ALGEBRE LINEAIRE
PC*1
2026 - 2027
Chapitre 3 :
Matrices

Fabrice Monfront
Lycée du Parc

1 Les matrices comme structure de données

1.1 Introduction

Les matrices sont des tableaux de nombres.
Formellement, une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ peut être vue comme une application de $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.
En Python élémentaire, ie sans avoir recours à `numpy`, une matrice se code par une liste de listes.
Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ se code par `A=[[1,2],[3,4]]`.
Sont donc possibles de nombreux calculs sur les matrices mais ils ne sont pas tous mathématiquement intéressants.

1.2 Quelques définitions

- Pour n et $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne qui vaut 1.
  En d'autres termes, $E_{i,j} = (\delta_{i,k} \times \delta_{l,j})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$.
  Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées matrices élémentaires.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes ($\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $p = n$).
- Une matrice D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si, et seulement si, ses coefficients situés en dehors de la diagonale sont nuls :
  $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0$
  On appelle matrice identité et on note I_n la matrice diagonale (à n lignes et n colonnes) dont tous les coefficients diagonaux valent 1.
  On appelle matrice scalaire toute matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux.
- Une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure si, et seulement si, ses coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls :

$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$
Une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite strictement triangulaire supérieure si, et seulement si, ses coefficients situés en dessous de la diagonale et sur la diagonale sont nuls :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; i \geq j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$
Une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure si, et seulement si, ses coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; i < j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$
Une matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite strictement triangulaire inférieure si, et seulement si, ses coefficients situés au-dessus de la diagonale et sur la diagonale sont nuls :
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; i \leq j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$

1.3 Transposition

1.3.1 Définition

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On appelle transposée de A, et on note A^T la matrice à p lignes et n colonnes : $(b_{k,l})_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq l\leq n}}$ avec :
$\forall (k,l) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!] \; b_{k,l} = a_{l,k}$

1.3.2 Le code en Python

```
def Transpose(A):
    n=len(A)
    p=len(A[0])
    B=[[None for l in range(n)] for k in range(p)]
    for k in range(p):
        for l in range(n):
            B[k][l]=A[l][k]
    return B
```

1.3.3 Matrices symétriques, matrices antisymétriques

- On appelle matrice symétrique toute matrice carrée égale à sa transposée.
  On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes.
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) &\iff A^T = A \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; a_{i,j} = a_{j,i} \end{aligned}$$

- On appelle matrice antisymétrique toute matrice carrée égale à l'opposé de sa transposée.
  On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.
  Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) &\iff A^T = -A \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \; a_{j,i} = -a_{j,i} \end{aligned}$$

  Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

1.4 Trace d'une matrice carrée

1.4.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

ie : $\text{tr}(A)$ est la somme des coefficients diagonaux de la matrice A.

1.4.2 Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\text{tr}(A) = 5$
- $\text{tr}(I_n) = n$

1.4.3 Le code en Python

```
def Tr(A):
    n=len(A)
    return sum(A[i][i] for i in range(n))
```

On verra plus tard l'intérêt de cette notion.
La somme $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$ de tous les coefficients d'une matrice rectangulaire A à n lignes et p colonnes ne présente que peu d'intérêt.

1.4.4 Trace de la transposée

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\text{tr}\,(A^T) = \text{tr}\,(A)$
En effet A et A^T ont la même diagonale.

1.5 Opérations élémentaires sur les matrices

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Les opérations élémentaires sur A sont :

1.5.1 La multiplication d'une ligne par un scalaire non nul

Elle est codée par $L_i \leftarrow \lambda L_i$

```
def MulLigne(A,i,l):
    for j in range(len(A[i-1])):#attention aux conventions de Python
        A[i-1][j]*=l
```

1.5.2 La multiplication d'une colonne par un scalaire non nul

Elle est codée par $C_j \leftarrow \lambda C_j$

```
def MulColonne(A,j,l):
    for i in range(len(A)):
        A[i][j-1]*=l
```

1.5.3 L'échange de deux lignes

Elle est codée par $L_i \leftrightarrow L_j$

```
def EchangeLigne(A,i,j):
    for k in range(len(A[i-1])):
        A[i-1][k],A[j-1][k]=A[j-1][k],A[i-1][k]
```

1.5.4 L'échange de deux colonnes

Elle est codée par $C_i \leftrightarrow C_j$

```
def EchangeColonne(A,i,j):
    for k in range(len(A)):
        A[k][i-1],A[k][j-1]=A[k][j-1],A[k][i-1]
```

1.5.5 L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre

Elle est codée par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

```
def Transvection_Ligne(A,i,j,l):
    for k in range(len(A[i-1])):
        A[i-1][k]+=l*A[j-1][k]
```

1.5.6 L'ajout à une colonne d'un multiple d'une autre

Elle est codée par $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

```
def Transvection_Colonne(A,i,j,l):
    for k in range(len(A)):
        A[k][i-1]+=l*A[k][j-1]
```

1.6 Déterminant d'une matrice carrée

D'un strict point de vue algorithmique, on a :

```
def Determinant(A):
    n=len(A)
    for i in range(1,n+1):
        k=i
        while k<=n and A[k-1][i-1]==0:
            k+=1
        if k>n:
            return 0
        if k>i:
            EchangeLigne(A,i,k)
        for k in range(i+1,n+1):
            Transvection_Ligne(A,k,i,-A[k-1][i-1]/A[i-1][i-1])
    res=1
    for i in range(n):
        res*=A[i][i]
    return res
```

1.7 Rang d'une matrice

D'un strict point de vue algorithmique, on a :

```
def Rang(A):
    n=len(A)
    p=len(A[0])
    i=1
    j=1
    res=0
    while i<=n and j<=p:
        k=i
        while k<=n and A[k-1][i-1]==0:
            k+=1
        if k>n:
            j+=1
        else:
            res+=1
            if k>i:
                EchangeLigne(A,i,k)
            for k in range(i+1,n+1):
                Transvection_Ligne(A,k,i,-A[k-1][i-1]/A[i-1][i-1])
            i+=1
    return res
```

1.8 Matrices par blocs

Soient $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}^*$ et $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$.

Soient $\delta_1, \ldots, \delta_l \in \mathbb{N}^*$ et $p = \sum_{j=1}^{l} \delta_j$.

On peut découper une matrice à n lignes et p colonnes de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc}
a_{1,1} & \dots & a_{1,\delta_1} & a_{1,\delta_1+1} & \dots & a_{1,\delta_1+\delta_2} & \dots & a_{1,\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j+1} & \dots & a_{1,p} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{d_1,1} & \dots & a_{d_1,\delta_1} & a_{d_1,\delta_1+1} & \dots & a_{d_1,\delta_1+\delta_2} & \dots & a_{d_1,\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j+1} & \dots & a_{d_1,p} \\
\hline
a_{d_1+1,1} & \dots & a_{d_1+1,\delta_1} & a_{d_1+1,\delta_1+1} & \dots & a_{d_1+1,\delta_1+\delta_2} & \dots & a_{d_1+1,\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j+1} & \dots & a_{d_1+1,p} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{d_1+d_2,1} & \dots & a_{d_1+d_2,\delta_1} & a_{d_1+d_2,\delta_1+1} & \dots & a_{d_1+d_2,\delta_1+\delta_2} & \dots & a_{d_1+d_2,\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j+1} & \dots & a_{d_1+d_2,p} \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
a_{\sum_{i=1}^{p-1}d_i+1,1} & & a_{\sum_{i=1}^{p-1}d_i+1,\delta_1} & a_{\sum_{i=1}^{p-1}d_i+1,\delta_1+1} & \dots & a_{\sum_{i=1}^{p-1}d_i+1,\delta_1+\delta_2} & \vdots & a_{\sum_{i=1}^{p-1}d_i+1,\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j+1} & \dots & a_{\sum_{i=1}^{p-1}d_i+1,p} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \dots & a_{n,\delta_1} & a_{n,\delta_1+1} & \dots & a_{n,\delta_1+\delta_2} & & a_{n,\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j+1} & & a_{n,p}
\end{array}\right)$$

qu'on va écrire comme une matrice à k lignes et l colonnes $\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ où les coefficients sont des matrices et non plus des nombres.

