A

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2}A^{-1}X_2 \\ (3A - \lambda I_n)(4A - \lambda I_n)X_2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2}A^{-1}X_2 \\ (4A - \lambda I_n)X_2 \in E_{\lambda/3}(A) \end{cases}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(B - \lambda I_{2n})$ est de dimension $\dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n) \cap E_{\lambda/3}(A)\right)$
Cette dimension est strictement positive (à cause du premier terme) donc on peut déjà dire que λ est valeur propre de B.
Par ailleurs si $X \in E_{\lambda/3}(A)$ alors $AX = \frac{\lambda}{3}X$ donc :
$(4A - \lambda I_n)X = \left(\frac{4\lambda}{3} - \lambda\right)X = \frac{\lambda}{3}X$
A est inversible donc λ est non nulle et $X = \frac{3}{\lambda}(4A - \lambda I_n)X \in \mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n)$
On en déduit que $E_{\lambda/3}(A) \subset \mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n)$, ce qui entraîne $\mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n) \cap E_{\lambda/3}(A) = E_{\lambda/3}(A)$.
Finalement :
$\dim(E_\lambda(B)) = \dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right) + \dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(B)}\dim\left(E_\lambda(B)\right) &= \sum_{\lambda/3\in\mathrm{Sp}(A),\lambda/4\notin\mathrm{Sp}(A)}\dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right)+\sum_{\lambda/3\notin\mathrm{Sp}(A),\lambda/4\in\mathrm{Sp}(A)}\dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)\\ &\quad+\sum_{\lambda/3\in\mathrm{Sp}(A),\lambda/4\in\mathrm{Sp}(A)}\dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right)+\dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)\\ &= \sum_{\lambda/3\in\mathrm{Sp}(A)}\dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right)+\sum_{\lambda/4\in\mathrm{Sp}(A)}\dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)\\ &= 2\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\dim\left(E_\lambda(A)\right)\end{aligned}$$

On en déduit comme dans la première question :
B diagonalisable $\iff$ A diagonalisable

- **Produit tensoriel ou de Kronecker**
  On commence par le cas $n=1$.
  Par la technique habituelle, $B=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$.
  $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$.
  On pose alors $Q=\begin{pmatrix}3I_n&2I_n\\2I_n&I_n\end{pmatrix}$.
  On vérifie que $Q\begin{pmatrix}-In&2I_n\\2I_n&-3I_n\end{pmatrix}=I_{2n}$
  Donc Q est inversible et $Q^{-1}=\begin{pmatrix}-In&2I_n\\2I_n&-3I_n\end{pmatrix}$.
  On calcule alors $C=Q^{-1}BQ$ et on trouve $C=\begin{pmatrix}3A&0\\0&4A\end{pmatrix}$.
  C étant semblable à B :
  B diagonalisable $\iff$ C diagonalisable.
  Si C est diagonalisable alors u_C l'est aussi ainsi que les endomorphismes induits par C : on l'a prouvé dans un exercice en 2021-2022 et ce sera ensuite au programme.
  On en déduit que $3A$ (et $4A$) est diagonalisable.
  On en déduit facilement que A est diagonalisable.
  Réciproquement si A est diagonalisable, il existe $R\in GL_n(\mathbb{C})$ et $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A=RDR^{-1}$.
  $S=\begin{pmatrix}R&0\\0&R\end{pmatrix}$ est inversible et $S^{-1}=\begin{pmatrix}R^{-1}&0\\0&R^{-1}\end{pmatrix}$.
  De plus $S^{-1}CS=\begin{pmatrix}3R^{-1}AR&0\\0&4R^{-1}AR\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3D&0\\0&4D\end{pmatrix}$ est diagonale donc C est diagonalisable.
- **Recherche d'un polynôme annulateur scindé à racines simples, cette méthode n'est pas au programme en 2021-2022**
  On note $C=\begin{pmatrix}7&-6\\2&0\end{pmatrix}$.
  On montre par récurrence :