L'extraction des blocs d'une matrice d'une part, la construction d'une matrice à partir de blocs (en nombre et tailles cohérentes) sont des opérations "faciles" à coder.

La notion de matrice par blocs a un intérêt algorithmique que nous n'étudierons pas mais présente aussi un intérêt mathématique que nous étudierons.

Si une matrice A est décomposée en blocs $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ alors sa transposée est décomposée en $A^T = \begin{pmatrix} A_{1,1}^T & \dots & A_{k,1}^T \\ \vdots & & \\ A_{1,l}^T & \dots & A_{k,l}^T \end{pmatrix}$

2 Les matrices comme objets algébriques

2.1 Opérations algébriques sur les matrices

2.1.1 Produit par un scalaire

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

La matrice λA est la matrice $(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

```
def MulScal(A,l):
    n=len(A)
```

```
    p=len(A[0])
    B=[[l*A[i][j] for j in range(p)] for i in range(n)]
    return B
```

Si une matrice A est décomposée en blocs $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ alors λA est décomposée en $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,l} \\ \vdots & & \\ \lambda A_{k,1} & \dots & \lambda A_{k,l} \end{pmatrix}$

2.1.2 Somme de matrices

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ deux matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
La matrice $A + B$ est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

```
def Somme(A,B):
    n=len(A)
    p=len(A[0])
    C=[[A[i][j]+B[i][j] for j in range(p)] for i in range(n)]
    return C
```

Si une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est décomposée en blocs $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ et si une matrice B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est décomposée en blocs $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,l} \\ \vdots & & \\ B_{k,1} & \dots & B_{k,l} \end{pmatrix}$ et si pour tout $(i,j) \in [\![1;k]\!] \times [\![1,l]\!]$ les blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ ont le même nombre de lignes et de colonnes alors $A+B$ est décomposée en $A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,l} + B_{1,l} \\ \vdots & & \\ A_{k,1} + B_{k,1} & \dots & A_{k,l} + B_{k,l} \end{pmatrix}$

2.1.3 Espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes

Soit n et $p \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ muni de la somme des matrices et du produit par un scalaire a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
De plus $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension np.
La famille $(E_{i,j})_{[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dite base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Néanmoins cette expression est ambigüe puisque l'ordre de ces matrices n'est pas fixé.

2.1.4 Produit matriciel

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$ une matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

La matrice AB est la matrice $\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

```
def Mul(A,B):
    n=len(A)
    p=len(B)
    q=len(B[0])
    C=[[sum(A[i][k]*B[k][j] for k in range(p)) for j in range(q)] for i in range(n)]
    return C
```

Si une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est décomposé en blocs $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,l} \\ \vdots & & \\ A_{k,1} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix}$ et si une matrice B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est décomposée en blocs $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,m} \\ \vdots & & \\ B_{l,1} & \dots & B_{l,m} \end{pmatrix}$ et si pour tout j compris entre 1 et l, le nombre de colonnes des blocs $A_{i,j}$, $1 \leq i \leq k$, est égal au nombre de lignes des blocs $B_{j,r}$, $1 \leq r \leq m$, alors la matrice AB se décompose en blocs par :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} A_{1,j}B_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{l} A_{1,j}B_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{l} A_{n,j}B_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{l} A_{n,j}B_{j,m} \end{pmatrix}$$

ie une fois satisfaites les conditions naturelles de taille, tout se passe comme si on multipliait deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. Subsiste néanmoins une différence : dans les produits, les blocs ne commutent pas.

2.1.5 Quelques remarques sur le produit matriciel

- Le produit matriciel n'est pas commutatif.
  Si A est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes et si B est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes alors AB est définie : c'est une matrice à 2 lignes et 4 colonnes.Par contre le produit BA n'est pas défini.
  Si A est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes et si B est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes alors AB est définie : c'est une matrice carrée à 2 lignes et 2 colonnes. Cette fois le produit BA est bien défini mais c'est une matrice carrée à 3 lignes et 3 colonnes.
  Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  AB et BA sont définies sans problème : ce sont des matrices à 2 lignes et 2 colonnes mais :
  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Comme le montre l'exemple précédent, on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\ \ (\lambda A + \mu B)\, C = \lambda AC + \mu BC$

- $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \forall C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ C(\lambda A + \mu B) = \lambda CA + \mu CB$
- $\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})\ A(BC) = (AB)C$ qu'on note donc simplement ABC.
- Si $E_{i,j}$ est une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l}$ une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

2.2 Quelques sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

2.2.1 Matrices diagonales

L'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
De plus il est stable par le produit matriciel.

2.2.2 Matrices triangulaires

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes et n colonnes est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
De plus il est stable par le produit matriciel.

L'ensemble des matrices strictement triangulaires supérieures à n lignes et n colonnes est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
De plus il est stable par le produit matriciel.

L'ensemble des matrices triangulaires inférieures à n lignes et n colonnes est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
De plus il est stable par le produit matriciel.

L'ensemble des matrices strictement triangulaires inférieures à n lignes et n colonnes est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
De plus il est stable par le produit matriciel.

2.3 Quelques applications linéaires

2.3.1 Linéarité de la transposition

L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A \mapsto A^T \end{cases}$ est linéaire.
En d'autres termes :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ (\lambda A)^T = \lambda A^T$
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2\ (A+B)^T = A^T + B^T$
De plus :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})\ (AB)^T = B^T A^T$

2.3.2 Linéarité de la trace

tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une application linéaire.

Démonstration
Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
$\lambda A + \mu B = (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j})$ donc :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\lambda A + \mu B) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B) \end{aligned}$$

Remarque : dimension du noyau de la trace
La trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\dim(\text{Ker}(\text{tr})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) - 1 = n^2 - 1$
On peut prendre comme base du noyau de la trace, les matrices $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et les matrices $E_{i,i} - E_{1,1}$ avec $i \in [\![2; n]\!]$.

Trace d'un produit
Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$.
$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

En général $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A)\text{tr}(B)$.
Exemple
Si $n \geq 2$, $\text{tr}(I_n^2) = \text{tr}(I_n) = n \neq n^2 = (\text{tr}(I_n))^2$.

Démonstration
On note $C = AB$ et $D = BA$.
C est une matrice carrée à n lignes et n colonnes, D une matrice carrée à p lignes et p colonnes.
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,i}$

$$\begin{aligned} \text{tr}(C) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{p} d_{k,k} \\ &= \text{tr}(D) \end{aligned}$$

2.4 Opérations élémentaires sur les matrices et produit matriciel

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- La multiplication d'une ligne par un scalaire, codée $L_i \leftarrow \lambda L_i$, peut s'interpréter comme la multiplication de A à gauche par la matrice $\text{Diag}(1, \ldots, \lambda, \ldots, 1)$.
- La multiplication d'une colonne par un scalaire, codée $C_j \leftarrow \lambda C_j$, peut s'interpréter comme la multiplication de A à droite par la matrice $\text{Diag}(1, \ldots, \lambda, \ldots, 1)$.
- L'échange de deux lignes, codé $L_i \leftrightarrow L_j$ peut s'interpréter comme la multiplication de A à gauche par la matrice obtenue en faisant subir la même opération à I_n.

- L'échange de deux colonnes, codé $C_i \leftrightarrow C_j$ peut s'interpréter comme la multiplication de A à droite par la matrice obtenue en faisant subir la même opération à I_n.
- L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre, codé $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, peut s'interpréter comme la multiplication de A à gauche par la matrice obtenue en faisant subir la même opération à I_n.
- L'ajout à une colonne d'un multiple d'une autre, codé $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, peut s'interpréter comme la multiplication de A à droite par la matrice obtenue en faisant subir la même opération à I_n

2.5 Matrices carrées inversibles

2.5.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
On dit que A est inversible si, et seulement si, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $AB = BA = I_n$.
On appelle groupe linéaire d'ordre n et on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dispose d'un certain nombre de CNS :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } AB = I_n \\ &\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } BA = I_n \\ &\iff \text{le système } AX = 0 \text{ n'admet que la solution nulle} \\ &\iff \text{pour toute colonne } Y, \text{ le système } AX = Y \text{ admet une unique solution} \\ &\iff \text{pour toute colonne } Y, \text{ le système } AX = Y \text{ admet au moins une solution} \end{aligned}$$

2.5.2 Inverse d'un produit

Si A et $B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.5.3 Inverse de la transposée

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

2.5.4 Inverse d'une matrice diagonale

Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale à n lignes et n colonnes.
$D \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1; n]\!]\ \lambda_i \neq 0$
On a alors $D^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

2.5.5 Inverse d'une matrice triangulaire

Soit T une matrice triangulaire n lignes et n colonnes.
$T \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \forall i \in [\![1; n]\!]\ t_{i,i} \neq 0$
T^{-1} est alors une matrice triangulaire.

2.6 Polynômes d'une matrice carrée

2.6.1 Définition

Soient $n \geq 1, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Par définition $P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k$ (avec la convention $M^0 = I_n$).

On a des propriétés similaires à celles des polynômes d'endomorphisme :

Pour tous P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout λ dans $\mathbb{K}$:

- $(P+Q)(M) = P(M) + Q(M)$
- $(\lambda P)(M) = \lambda P(M)$
- $(PQ)(M) = P(M)Q(M) = Q(M)P(M)$ (car $PQ = QP$ mais le produit n'est pas commutatif dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dès que $n \geq 2$)

2.6.2 Polynôme annulateur d'une matrice carrée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle polynôme annulateur de M tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(M) = 0$.

X 2008

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n^2}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(A) = 0$.

Correction

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 et la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n^2})$ comporte n^2+1 matrices donc elle est liée :

$\exists (a_0, \ldots, a_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ tq $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = 0$.

Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est un polynôme non nul tel que $P(A) = 0$.

3 Les matrices comme objets géométriques

3.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'application $u_M \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto MX \end{cases}$ est une application linéaire, dite canoniquement associée à M.

Usuellement, on identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^p$) et on peut considérer que l'application linéaire canoniquement associé à M est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ (avec p le nombre de colonnes de M) dans $\mathbb{K}^n$ (avec n le nombre de lignes de M).

Dans le cas particulier d'une matrice carrée, on parlera d'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.

3.2 Noyau,image et rang d'une matrice

3.2.1 Définition du noyau et de l'image d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle noyau de M le noyau de u_M ie :
$\ker(M) = \{X \in \mathbb{K}^p \text{ tq } MX = 0\}$
On appelle image de M l'image de u_M ie :
$\text{Im}\,(M) = \{Y \in \mathbb{K}^n \text{ tq } \exists X \in \mathbb{K}^p \text{ tq } MX = Y\}$
Evidemment, dans le cas d'une matrice carrée à n lignes et n colonnes, le noyau et l'image de M sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$.

3.2.2 Définition du rang d'une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle rang de M le rang de l'application linéaire qui lui est canoniquement associée ie la dimension de l'image de M.
C'est aussi le rang de la famille des vecteurs colonnes de M car la famille des vecteurs colonnes de M est une famille génératrice de l'image de M.

3.2.3 Formule du rang pour une matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$\text{rg}(M) + \dim(\ker(M)) = p$ le nombre de colonnes de la matrice.
Bien sûr, pour une matrice carrée il n'y a pas de risque de se tromper :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \text{rg}(M) + \dim(\ker(M)) = n$

3.2.4 Caractérisation de l'invisibilité d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\iff \ker(A) = \{0\} \\ &\iff \text{Im}\,(A) = \mathbb{K}^n \\ &\iff \text{rg}(A) = n \end{aligned}$$

3.2.5 Propriétés

- Le rang d'une matrice est conservé par les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes.
- Le rang d'une matrice est conservé si on la multiplie à droite ou à gauche par une matrice inversible.
- Le rang est invariant par transposition.
- Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

3.2.6 Détermination pratique du rang

L'algorithme de détermination du rang d'une matrice est codé en Python paragraphe 1.7.

3.3 Eléments propres d'une matrice carrée

3.3.1 Définitions

On appelle valeurs propres (respectivement vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre) de M les valeurs propres (respectivement vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre) de u_M.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :
$\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M) \iff$ il existe $X \in \mathbb{K}^n(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ tq $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$
Si $X \in \mathbb{K}^n(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ on a :
X vecteur propre de $M \iff X \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $MX = \lambda X$

3.3.2 Propriétés immédiates

On déduit immédiatement du cours sur les éléments propres d'un endomorphisme :

- La somme des sous-espaces propres de M est directe.
- Toute famille de vecteurs propres de M associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
- $\mathrm{Sp}(M)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(M)) \leq n$.

Remarque
Les espaces vectoriels de matrices, comme tout espace vectoriel de dimension finie, ont une topologie.
Sachant que le spectre d'une matrice carrée est fini, on peut prouver :
Tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est point adhérent à $GL_n(\mathbb{K})$ ie : toute matrice carrée est limite d'une suite de matrices inversibles.
En d'autres termes, $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible, $(A)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A.
On suppose donc que A n'est pas inversible.
A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, dont 0.
Donc :
$\exists a > 0$ tq $\forall \lambda \in [-a; a] \setminus \{0\}$ $A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
$\frac{1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0$ $\frac{1}{p} \in [-a; a] \setminus \{0\}$
On a :

i $\forall p \geq p_0$ $A - \frac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

ii $A - \frac{1}{p} I_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$

3.3.3 Valeurs propres complexes d'une matrice réelle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
M est également un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a donc deux spectres :

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists X \in \mathbb{R}^n \text{ avec } X \neq 0 \text{ et } MX = \lambda X\}$
et
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tq } \exists X \in \mathbb{C}^n \text{ avec } X \neq 0 \text{ et } MX = \lambda X\}$
Comme $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.
Il peut y avoir inclusion stricte :
$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_2) &\iff \begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -\lambda x \\ x = -\lambda^2 x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -\lambda x \\ (1+\lambda^2)x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = -\lambda x \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{car } 1 + \lambda^2 \neq 0 \\
&\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_2) = \{0\}$ donc λ n'est pas valeur propre de M et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_2) \iff \begin{cases} y = -\lambda x \\ (1+\lambda^2)x = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq \pm i$, $\lambda^2 + 1 \neq 0$ et comme ci-dessus λ n'est pas valeur propre de M.
Par contre si $\lambda = \pm i$ alors $\lambda^2 + 1 = 0$ et :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_2) \iff y = -\lambda x$$

$\mathrm{Ker}\,(M - \lambda I_2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix} \neq \{0\}$ et λ est valeur propre de M.
Finalement $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i; i\}$.

Revenons au cas général
Soit λ une valeur propre complexe non réelle de M.
$MX = \lambda X \iff \overline{MX} = \overline{\lambda X} \iff M\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$ (M réelle)
On a $\overline{\lambda}$ valeur propre de M et $E_{\overline{\lambda}}(M) = \overline{E_\lambda(M)}$.

Remarque
En général si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ ev le problème ne se pose pas : λx avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $x \in E$ n'a tout simplement pas de sens.