$\forall k \in \mathbb{N}\ B^k = \begin{pmatrix} a_k A^k & b_k A^k \\ c_k A^k & d_k A^k \end{pmatrix}$ où $C^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$
$\chi_C = X^2 - \operatorname{tr}(C)X + \det(C) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$
On effectue la division euclidienne de X^k par χ_C :
$\forall k \in \mathbb{N}\ X^k = Q_k(X)\chi_C + \alpha_k X + \beta_k$
On a $\begin{cases} 4^k = 4\alpha_k + \beta_k \\ 3^k = 3\alpha_k + \beta_k \end{cases}$
Donc $\alpha_k = 4^k - 3^k$ et $\beta_k = 4\,3^k - 3\,4^k$
Par Cayley-Hamilton :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}\ C^k &= (4^k - 3^k)C + (4\,3^k - 3\,4^k)I_2 = \begin{pmatrix} 7(4^k - 3^k) + 4\,3^k - 3\,4^k & -6(4^k - 3^k) \\ 2(4^k - 3^k) & 4\,3^k - 3\,4^k \end{pmatrix} \\ B^k &= \begin{pmatrix} 4^{k+1}A^k - 3^{k+1}A^k & -6\left(4^k A^k - 3^k A^k\right) \\ 2\left(4^k A^k - 3^k A^k\right) & 4\,3^k A^k - 3,4^k A^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ alors $P(B) = \begin{pmatrix} 4P(4A) - 3P(3A) & -6(P(4A) - P(3A)) \\ 2(P(4A) - P(3A)) & 4P(3A) - 3P(4A) \end{pmatrix}$.
Si B est diagonalisable, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(B) = 0$.
On a alors $P(4A) = P(3A) = 0$.
$P(3X)$ est scindé à racines simples et annule A donc A est diagonalisable.
Réciproquement, on suppose que A est diagonalisable.
$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$ annule A.
Soit $P(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - 4\lambda) \times \prod_{\substack{\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \\ \frac{3}{4}\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)}} (X - 3\lambda)$.
P est scindé à racines simples et annule $3A$ et $4A$ donc annule B.

- **Calcul du polynôme caractéristique**

$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I_n - 7A & 6A \\ -2A & \lambda I_n \end{vmatrix}$
$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*\ \begin{pmatrix} I_n & \frac{-6}{\lambda}A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda I_n - 7A & 6A \\ -2A & \lambda I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_n - 7A + \frac{12}{\lambda}A^2 & 0 \\ -2A & \lambda I_n \end{pmatrix}$
On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\ \chi_B(\lambda) &= \det\left(\lambda I_n - 7A + \frac{12}{\lambda}A^2\right)\det(\lambda I_n) = \det\left(\lambda^2 I_n - 7\lambda A + 12A^2\right) \\ &= \det((\lambda I_n - 3A)(\lambda I_n - 4A)) = 12^n \chi_A\left(\frac{\lambda}{3}\right)\chi_A\left(\frac{\lambda}{4}\right) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont les nombres λ tels que :
— $\frac{\lambda}{3}$ est valeur propre de A et $\frac{\lambda}{4}$ n'est pas valeur propre de A. Leurs multiplicités comme valeur propre de B est celle de $\frac{\lambda}{3}$ comme valeur propre de A.
— $\frac{\lambda}{4}$ est valeur propre de A et $\frac{\lambda}{3}$ n'est pas valeur propre de A. Leurs multiplicités comme valeur propre de B est celle de $\frac{\lambda}{4}$ comme valeur propre de A.

— $\frac{\lambda}{3}$ et $\frac{\lambda}{4}$ sont valeur propre de A. Leurs multiplicités comme valeur propre de B est la somme de celles de $\frac{\lambda}{3}$ et de $\frac{\lambda}{4}$ comme valeur propre de A.

— **Premier cas** $\frac{\lambda}{3}$ est valeur propre de A et $\frac{\lambda}{4}$ ne l'est pas.

$$\begin{aligned}
BX = \lambda X &\iff \begin{cases} 7AX_1 - 6AX_2 = \lambda X_1 \\ 2AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X_1 = \frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \text{ car } A \text{ est inversible} \\ \frac{7\lambda}{2} X_2 - 6AX_2 = \frac{\lambda^2}{2} A^{-1} X_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ 12A^2 X_2 - 7\lambda A X_2 + \lambda^2 X_2 = 0 \text{ en multipliant par } -2A \text{ qui est inversible} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ (4A - \lambda I_n)(3A - \lambda I_n) X_2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ (3A - \lambda I_n) X_2 = 0 \text{ car } 4A - \lambda I_n \text{ est inversible} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ X_2 \in E_{\lambda/3}(A) \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\dim\left(E_\lambda(B)\right) = \dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right)$

— **Deuxième cas** $\frac{\lambda}{4}$ est valeur propre de A et $\frac{\lambda}{3}$ ne l'est pas.
On démontre comme dans le cas précédent que $\dim\left(E_\lambda(B)\right) = \dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)$

— **Troisième cas** $\frac{\lambda}{3}$ et $\frac{\lambda}{4}$ sont valeurs propres de A

$$\begin{aligned}
BX = \lambda X &\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ (3A - \lambda I_n)(4A - \lambda I_n) X_2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X_1 = -\frac{\lambda}{2} A^{-1} X_2 \\ (4A - \lambda I_n) X_2 \in E_{\lambda/3}(A) \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(B - \lambda I_{2n})$ est de dimension $\dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n) \cap E_{\lambda/3}(A)\right)$
Si $X \in E_{\lambda/3}(A)$ alors $AX = \frac{\lambda}{3} X$ donc :
$(4A - \lambda I_n)X = \left(\frac{4\lambda}{3} - \lambda\right) X = \frac{\lambda}{3} X$
A est inversible donc λ est non nulle et $X = \frac{3}{\lambda}(4A - \lambda I_n)X \in \mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n)$
On en déduit que $E_{\lambda/3}(A) \subset \mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n)$, ce qui entraîne $\mathrm{Im}\,(4A - \lambda I_n) \cap E_{\lambda/3}(A) = E_{\lambda/3}(A)$.

Finalement :
$\dim\left(E_\lambda(B)\right) = \dim\left(E_{\lambda/3}(A)\right) + \dim\left(E_{\lambda/4}(A)\right)$

Comme on travaille dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est toujours scindé et la CNS de diagonalisabilité est l'égalité de la multiplicité et de la dimension du sous-espace propre pour chaque valeur propre.
On suppose A diagonalisable.
D'après l'étude précédente, pour chaque valeur propre de B il y a égalité entre la multiplicité et la dimension du sous-espace propre.
On suppose B diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de A.
3λ et 4λ sont valeurs propres de B.
Si $\frac{3}{4}\lambda$ n'est pas valeur propre de A alors la multiplicité de λ comme valeur propre de A est égale à celle de 3λ comme valeur propre de B et $\dim\left(E_\lambda(A)\right) = \dim\left(E_{3\lambda}(B)\right)$ donc la dimension de $\dim\left(E_\lambda(A)\right)$ est égale à la multiplicité de λ comme valeur propre de A.
Si $\frac{3}{4}\lambda$ est valeur propre de A alors la multiplicité de 3λ comme valeur propre de B est égale à la somme de la multiplicité de λ comme valeur propre de A et de la multiplicité de $\frac{3}{4}\lambda$ comme valeur propre de A.
La dimension du sous-espace propre de B associé à la valeur propre 3λ est égale à la somme des dimensions des sous-espaces propres de A associés à λ et $\frac{3}{4}\lambda$.
Mais B est diagonalisable donc la dimension du sous-espace propre de B associé à la valeur propre 3λ est égale à la multiplicité de 3λ comme valeur propre de B.
Donc $\text{mul}(\lambda, A) + \text{mul}\left(\frac{3}{4}\lambda, A\right) = \dim\left(E_\lambda(A)\right) + \dim\left(E_{3/4\lambda}(A)\right)$ avec $\text{mul}(\lambda, A) \leq \dim\left(E_\lambda(A)\right)$ et $\text{mul}\left(\frac{3}{4}\lambda, A\right) \leq \dim\left(E_{3/4\lambda}(A)\right)$.
Donc la dimension de $\dim\left(E_\lambda(A)\right)$ est égale à la multiplicité de λ comme valeur propre de A.

Exercice 44 *(X 2011, Mines 2023)*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 45 *(Mines 2015, Centrale 2018)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que si A est diagonalisable et inversible alors M l'est aussi.

Exercice 46 *(Mines 2025)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(C)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre les valeurs propres de A et les valeurs propres de B.
   De même pour les sous-espaces propres de A et de B.
2. Trouver une relation entre la dimension des sous-espaces propres de A et celle des sous-espaces propres de B.
3. Trouver une CNS sur A pour que B soit diagonalisable.

Correction

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$.