3.3.4 Exemple : X 2008

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.
Etudier cette matrice.

Correction
Par hypothèse $a \neq 0$, ce qui a son importance pour les simplifications.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff \begin{cases} -\lambda x + ay + a^2 z = 0 \\ 1/a\, x - \lambda y + az = 0 \\ 1/a^2\, x + 1/a\, y - \lambda z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\lambda x + ay + a^2 z = 0 \\ x - a\lambda y + a^2 z = 0 \\ x + ay - a^2 \lambda z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a(1-\lambda^2)y + a^2(1+\lambda)z = 0 & L_1 \longleftarrow L_1 + \lambda L_2 \\ x - a\lambda y + a^2 z = 0 \\ a(1+\lambda)y - a^2(1+\lambda)z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Premier cas :** $\lambda = -1$
  $AX = \lambda X \iff x + ay + a^2 z = 0$
  -1 est valeur propre de A et $\dim(E_{-1}(A)) = 2$.
- **Deuxième cas :** $\lambda \neq -1$

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff \begin{cases} x - a\lambda y + a^2 z = 0 \\ (1-\lambda)y + az = 0 \\ y - az = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - a\lambda y + a^2 z = 0 \\ y - az = 0 \\ (\lambda - 2)z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

  Si $\lambda \neq 2$ (et -1) alors :
  $AX = \lambda X \iff X = 0$
  Si $\lambda = 2$:
  $AX = \lambda X \iff \begin{cases} x = a^2 z \\ y = az \end{cases}$
  2 est valeur propre de A et $E_2(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$ si $a \in \mathbb{C}$)
$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.3.5 Utilisation d'un polynôme annulateur

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si λ est une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre associé on a : $\forall p \in \mathbb{N}\ M^p X = \lambda^p X$
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
  Pour toute valeur propre λ de M, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(M)$.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(M) = 0$.
  Le spectre de M est contenu dans l'ensemble des racines de P.

4 Les matrices comme représentation

4.1 Matrice colonne d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $x \in E$.
$\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ s'appelle matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

4.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E.
La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de cette famille de vecteurs est la matrice à n lignes et p colonnes obtenues en rangeant en colonne les coordonnées des vecteurs de la famille dans la base $\mathcal{B}$.
On a donc, si on note M cette matrice :
$\forall j \in [\![1; p]\!]\ x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} e_i$
Si on note X_j la matrice colonne des coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$, la matrice M se décompose en blocs $\left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & \dots & X_p \end{array} \right)$

4.3 Matrice d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
Soit u une application linéaire de E dans F.
On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $a_{i,j}$ est la $i$ème coordonnée dans la base $\mathcal{C}$ de $u(e_j)$:
$\forall j \in [\![1; p]\!]\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$
La $j$ième colonne de A est donc la colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{C}$.
Le rang de l'application linéaire u est égal au rang de la matrice A.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ (au départ) et de $\mathbb{K}^n$ à l'arrivée de l'application

linéaire canoniquement associée à M est la matrice M elle-même.

L'application $\begin{cases}\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4.4 Equation d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit H un hyperplan de E.
Il existe une forme linéaire non nulle φ telle que H soit le noyau de u.
On prend évidemment (1) comme base de $\mathbb{K}$.
La matrice de φ dans $\mathcal{B}$ au départ et (1) à l'arrivée est une matrice ligne : $L = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.
Si x est un vecteur de E dont la matrice colonne des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alors
$\varphi(x) = LX = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ (en identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$).
On en déduit :
$x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$
On dit que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ est l'équation de H dans la base $\mathcal{B}$. Elle est unique à un facteur multiplicatif près.

4.5 Matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit u un endomorphisme de E.
On appelle matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée.
On a donc $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et :
$\forall j \in [\![1; n]\!]\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$
Pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$ on a :
$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ de l'endomorphisme canoniquement associé à M est la matrice M elle-même.

4.6 Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\varphi_A \begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM\end{cases}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ecrire une fonction Python qui prend en entrée la matrice A et qui renvoie la matrice de φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2 donc la matrice de φ_A dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée à n^2 lignes et n^2 colonnes.
Une première difficulté apparaît : pour écrire la matrice de φ_A les vecteurs de la base doivent être repérés par un indice compris entre 1 et n^2 et non par un couple d'indices compris entre 1 et n.
La base canonique s'écrit donc $(F_k)_{1\leq k\leq n^2}$ où $F_k = E_{i,j}$ avec $k = n(i-1)+j$ où on a mis les $E_{1,j}$, puis les $E_{2,j}$... d'autres classements sont possibles.
Remarque
En python i et j varient entre 0 et $n-1$ et k entre 0 et n^2-1 donc $k = ni+j$: i est le quotient de la division euclidienne de k par n et j le reste.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :
$M = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}E_{i,j}$: le coefficient de $E_{i,j}$ dans cette écriture de M est le coefficient $m_{i,j}$ d'indice (i,j) de la matrice M.
Si on note B la matrice de φ_A dans $(F_k)_{1\leq k\leq n^2}$, on a $b_{l,k}$ qui est le coefficient de F_l dans la décomposition de $\varphi_A(F_k)$ comme combinaison linéaire de la famille $(F_s)_{1\leq s\leq n^2}$.
Or $F_k = E_{i_k,j_k}$ et $F_l = E_{i_l,,j_l}$ donc $b_{l,k}$ est le coefficient situé à l'intersection de la $i_l^{\text{ième}}$ ligne et de la $j_l^{\text{ième}}$ colonne de $\varphi_A(F_k) = \varphi_A(E_{i_k,j_k})$.
Cela se code en Python de la manière suivante :

```
1  import numpy as np
2  import numpy.linalg as alg
3
4  def matrice_phiA(A):
5      n=np.shape(A)[0]
6      N=n**2
7      Mat_phiA=np.zeros((N,N))
8      for k in range(N):
9          iK,jK=k//n,k%n
10         F_k=np.zeros((n,n))
11         F_k[iK,jK]=1
12         phiA_F_k=np.dot(A,F_k)
13         for l in range(N):
14             il,jl=l//n,l%n
15             Mat_phiA[l,k]=phiA_F_k[il,jl]
16     return (Mat_phiA)
```

4.7 Coordonnées de l'image d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit x un vecteur de E et X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
AX est la matrice colonne des coordonnées de $u(x)$ dans la base $\mathcal{C}$.

4.8 Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de ses matrices

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u$.
On a Sp (M) = Sp (u) et pour tout $\lambda \in$ Sp (u) = Sp (M) $E_\lambda(M)$ est l'ensemble des colonnes des coordonnées dans $\mathcal{B}$ des éléments de $E_\lambda(u)$.
En effet, comme mentionné dans le paragraphe précédent, si $x \in E$ et si X est la colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ alors MX est la colonne des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{B}$ donc :
$u(x) = \lambda x \iff MX = \lambda X$

4.9 Matrice de la composée de deux applications linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{D} = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de G.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit v une application linéaire de F dans G.
Soit B la matrice de v dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
BA est alors la matrice de $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.

4.10 Caractérisation des isomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
On suppose donc, **a priori**, que E et F ont la même dimension. C'est bien sûr le cas si $F = E$.
Soit u une application linéaire de E dans F.
Soit A la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
u est un isomorphisme de E sur $F \iff \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est inversible
On a alors :
$\text{Mat}_{\mathcal{C},B}(u^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u))^{-1}$

4.11 Matrices semblables

Il s'agit d'un rappel de première année.

4.11.1 Matrices de passage

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ la matrice à n lignes et n colonnes dont la $j$ième colonne est formée des coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$:
$\forall j \in [\![1; n]\!]\ f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$.
C'est aussi la matrice de id_E avec comme bases $\mathcal{C}$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée.