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda X_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ AX_1 = \lambda^2 X_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Si λ^2 n'est pas valeur propre de A alors :

$$\begin{aligned} MX = \lambda X &\iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ X_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff X = 0 \end{aligned}$$

λ n'est pas valeur propre de M.
Par contre, si λ^2 est valeur propre de A :

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ X_1 \in E_{\lambda^2}(A) \end{cases}$$

et on peut choisir $X_1 \neq 0$.
Donc :
$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \iff \lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A)$
Il s'agit maintenant de compter soigneusement les valeurs propres de M. Pour cela, il faut préciser les notations :
Les valeurs propres deux à deux distinctes de A sont notées $\mu_1, \ldots, \mu_p$.
Si μ_i est non nul, μ_i a donc deux racines carrées distinctes : ω_i et $-\omega_i$.
Par contre, 0 a une seule racine carrée.
Les nombres $0, \omega_1, -\omega_1, \omega_2, \ldots$ sont deux à deux distincts. (si $\omega_i = \pm\omega_j$ alors en élevant au carré $\mu_i = \mu_j$).
Ce sont les valeurs propres de M.
Si ω est une valeur propre de M, le sous–espace propre associé est l'ensemble des colonnes $\begin{pmatrix} X_1 \\ \omega X_1 \end{pmatrix}$ où X_1 décrit $E_{\omega^2}(A)$.
On en déduit : $\dim(E_\omega(M)) = \dim(E_{\omega^2}(A))$.
En effet $\begin{cases} E_{\omega^2}(A) \to E_\omega(M) \\ X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \omega X_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ est un isomorphisme.

On a alors :
$$\sum_{\omega\in\mathrm{Sp}(M)} \dim\left(E_\omega(M)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A\right)\right) + 2\sum_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \lambda\neq 0}} \dim\left(E_\lambda(A)\right)$$

$$\begin{aligned}
M \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\omega\in\mathrm{Sp}(M)} \dim\left(E_\omega(M)\right) = 2n\\
&\iff \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A\right)\right) + 2\sum_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\\ \lambda\neq 0}} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = 2n\\
&\iff 2\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A\right)\right) = 2n\\
&\iff 2\left(n - \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right)\right) = -\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A\right)\right)\\
&\iff \begin{cases} n - \sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) = 0\\ \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A\right)\right) = 0 \end{cases} \quad \text{car } \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq n\\
&\iff A \text{ est diagonalisable et inversible}
\end{aligned}$$

0 est valeur propre de M si, et seulement si, 0 est valeur propre de A
On en déduit que M est inversible si, et seulement si, A est inversible.

Autre méthode pour montrer que la diagonalisabilité de A entraîne celle de M
On commence par diagonaliser $B = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{C}^*$.
$\chi_B = X^2 - \mathrm{tr}\left(B\right)X + \det\left(B\right) = X^2 - a$ est sindé à racines simples ω et $-\omega$ sur $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} \in E_\omega(B) &\iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1\\ ax_1 = \omega x_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x_2 = \omega x_1\\ ax_1 = \omega^2 x_1\end{cases}\\
&\iff x_2 = \omega x_1 \text{ car } \omega^2 = a
\end{aligned}$$

Donc : $E_\omega(B) = \begin{pmatrix} 1\\ \omega\end{pmatrix}$.
De même $E_\omega(B) = \begin{pmatrix} 1\\ -\omega\end{pmatrix}$.
Donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ \omega & -\omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega & 0\\ 0 & -\omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1\\ \omega & -\omega\end{pmatrix}^{-1}$.
On intuite alors $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} I_n & I_n\\ \Omega & -\Omega\end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \Omega & 0\\ 0 & -\Omega\end{pmatrix}$ avec $\Omega\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Omega^2 = A$.
A est diagonalisable donc il existe $Q\in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = Q\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)Q^{-1}$.
Pour tout $i\in[\![1;n]\!]$ soit ω_i une racine de λ_i.
Soit $\Omega = Q\mathrm{Diag}(\omega_1,\ldots,\omega_n)Q^{-1}$ de sorte que $\Omega^2 = A$.

$P\Delta = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ \Omega^2 & \Omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ A & A \end{pmatrix}$.
$MP = \begin{pmatrix} \Omega & -\Omega \\ A & A \end{pmatrix}$.
De plus M est inversible :
$P \times \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \Omega & -2\Omega \end{pmatrix}$: pensez à l'interprétation matricielle de l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.
En prenant le déterminant, $\det(P) = (-2)^n \det(\Omega) \neq 0$ car Ω comme A est inversible.
Donc M est semblable à Δ.
Mais Δ est diagonalisable :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} QDiQ^{-1} & 0 \\ 0 & -QDiQ^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec } D_i = \mathrm{Diag}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \\ &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Di & 0 \\ 0 & -Di \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Di & 0 \\ 0 & -Di \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

et finalement M est diagonalisable.

10 Suites de matrices

Exercice 47

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 4I_2$ et $A \neq \pm 2I_2$.
Montrer que la suite $\left(\left(I_2 + \frac{1}{n}A\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction
$\left(\frac{A}{2}\right)^2 = I_2$ donc $\frac{1}{2}u_A$ est une symétrie.
$A \neq \pm 2I_2$ donc cette symétrie est différente de $\pm Id$.
On en déduit qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$.
On peut également dire que $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de A donc A est diagonalisable.
Le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines de $X^2 - 4$ ie $\{-2; 2\}$.
Comme on exclut les cas $A = 2I_n$ et $A = -2I_n$, le spectre de A est égal à $\{-2; 2\}$ et on retrouve l'existence de $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$.

$$I_2 + \frac{1}{n}A = P\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{2}{n} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

$$\left(I_2+\frac{1}{n}A\right)^n = P\begin{pmatrix}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n & 0\\ 0 & \left(1-\frac{2}{n}\right)^n\end{pmatrix}P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\begin{pmatrix}\mathrm{e}^2 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2}\end{pmatrix}P^{-1}$$

Exercice 48 *(Centrale 2006)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}I_n$.

1. Mq : $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists (a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$ tq $A^k = a_k I_n + b_k A + c_k A^2$

2. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$ existe et l'exprimer en fonction de I_n, A et A^2.

Correction

On montre par récurrence :
$\forall k \in \mathbb{N}\ A^k = a_k I_n + b_k A + c_k A^2$
avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \begin{cases} a_{k+1} = \dfrac{-1}{4}c_k \\ b_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{4}c_k \\ c_{k+1} = b_k + c_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\\ c_{k+1}\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\end{pmatrix} \text{ avec } B = \begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{-1}{4}\\ 1 & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \begin{pmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\end{pmatrix} = B^k\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix}$$

et il faut calculer les puissances de B.
On diagonalise B.
$\chi_B = X^3 - X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{4} = (X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)$ est scindé à racines simples donc B est diagonalisable.

$$B = QDQ^{-1} \text{ avec } Q = \begin{bmatrix}-1/4 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -3/2 & -1/2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$D^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} Q\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}Q^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3\\ 0\\ 4/3\end{bmatrix}$$

On peut aussi calculer la limite de cette façon :

$$\begin{pmatrix}a_k\\ b_k\\ c_k\end{pmatrix} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ appartient à $E_1(B)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

De plus $a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1} = a_k + b_k + c_k$ donc :

$a_k + b_k + c_k = a_0 + b_0 + c_0 = 1$ et à la limite $\lambda\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 1$

Donc $\lambda = \frac{4}{3}$, $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ et $c = \frac{4}{3}$.

De toute façon, on arrive à :

$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\frac{1}{3} I_n + \frac{4}{3} A^2$.

Exercice 49 *(CCP 2024)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $||A|| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max(\mathrm{Sp}(A))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$. Calculer $||A||$ et $\rho(A)$.
2. Montrer :
   $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ ||AB|| \le ||A||\ ||B||$.
3. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

   Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\lambda x_i| \le \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|$.

   En déduire que $\rho(A) \le ||A||$.
4. Montrer :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall k \in \mathbb{N},\ \rho(A^k) = \rho(A)^k$.
5. On suppose A diagonalisable. Montrer que $A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si $\rho(A) < 1$.

Correction

1. • Norme $||A||$:
   $$||A|| = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$$
   Pour la première ligne : $|1| + |1+i| = 1 + \sqrt{1^2+1^2} = 1 + \sqrt{2}$
   Pour la deuxième ligne : $|0| + |e^{i\theta}| = 1$
   Donc, $||A|| = \max(1+\sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}$
   • Spectre $\rho(A)$: Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.
   $$\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1-i \\ 0 & \lambda - \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \mathrm{e}^{i\theta})$$
   Donc, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \mathrm{e}^{i\theta}$. Ainsi, $\rho(A) = \max(|1|, |\mathrm{e}^{i\theta}|) = 1$

2.