4.11.2 Formule de changement de base pour un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et $P_{1,2}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $A_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $A_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(u)$.
On a :

$$\boxed{A_1 = P_{1,2}A_2P_{2,1} = P_{1,2}A_2P_{1,2}^{-1}}$$

Remarque
Si x est un vecteur de E, X_1 la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$ et X_2 la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ alors $X_1 = P_{1,2}X_2$.

4.11.3 Définition

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$.

4.11.4 Condition nécessaire et suffisante

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n.
A et B semblables $\iff$ il existe $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = Mat_{\mathcal{C}}(u)$

4.11.5 Centrale 2004

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée (e_1, e_2, e_3) d'un endomorphisme u.
$u \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ X \mapsto AX \end{cases}$ en identifiant $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
La question posée revient à se demander s'il existe une base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $u(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $u(\epsilon_2) = u(\epsilon_3) = 0$.
On essaie de la construire.
On cherche le noyau de u.
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \text{Ker}\,(u) \iff x - y + 2z = 0.$
$\text{Ker}\,(u)$ est de dimension 2 ce qui est compatible.
Si on veut $u(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $u(\epsilon_2) = 0$, il faut $\epsilon_2 \in \text{Ker}\,(u) \cap \text{Im}\,(u)$.
$C_2(A) = -C_1(A)$ et $C_3(A) = 2C_1(A)$ donc $\text{Im}\,(u) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}(3e_1 + e_2 - e_3)$.
$3 - 1 - 2 = 0$ donc $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}\,(u)$.
On **POSE** $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2 - e_3$
On complète (ϵ_2) en une base de $\text{Ker}\,(u)$.

On **POSE** $\epsilon_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = e_1 + e_2$

On **POSE** $\epsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = e_1$ de sorte que $u(\epsilon_1) = \epsilon_2$

Soit $P = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

$\det(P) = 1$ donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$.

$A = PBP^{-1}$, A et B sont semblables.

4.11.6 X 99, CCP, MINES 2000, Ens 2025

Soient A et B des matrices carrées réelles, qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = PBP^{-1}$

On a donc $AP = PB$.

$P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a alors $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$ mais a priori P_1 et P_2 ne sont pas inversibles.

On a tout de même :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ A(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2)B$

$f \begin{cases}\mathbb{C} \to \mathbb{C}\\ \lambda \mapsto \det(P_1 + \lambda P_2)\end{cases}$ est polynômiale.

Si f était nulle sur $\mathbb{R}$ qui est infini, elle serait nulle sur $\mathbb{C}$. Or $f(i) \neq 0$ donc il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 + \lambda_0 P_2$ est inversible.

On a $A = (P_1 + \lambda_0 P_2)B(P_1 + \lambda_0 P_2)^{-1}$.

4.11.7 Trace de deux matrices semblables

Deux matrices semblables ont la même trace, ce qu'on peut aussi écrire :

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\ \mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$

Démonstration

C'est un classique des concours mais attention à le faire correctement.

Ne pas écrire : $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(PP^{-1}A)$.

En général : $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(PAP^{-1}) &= \mathrm{tr}(\Big((PA)P^{-1}\Big) = \mathrm{tr}\left(P^{-1}(PA)\right)\\ &= \mathrm{tr}\left((P^{-1}P)A\right) = \mathrm{tr}(I_nA)\\ &= \mathrm{tr}(A)\end{aligned}$$

Remarque

La réciproque est fausse.

Exemple
I_2 et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont la même trace mais ne sont pas semblables : elles n'ont pas le même rang.

4.11.8 Trace d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E alors $Mat_{\mathcal{B}_1}(u)$ et $Mat_{\mathcal{B}_2}(u)$ sont semblables donc elles ont la même trace.
On en déduit que $\text{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(u))$ est indépendante du choix de $\mathcal{B}$.
On appelle alors trace de u et on note $\text{tr}(u)$ le scalaire $\text{tr}(Mat_{\mathcal{B}}(u))$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

- **Propriétés**
  Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
  $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $\text{tr}(u+v) = \text{tr}(u) + \text{tr}(v)$
  $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\text{tr}(\lambda u) = \lambda \text{tr}(u)$
  $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$
  (Les deux premières propriétés signifient que tr est une forme linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K})$)
- **Exemple : trace d'un projecteur**
  Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
  Soit p un projecteur de E.
  On a $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

  Démonstration
  Si $p = 0$ ou $p = Id_E$ c'est évident.
  Sinon, dans une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}\,(p) \oplus \text{Ker}\,(p)$ la matrice de p est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où r est le rang de p.
  Donc $\text{tr}(p) = \text{tr}(I_r) = r$.

4.11.9 Matrices semblables et opérations élémentaires

On ne montre pas pas que deux matrices sont semblables avec les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue à partir de A en faisant l'opération élémentaire : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.
A et B ne sont pas semblables : elles n'ont pas la même trace.

Mines 2021
Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ & 0 & & \ddots & n-1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

1. Existe-t-il $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $N = PJP^{-1}$?
2. On pose $A = N + aI_n$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Calculez A^k.

A est-elle diagonalisable ?

Correction

1. On passe de J à N en faisant $L_i \leftarrow iL_i$ mais ce n'est pas concluant.
On passe de J à N en faisant $C_j \leftarrow (j-1)C_j$ mais ce n'est pas concluant.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique se $\mathbb{R}^n$, u_N l'endomorphisme canoniquement associé à N et u_J l'endomorphisme canoniquement associé à J.
La matrice dans $(e_1, \dots, e_n)$ de u_J est J.
On cherche une base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u_J est N.
Pour multiplier la troisième colonne par 2, on se dit qu'il suffit de multiplier le troisième vecteur de base par 2 et ainsi de suite.
La matrice de u_J dans la base $(e_1, e_2, 2e_3 \dots, (n-1)e_n)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \\ & & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & \ddots & \frac{n-1}{n-2} \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$
car pour $j \geq 4$ $u_J((j-1)e_j) = (j-1)u_J(e_j) = (j-1)e_{j-1} = \dfrac{j-1}{j-2}(j-2)e_{j-1}$

Il y a plusieurs façons de traiter l'exercice.
On peut comme dans le cours chercher une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u_J est N.
Dans la continuité du calcul précédent, on la cherche sous la forme $(a_1e_1, \dots, a_ne_n)$.
La matrice de u_J dans la base $(a_1e_1, \dots, a_ne_n)$ est $\begin{pmatrix} 0 & a_2/a_1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & a_n/a_{n-1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$
On en déduit que la matrice de u_J dans la base $(e_1, e_2, 2e_3, \dots, (n-1)!e_n)$ est N : J et N sont semblables.
Les formules de changement de base donnent :
$J = \text{Diag}(1, 1, 2, \dots, (n-1)!)N\text{Diag}(1, 1, 2, \dots, (n-1)!)^{-1}$, ce qui entraîne $N = PJP^{-1}$ avec $P = \text{Diag}(1, 1, 2, \dots, (n-1)!)^{-1} = \text{Diag}\left(1, 1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{(n-1)!}\right)$

Plus matriciellement si $D = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec les a_i tous non nuls alors :
$DMD^{-1} = \left(\dfrac{a_i}{a_j}m_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$
On en déduit que si pour tout i compris entre 1 et $n-1$, $\dfrac{a_i}{a_{i+1}} = i$ alors $DJD^{-1} = N$. Il suffit de prendre $a_i = \dfrac{1}{(i-1)!}$.

On peut traiter l'exercice différemment en utilisant les résultats classiques sur les nilpotents qui sont à la limite du programme.
Si T est une matrice strictement triangulaire supérieure à n lignes et n colonnes alors $T^n = 0$.