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1;n]\!] \ \sum_{j=1}^{n} |(AB)_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{i,k}| \, \|B\| \right) = \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \\ &\leq \|B\| \, \|A\| \text{ indépendant de } i\end{aligned}$$

Donc $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

3. On a : $AX = \lambda X$.
Donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.
Donc pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |\lambda x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j|$.
On prend alors i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j|) = \|X\|_\infty$.
$|\lambda| \, \|X\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, \|X\|_\infty = \|X\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq \|X\|_\infty \, \|A\|$
X est un vecteur propre donc X et non nul et $\|X\|_\infty > 0$ donc :
$|\lambda| \neq \|A\|$
Comme c'est vrai pour toute valeur propre de A :
$\rho(A) \leq ||A||$

4. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc A est trigonalisable : il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ est une matrice triangulaire supérieure.
Les valeurs propres de A, comptées avec leurs multiplicités, sont les nombres $t_{1,1}, \ldots, t_{n,n}$.
$A = PTP^{-1}$ donc $A^k = PT^kP^{-1}$ et A^k est semblable à T^k. A^k a donc les mêmes valeurs propres que T^k qui se lisent directement sur sa diagonale.
Les valeurs propres de A^k, comptées avec leurs multiplicités, sont donc les nombres $t_{1,1}^k, \ldots, t_{n,n}^k$.
La fonction $x \mapsto x^k$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.

5. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de A.
On a alors $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ où les éléments diagonaux de D^k sont les puissances des valeurs propres de D donc de A.
Si $\rho(A) < 1$, alors toutes les valeurs propres de A ont un module strictement inférieur à 1. Donc tous les coefficients de la matrice diagonale D^k tendent vers 0.
On en déduit $D^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ ce qui implique que $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.
Inversement si $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$:
$\forall k \in \mathbb{N} \ \rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \left\| A^k \right\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$
On en déduit $\rho(A)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ et donc $\rho(A) < 1$ (et on pourra remarquer qu'on n'a pas besoin de supposer A diagonalisable dans ce sens).

Exercice 50 *(Ens 2024)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer pour $T \in \mathbb{R}$, $M(T) = \lim\limits_{N\to+\infty} \left(I_2 + \frac{T}{N}A\right)^N$.

Correction

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}^* \ \left(I_2 + \frac{T}{N}A\right)^N &= \left(PI_2P^{-1} + \frac{T}{N}PDP^{-1}\right)^N \\ &= \left(P\left(I_2 + \frac{T}{N}D\right)P^{-1}\right)^N \\ &= P\left(I_2 + \frac{T}{N}D\right)^N P^{-1} = P\begin{pmatrix} \left(1+\frac{T}{N}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{T}{N}\right)^N \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

Classiquement, $\left(1+\frac{T}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^T$ et $\left(1-\frac{T}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-T}$ donc :

$M(T) = P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^T & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-T} \end{pmatrix} P^{-1}$

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix} \mathrm{e}^T & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^T & \mathrm{e}^{-T} \\ \mathrm{e}^T & -\mathrm{e}^{-T} \end{pmatrix}$

$M(T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^T + \mathrm{e}^{-T} & \mathrm{e}^T - \mathrm{e}^{-T} \\ \mathrm{e}^T - \mathrm{e}^{-T} & \mathrm{e}^T + \mathrm{e}^{-T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(T) & \mathrm{sh}(T) \\ \mathrm{sh}(T) & \mathrm{ch}(T) \end{pmatrix}$

Exercice 51 *(Centrale 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A comptées sans leurs multiplicités.
On suppose que $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est libre.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.
4. 4 autres questions

Correction

1. Soit $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i A^i = 0$.

   Le polynôme $P = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i X^i$ annule A donc le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines de P.

P a donc au moins p racines deux à deux distinctes tout en étant de degré inférieur ou égal à $p-1$.
P est donc le polynôme nul et tous ses coefficients sont nuls : $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$.

2. D'après le cours, le polynôme $Q = \prod_{l=1}^{p}(X - \lambda_l)$ annule A.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
On effectue la division euclidienne de X^k par Q :
Il existe $R_k \in \mathbb{R}[X]$ et $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tels que $X^k = QR_k + P_k$
$A^k = Q(A)R_k(A) + P_k(A) = P_k(A)$
3. On complète la famille $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ en une base $(I_n, A, \ldots, A^{p-1}, M_1, \ldots, M_{n^2-p})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les coordonnées de L sont les limites des coordonnées des matrices A^k.
Comme les $n^2 - p$ dernières coordonnées de ces matrices sont toutes nulles, il en est de même pour la matrice L.

Exercice 52 *(Ens 2025)*

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}) = 7$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$$

Correction
Pour tout $n \geq 1$, on pose $y_n = x_n - 1$.
$\forall n \geq 3\ 4y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = 4x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2} - 7 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et il s'agit de prouver que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
La solution générale de $4u_n + 2u_{n-1} + u_{n-2} = 0$ est de la forme $u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ mais on ne peut pas faire comme pour une relation de récurrence à 1 pas et s'inspirer de la méthode de la variation des deux constantes pour les équations différentielles qui n'est pas au programme.

- **Première méthode**
Soit $u \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*} \end{cases}$
Soit $P = 4X^2 + 2X + 1$.
On suppose que la suite $P(u)\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right)$ converge vers 0 et on veut montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
Les racines de P sont $r_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{4}$ et $r_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{4}$ donc $P = 4(X - r_1)(X - r_2)$ et la suite
$4(u - r_1 id)\left((u - r_2 id)(y)\right)$ converge vers 0.
En d'autres termes si on pose $a_n = y_{n+1} - r_2 y_n$ alors :
$a_{n+1} - r_1 a_n = y_{n+2} - (r_1 + r_2)y_{n+1} + r_1 r_2 y_n = y_{n+2} + \dfrac{1}{2}y_{n+1} + \dfrac{1}{4}y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
On va montrer que (a_n) converge vers 0 puis que (y_n) converge vers 0.
On a donc :
$\forall n \geq 1\ a_{n+1} - r_1 a_n = \epsilon_n$
avec $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Les suites vérifiant $x_{n+1} - r_1 x_n = 0$ sont les suites géométriques de raison r_1 ie les suites définies par $x_n = Cr_1^n$
On pose donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = r_1^{-n} a_n$ (penser à la variation de la constante)
On a donc :
$\forall n \geq 1\ C_{n+1} r_1^{n+1} - C_n r_1^{n+1} = \epsilon_n$
On en déduit :
$\forall n \geq 1\ C_{n+1} - C_n = r_1^{-n-1} \epsilon_n$
On en déduit :
$\forall n \geq 2\ C_n = \sum_{k=1}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) + C_1 = C_1 + \sum_{k=1}^{n-1} r_1^{-k-1} \epsilon_k$
puis :
$\forall n \geq 2\ a_n = C_1 r_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} r_1^{n-k-1} \epsilon_k$

$C_1 r_1^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il s'agit de prouver $\sum_{k=1}^{n-1} r_1^{n-k-1} \epsilon_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Soit $\epsilon > 0$.
$\exists n_0 \geq 2$ tq $\forall n \geq n_0\ |\epsilon_n| \leq \epsilon$ (car $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$)

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0 \left| \sum_{k=1}^{n-1} |r_1|^{n-k-1} \epsilon_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} |r_1|^{n-k-1} |\epsilon_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{n-k-1} |\epsilon_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n-1} |r_1|^{n-k-1} \epsilon \\
&\leq |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| + \epsilon \sum_{l=0}^{n-n_0-2} |r_1|^{n-n_0-2-l} \\
&\leq |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| + \epsilon |r_1|^{n-n_0-2} \frac{|r_1|^{-n+n_0+1} - 1}{|r_1|^{-1} - 1} \\
&\leq |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| + \frac{\epsilon}{1 - |r_1|}
\end{aligned}$$

$|r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists n_1 \geq n_0$ tq $\forall n \geq n_1\ |r_1|^n \sum_{k=1}^{n_0} |r_1|^{-k-1} |\epsilon_k| \leq \epsilon$
Donc :
$\forall n \geq n_1 \left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1-n} y_k \right| \leq \epsilon \frac{2 - |r_1|}{1 - |r_1|}$
Donc $a_n = y_{n+1} - r_2 y_n \xrightarrow[n\to]{} 0$
Dans le raisonnement précédent, on a seulement utilisé $|r_1| < 1$. Or $|r_2| < 1$ donc $y_n \xrightarrow[n\to]{} 0$

- **Deuxième méthode**
  On pose $Y_n = \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$ de sorte que $Y_{n+1} = AY_n + Z_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Z_n = \begin{pmatrix} \delta_n \\ 0 \end{pmatrix}$
  avec $\delta_n = \frac{1}{4}(4y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}\,(A)X + \det(A) = X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = (X - r_1)(X - r_2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable et :
$\exists P \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$
On a :
$Y_{n+1} = PDP^{-1}Y_n + Z_n$
Donc $P^{-1}Y_{n+1} = DP^{-1}Y_n + P^{-1}Z_n$
Si on note $P^{-1}Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $P^{-1}Z_n = \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$, on a $u_{n+1} - r_1 u_n = s_n$ et $v_{n+1} - r_2 v_n = t_n$ avec s_n et $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit comme dans la première méthode : u_n et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $P^{-1}Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $Y_n = P\,P^{-1}Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
En particulier $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