En effet, on montre très facilement que $\chi_T = X^n$ et on applique ensuite le théorème de Cayley-Hamilton.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^n = 0$ et $M^{n-1} \neq 0$ alors M est semblable à J.
$M^{n-1} \neq 0$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $M^{n-1}x \neq 0$.
La famille $(M^{n-1}x, \dots, x)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
Au vu de son cardinal, il suffit de montrer qu'elle est libre.
Supposons qu'elle soit liée.
$\exists(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0\}$ tq $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k M^{n-1-k}x = 0$
Soit $r = \max(\{k \in [\![0; n-1]\!] \text{ tq } \lambda_k \neq 0\})$.
On a donc :
$\sum_{k=0}^{r} \lambda_k M^{n-1-k}x = 0$
On multiplie par M^r :
$\sum_{k=0}^{r} \lambda_k M^{n-1-k+r}x = 0$
Mais si $k < r$ alors $n - 1 - k + r \geq n$ donc il reste :
$\lambda_r M^{n-1}x = 0$ avec $\lambda_r \neq 0$ et $M^{n-1}x \neq 0$.
C'est absurde donc la famille $(M^{n-1}x, \dots, x)$ est libre.
La matrice dans cette base de l'endomorphisme canoniquement associé à M est J donc M et J sont semblables.
Dans le cas de N, la rédaction peut être simplifiée : on prend directement $x = e_n$.
La famille $(N^{n-1}e_n, \dots, e_n) = ((n-1)!e_1, (n-1)!e_2, \dots, (n-1)e_{n-1}, e_n)$ se déduit de la base canonique par opérations élémentaires donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$.
La matrice dans cette base de l'endomorphisme canoniquement associé à N est J donc N et J sont semblables.
On peut expliciter une matrice P telle que $N = PJP^{-1}$:
$P = \text{Diag}\left((n-1)!, (n-1)!, \frac{(n-1)!}{2}, \dots, n-1, 1\right) = (n-1)!Q$ si on note Q la matrice obtenue dans la première méthode.
D'une manière générale, Si $B = QCQ^{-1}$, Q n'est pas unique car on a aussi $B = (\lambda Q)C(\lambda Q)^{-1}$.

2. $A = N + aI_n = DJD^{-1} + aDI_nD^{-1} = D(J + aI_n)D^{-1}$ avec $D = \text{Diag}\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{(n-1)!}\right)$
On a donc :
$\forall k \in \mathbb{N}\ A^k = D(J + aI_n)^k D^{-1}$
aI_n et J commutent donc avec le binôme de Newton :
$\forall k \in \mathbb{N}\ (J + aI_n)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} J^l$
Lorsqu'on calcule les puissances de J, la diagonale de 1 se décale vers le haut et $J^n = 0$.
$\forall k \geq n\ J^k = 0$
Si $k < n$, tous les coefficients de J sont nuls sauf ceux pour lesquels $j - i = k$ qui valent 1.
On prend la convention $\binom{k}{l} = 0$ si $l > k$ de sorte que :
$\forall k \in \mathbb{N}\ (J + aI_n)^k = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{k}{l} a^{k-l} J^l$

Le coefficient d'indice (i,j) de $(J+aI_n)^k$ est :
- 0 si $i > j$ (ie en dessous de la diagonale)
- $\binom{k}{j-i}a^{k-(j-i)}$ si $i \leq j$

Le coefficient d'indice (i,j) de $(N+aI_n)^k$ est :
- 0 si $i > j$ (ie en dessous de la diagonale)
- $\binom{k}{j-i}a^{k-(j-i)}\dfrac{(j-1)!}{(i-1)!}$ si $i \leq j$

Enfin, A est triangulaire supérieure donc on lit ses valeurs propres sur sa diagonale.
a est donc valeur propre de multiplicité n de A.
Mais $A \neq aI_n$ donc A n'est pas diagonalisable.

5 Déterminants

Le programme définit le déterminant à partir du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base :

5.1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$
- linéaire par rapport à chaque variable :
  $\forall i \in [\![1;n]\!]\ \forall (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E^{n-1}$ $\begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{cases}$
  est linéaire.
- alternée :
  Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ tel qu'il existe deux indices distincts i et j tels que $x_i = x_j$, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est nul.
- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$

On a :
$(x_1, \ldots, x_n)$ base de $E \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$

5.2 Déterminant d'une matrice carrée

5.2.1 Définition

Le déterminant d'une matrice carrée à n lignes et n colonnes est le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
det, vue comme une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est l'unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

i f est linéaire par rapport à chacune des colonnes

ii f est antisymétrique par rapport aux colonnes

iii $f(I_n) = 1$

5.2.2 Cas des matrices à deux lignes et deux colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

5.2.3 Cas des matrices à trois lignes et trois colonnes

La règle de Sarrus a été vue en Sup.

5.2.4 Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

5.2.5 Opérations élémentaires

- L'échange de deux lignes change le déterminant en son opposé.
- L'échange de deux colonnes change le déterminant en son opposé.
- La multiplication d'une ligne par λ multiplie le déterminant par λ.
- La multiplication d'une colonne par λ multiplie le déterminant par λ.
- L'ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.
- L'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

L'algorithme de Gauss permet donc de calculer le déterminant d'une matrice carrée en se ramenant au calcul d'une matrice triangulaire.
Cf une implémentation en Python au début de ce chapitre.

Remarque
Si $n \geq 2$, l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ n'est pas linéaire et plus précisément :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

5.2.6 Déterminant d'un produit

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\ \det(AB) = \det(A)\det(B)$

5.2.7 Déterminant de la transposée

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\ \det(A^T) = \det(A)$

5.2.8 Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A inversible $\iff \det(A) \neq 0$
Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Remarque
Si une matrice n'est clairement pas inversible, par exemple si elle a une rangée nulle, deux lignes colinéaires ou deux colonnes colinéaires alors son déterminant est nul.

5.3 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne

5.3.1 Mineurs

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle mineur de $a_{i,j}$ ou mineur d'indice (i, j) le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant dans A la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. On le note $\Delta_{i,j}(A)$.

5.3.2 Développement par rapport à une colonne

Théorème

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $j \in \{1; \ldots; n\}$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}(A)$.

Cette formule s'appelle développement de $\det A$ par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne. Elle ramène le calcul d'un déterminant d'ordre n à celui de l déterminants d'ordre $n-1$ où l est le nombre de $a_{k,j}, k \in \{1; \ldots; n\}$ non nuls. Elle est donc particulièrement intéressante si la $j^{\text{ème}}$ colonne contient beaucoup de 0.

Il existe un moyen pratique de déterminer $(-1)^{k+j}$.

On considère le damier : $\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & + & \ldots \\ - & + & - & + & - & \ldots & & \\ + & - & + & - & \ldots & & & \\ - & + & - & + & \ldots & & & \\ \vdots & & & & & & & \end{bmatrix}$

A l'intersection de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne on a + si $(-1)^{k+j} = 1$ et - si $(-1)^{k+j} = -1$.

5.3.3 Développement par rapport à une ligne

Théorème

Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$ $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}(A)$.

5.4 Déterminant de Vandermonde

Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ n éléments de $\mathbb{K}$.

On note $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

On va démontrer par récurrence que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \; V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

1. La propriété est vraie pour $n = 2$:
   $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \; V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$.
   C'est bon.
2. On suppose que la propriété est vraie au rang $n-1$ ($n \geq 3$).
   Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
   Si 2 des a_i sont égaux le déterminant $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ a 2 lignes égales donc il est nul.
   Mais $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = 0$ car un des facteurs est nul.
   D'où $V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

On suppose les a_i 2 à 2 distincts.

Soit $f \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x) \end{cases}$.

$$\forall x \in \mathbb{K}\ f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne.