11 Sous-espaces stables

Exercice 53 *(Centrale 2015)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Correction

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 3 & \lambda + 4 & 6 \\ -2 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda + 4 & 6 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda - 8\right) + 2(3\lambda - 3) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda - 8 + 6\right) \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) \end{aligned}$$

Donc $\chi_A = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
D'après le cours, si F est un sous-espace $\mathbb{R}^3$ non réduit à $\{0\}$ et stable par u alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.
Par conséquent, F possède une base formée de vecteurs propres de u. F est la somme directe des droites engendrées par les vecteurs d'une de ses bases donc F est la somme directe d'un certain nombre de droites stables par u.
Réciproquement, une somme de sous-espaces stables étant un sous-espace stable, si F est la somme directe de droites stables alors F est stable.

Mais χ_A est scindé à racines simples donc A a trois sous-espaces propres, tous les trois de dimension 1.
Chaque sous-espace propre est donc une droite stable et il ne peut y en avoir d'autres.
F a donc $2^3 = 8$ sous-espace stable : $\{0\}$, E, ses trois sous-espaces propres et les trois plans obtenus en sommant 2 sous-espaces propres.
On peut expliciter les sous-espaces propres de A :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ -3x - 5y - 6z = 0 \\ 2x + 2y + 4z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_1(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) \iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -3x - 6y - 6z = 0 \\ 2x + 2y + 3z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ -12y - 6z = 0 \\ 6y + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases}$$

Donc $E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -3x - 3y - 6z = 0 \\ 2x + 2y + 6z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 54 *(Centrale 2016)*

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x + 2y - z = 0\}$.

1. F est-il stable par u ?
   Trouver un supplémentaire de F stable par u.
   Y a-t-il unicité ?
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n.
   Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.
   Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
   Trouver un supplémentaire de F stable par u.
   Y a-t-il unicité ?

Correction

1. Soit $(x, y, z) \in F$.
   Son image par u est (X, Y, Z) avec $X = 2x - y$, $Y = y$ et $Z = x - y + z$.
   $X + 2Y - Z = x + 2y - z = 0$ donc $(X, Y, Z) \in F$.
   F est stable par u.
   Les supplémentaires de F sont les droites de $\mathbb{R}^3$ non incluses dans F.
   Les droites stables par u sont les droites dirigées par un vecteur propre de u.
   Les valeurs propres de u sont $1, 1, 2$.
   Les sous-espaces propres de u sont :
   $E_2(u) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
   C'est une droite incluse dans F.
   $E_1(u)$ est le plan d'équation $x = y$.
   La droite engendrée par $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ convient.

   (On peut d'ailleurs voir directement sur la matrice que $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est propre ce qui permet de conclure plus rapidement.)
   La droite engendrée par $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ convient aussi, il n'y a pas unicité.

2. Soit p la dimension de F.
   Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F.
   Soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u.
   D'après le théorème de la base incomplète, on peut choisir des vecteurs de $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ pour compléter $(e_1, \dots, e_p)$ en une base de E.
   Quitte à réindexer, on peut supposer que $(e_1, \dots, e_p, \epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_n)$ est une base de E.
   $Vect(\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_n)$ convient.
   Cette méthode ne donne pas l'unicité mais donne l'existence sans supposer que F est stable.

   Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u (elles sont deux à deux distinctes par hypothèse).
   Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, soit e_i un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ_i.
   $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E : une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre et ici elle a le bon cardinal.

Soit v l'endomorphisme de F induit par u.
u est diagonalisable donc v est diagonalisable.
Le spectre de v est inclus dans celui de u.
Les sous-espaces propres de v, qui sont inclus dans ceux de u, sont de dimension 1.
Quitte à réindexer, on peut donc supposer que $\mathrm{Sp}(v) = \{\lambda_1; \ldots; \lambda_p\}$ où p est la dimension de F.
Les e_i pour i compris entre 1 et p sont alors dans F et $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.
$\mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est un supplémentaire de F stable par u.
C'est le seul, car si G est un supplémentaire de F stable par u, il est engendré comme F par certains des vecteurs e_i (à cause de sa stabilité). G étant un supplémentaire de F, cela ne peut être que par $e_{p+1}, \ldots, e_n$.