On a :

$\forall x \in \mathbb{K}\ f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1}$

avec $\lambda_{n-1} = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \neq 0.$

On a $f(a_1) = \dots = f(a_{n-1}) = 0$.

f a donc au moins $n-1$ racines distinctes mais f est de degré $n-1$ donc :

$\forall x \in \mathbb{K}\ f(x) = \lambda_{n-1}(x - a_1) \dots (x - a_{n-1})$

D'où :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = f(a_n) = \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \right] \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Remarque

On peut alors retrouver le théorème d'interpolation de Lagrange.

Rappelons le théorème d'interpolation de Lagrange :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

Soient $b_0, \dots, b_n$ $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$.

Il existe un, et un seul, polynôme P appartenant à $\mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout i compris entre 0 et n, $P(a_i) = b_i$.

En effet, si $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$(\forall i \in [\![0; n]\!]\ P(a_i) = b_i) \iff \begin{cases} c_0 + c_1 a_0 + \dots + c_n a_0^n = b_0 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 a_n + \dots + c_n a_n^n = b_n \end{cases}$$

et ce système a une et une seule solution car son déterminant est un déterminant de Vandermonde (construit avec des nombres a_i deux à deux distincts).

5.5 Déterminant d'un endomorphisme

Il y a plusieurs façons de définir le déterminant d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

On retiendra :

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle déterminant de u et on note $\det(u)$ le scalaire $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E ($\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ étant indépendant du choix de $\mathcal{B}$).

- Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E on a $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.
- $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$

- $\forall u \in \mathcal{L}(E)\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
- Soit u un endomorphisme de E.
  u automorphisme de $E \iff \det(u) \neq 0$
  On a alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

6 Matrices par blocs, sous-espaces stables et déterminant

6.1 Base adaptée à un sous-espace vectoriel

Définition
Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie $n \geq 2$ et F un sev de E tel que $1 \leq \dim F = p < \dim E$.
On appelle base de E adaptée à F toute base de E de la forme $(e_1, \ldots, e_n)$ où $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.

Remarque
D'après le théorème de la base incomplète il existe des bases adaptées à F.
On peut aussi dire que si G est un supplémentaire de F (et il en existe car E est de dimension finie) toute base de E adaptée à la décomposition $E = F \bigoplus G$ est adaptée à F.

6.2 Sous-espaces stables et bases adaptées

Proposition
Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit F un sev de E de dimension p avec $1 \leq p < n$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à F (ie $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F).
F est stable par $u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$
ie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire par blocs.

Remarque
A est la matrice, dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F, de l'endomorphisme de F induit par u.

Démonstration
$F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $u(F) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$.
Soit $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.

$$\begin{aligned} F \text{ stable par } u &\iff \forall j \in [\![1; p]\!]\ u(e_j) \in F \\ &\iff \forall j \in [\![1; p]\!]\ \forall i \in [\![p+1; n]\!]\ m_{i,j} = 0 \\ &\iff Mat_{\mathcal{B}}(u) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque
Quelle est la signification géométrique des blocs dans le cas général ?
Soient $n \geq 2$ et $k \in \{1; \ldots; n-1\}$
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} k & n-k & \\ A & C & k \\ B & D & n-k \end{pmatrix}$

Quelle est la signification géométrique des blocs ?

Soient $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_k)$ (c'est une base de F) et $\mathcal{B}_G = (e_{k+1}, \ldots, e_n)$ (c'est une base de G).

$A = Mat_{\mathcal{B}_F}(u_{1,1})$ où $u_{1,1} \begin{cases} F \to F \\ x \mapsto p(u(x)) \end{cases}$ $\quad (u_{1,1}(\in \mathcal{L}(F)) \neq p \circ u(\in \mathcal{L}(E)))$

$D = Mat_{\mathcal{B}_G}(u_{2,2})$ où $u_{2,2} \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto q(u(x)) \end{cases}$

$B = Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(u_{2,1})$ où $u_{2,1} \begin{cases} F \to G \\ x \mapsto q(u(x)) \end{cases}$

$C = Mat_{\mathcal{B}_G, \mathcal{B}_F}(u_{1,2})$ où $u_{1,2} \begin{cases} G \to F \\ x \mapsto p(u(x)) \end{cases}$

6.3 Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème

Soient $n \geq 2$ et $p \in \{1; \ldots; n-1\}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Alors :

$$\det M = \det A . \det C$$

Démonstration

$\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

Donc $\det(M) = \begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix}$

On calcule $\begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{vmatrix}$ en développant p fois par rapport à la première colonne.

On trouve : $\begin{vmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C)$.

On calcule $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix}$ en développant $n-p$ fois par rapport à la dernière colonne.

On trouve $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{vmatrix} = \det(A)$.

D'où le résultat.

Remarque

On peut noter l'analogie avec le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure. On peut

d'ailleurs, par un raisonnement similaire ou en utilisant la transposition, prouver :

$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = \det A . \det C$$

6.4 Décomposition de E en somme directe de sev stables

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \geq 2$ et p un entier ≥ 2.

Soient $E_1, \ldots, E_p$ p sev de E non réduits à $\{0\}$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition (ie $(e_1, \ldots, e_{d_1})$ est une base de E_1, $(e_{d_1+1}, \ldots, e_{d_1+d_2})$ est une base de E_2 ... d_i étant la dimension de E_i).

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les p sev E_i sont tous stables par $u \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est de la forme $\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$ avec pour tout $i \in \{1; \ldots; p\}$ $A_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K})$

A_i est la matrice, dans $(e_{d_1+\cdots+d_{i-1}+1}, \ldots, e_{d_1+\cdots+d_i})$ base de E_i, de l'endomorphisme de E_i induit par u.

La démonstration est similaire à celle de 6.2.

6.5 Déterminant d'une matrice diagonale par blocs

Proposition

Soient $d_1, \ldots, d_p$ p entiers naturels non nuls.

Soit $M = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$ avec pour tout $i \in \{1; \ldots; p\}$ $A_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K})$ une matrice diagonale par blocs.

On a :

$$\det M = \prod_{i=1}^{p} \det A_i$$

Pour le démontrer on utilise 6.3 et un raisonnement par récurrence.

6.6 Remarque : supplémentaire stable

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit F un sev de E de dimension p avec $1 \leq p < n$.

On suppose que F est stable par u.

D'après ce qui précède si il existe G supplémentaire de F qui est stable par u alors dans une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Mais G peut ne pas exister.

Exemple

Soit E un plan vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $\text{Ker}\,(u) = \text{Im}\,(u) = \mathbb{K}e_1$.
Supposons que $\text{Ker}\,(u)$ ait un supplémentaire stable.
Il existe alors $e_3 \in E$ tq (e_1, e_3) soit une base de E et $Mat_{(e_1,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
$\alpha = \text{tr}\,(u) = 0$ avec la première matrice.
Donc $u = 0$: c'est absurde.

7 Polynôme caractéristique

7.1 Introduction

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\lambda \in \text{Sp}\,(M) \iff \det(\lambda I_n - M) = 0$
En effet :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}\,(M) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \text{ tq } MX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} \text{ tq } (\lambda I_n - M)\,X = 0 \\ &\iff \lambda I_n - M \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(\lambda I_n - M) = 0 \end{aligned}$$

L'équation, d'inconnue $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda I_n - M) = 0$ joue donc un rôle très important et nous allons l'étudier en détail.

7.2 Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La fonction $\begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M) \end{cases}$ est une fonction polynomiale de degré n, son coefficient dominant (ie le coefficient de λ^n) est 1, le coefficient de λ^{n-1} est $-\text{tr}\,(M)$ et le terme constant est $(-1)^n \det M$
ie : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\det(\lambda I_n - M) = \lambda^n - \text{tr}\,(M)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M$

Démonstration
Lemme
Soit $M(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont les coefficients sont constants sauf au plus $n-1$ d'entre eux qui sont des fonctions polynômiales de degré un en λ.
Alors la fonction $\begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ \lambda \mapsto \det(M(\lambda)) \end{cases}$ est polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ en λ.
Démonstration du lemme
On raisonne par récurrence sur n.
Cas $n = 1$
$M(\lambda) = (a)$ $(n - 1 = 0)$ donc $\det(M(\lambda)) = a$ qui est bien polynômiale de degré inférieur ou égal à 0 en λ.
On suppose la propriété vraie au rang n.
On se donne $M(\lambda) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice dont les coefficients sont constants sauf au plus n

d'entre eux qui sont des fonctions polynômiales de degré un en λ.
Si tous les coefficients de $M(\lambda)$ sont constants alors la fonction $\lambda \mapsto \det(M(\lambda))$ est constante et c'est bon.
Si il existe un coefficient de $M(\lambda)$ qui est polynômial de degré un en λ :

On développe par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne :
$\det(M(\lambda)) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+j}a_{k,j}(\lambda)\Delta_{k,j}(\lambda)$
Soit $k \in \{1;\dots;n+1\}$.
$\Delta_{k,j}(\lambda)$ est un déterminant à n lignes et n colonnes dont les coefficients sont constants sauf au plus $n-1$ d'entre eux (on a barré au moins $a_{i,j}(\lambda)$) qui sont des fonctions polynômiales de degré un en λ.
Donc la fonction $\lambda \mapsto \Delta_{k,j}(\lambda)$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$.
De plus la fonction $\lambda \mapsto a_{k,j}(\lambda)$ est une fonction polynômiale de degré au plus 1.
Donc la fonction $\lambda \mapsto \det(M(\lambda))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à n.

Démonstration du théorème
On raisonne par récurrence sur n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$:
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$ est polynômiale de degré n, le coefficient dominant vaut 1 et le coefficient de λ^{n-1} vaut $-\mathrm{tr}(M)$.
Cas $n = 1$
$M = (a) \quad \mathrm{tr}(M) = a$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \det(\lambda I_1 - M) = \det((\lambda - a)) = \lambda - a = \lambda - \mathrm{tr}(M)$
$\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Soit $M = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$.
On pose $N = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On développe par rapport à la dernière colonne :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \det(\lambda I_{n+1} - M) = (\lambda - a_{n+1,n+1})\det(\lambda I_n - N) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n}a_{i,n+1}\Delta_{i,n+1}(\lambda)$

$\Delta_{i,n+1}(\lambda)$, le mineur de $-a_{i,n+1}$, est un déterminant à n lignes et n colonnes dont les coefficients sont constants sauf $n-1$ d'entre eux qui sont des fonctions polynômiales de degré un en λ (on a barré $\lambda - a_{n+1,n+1}$ et $\lambda - a_{i,i}$).
Donc la fonction $\lambda \mapsto \Delta_{i,n+1}(\lambda)$ est une fonction polynômiale en λ de degré inférieur ou égal à $n-1$.
D'où :

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \det(\lambda I_{n+1} - M) &= (\lambda - a_{n+1,n+1}) \det(\lambda I_n - N) + deg \leq n-1 \\ &= (\lambda - a_{n+1,n+1})(\lambda^n - \operatorname{tr}(N)\lambda^{n-1} + deg \leq n-2) + deg \leq n-1 \\ &= \lambda^{n+1} - \lambda^n (\operatorname{tr}(N) + a_{n+1,n+1} = \operatorname{tr}(M)) + deg \leq n-1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Enfin le coefficient constant de la fonction polynômiale $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - M)$ est sa valeur en 0 donc $(-1)^n \det(M)$.

7.3 Définition du polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
D'après ce qui précède il existe un et un seul polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que pour tout λ dans $\mathbb{K}$ $P(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$.
Ce polynôme s'appelle polynôme caractéristique de M et se note χ_M.
On a donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$
$\deg(\chi_M) = n$ et $\chi_M = X^n - \operatorname{tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M$

Exemple
Si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors $\chi_M = X^2 - (a+d)X + ad - bc$

7.4 Polynôme caractéristique de deux matrices semblables

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M et N sont semblables elles ont le même polynôme caractéristique.
En d'autres termes, le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.
Remarques

- On a déjà vu que deux matrices semblables ont le même déterminant et la même trace. Vu les coefficients du polynôme caractéristique on a ici une condition nécessaire pour que deux matrices soient semblables qui est plus forte mais qui n'est pas suffisante (Cf la remarque qui suit).
- La réciproque est fausse
  On prend $n=2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
  $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{ ou } \mathbb{C})\ \chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_2 - M) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$
  Donc : $\chi_M = X^2$
  $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \chi_N(\lambda) = \det(\lambda I_2 - N) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2$
  Donc $\chi_N = X^2$ et $\chi_M = \chi_N$
  Mais $\forall Q \in GL_2(\mathbb{R})$ ou $GL_2(\mathbb{C})$ $QMQ^{-1} = 0 \neq N$

Démonstration de la proposition
On suppose que M et N sont semblables.
$\exists Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tq $N = QMQ^{-1}$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}\ Q(\lambda I_n - M)Q^{-1} &= \lambda Q I_n Q^{-1} - QMQ^{-1} \\ &= \lambda I_n - N \quad \lambda I_n - M \text{ et } \lambda I_n - N \text{ sont semblables} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_N(\lambda) &= \det(\lambda I_n - N) = \det(\lambda I_n - M) \\ &= \chi_M(\lambda) \end{aligned}$$

D'où : $\chi_M = \chi_N$ ($\mathbb{K}$ est infini)

7.5 Corollaire et définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$.
On l'appelle le polynôme caractéristique de u et on le note χ_u.
On a donc :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_u(\lambda) = \det(\lambda Id_E - u)$
$\deg(\chi_u) = n$ et $\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

7.6 Intermède probabiliste

Un élève doit calculer le polynôme caractéristique d'une matrice M à trois lignes et trois colonnes. Il lui faut donc commencer par écrire la matrice $\lambda I_3 - M$ et donc recopier chaque coefficient de M en le faisant précéder d'un signe $-$. Cet élève oublie ce signe $-$ avec une probabilité $p \in]0;1[$.
Quelle est la probabilité qu'il fasse au moins un erreur en écrivant la matrice $\lambda I_3 - M$?
Quelle est la loi du nombre d'erreurs ?
Quel est le nombre moyen d'erreurs ?

- Probabilité qu'il n'y ait pas d'erreur : $(1-p)^9$
- Probabilité qu'il y ait au moins une erreur : $1-(1-p)^9$
- Loi du nombre X d'erreurs : $\mathcal{B}(9,p)$
- $\forall k \in [\![0;9]\!]\ P(X=k) = \binom{9}{k}(1-p)^{9-k}p^k$
- $E(X) = 9p$

7.7 Polynôme caractéristique d'une matrice compagne

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & & \dots & & \alpha_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Pour calculer $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & 0 & \\ 0 & \lambda & -1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ -\alpha_0 & & \dots & & \lambda - \alpha_{p-1} \end{vmatrix}$, on fait $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \lambda^2 C_3 + \dots + \lambda^{p-1} C_p$.

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & 0 & \\ 0 & \lambda & -1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ P(\lambda) & & \dots & & \lambda - \alpha_{p-1} \end{vmatrix}$$

avec $P(X) = X^p - \alpha_{p-1}X^{p-1} - \dots - \alpha_1 X - \alpha_0$

On développe alors par rapport à la première colonne pour obtenir :

$\chi_A = P$

On peut également développer par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & 0 & \\ 0 & \lambda & -1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ -\alpha_0 & & \dots & & \lambda - \alpha_{p-1} \end{vmatrix} = (\lambda - \alpha_{p-1})\lambda^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{p+i+1}(-\alpha_i) \begin{vmatrix} A_i & 0 \\ 0 & B_i \end{vmatrix} + (-1)^{1+p}(-\alpha_0) \det B_0$$

avec $A_i = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_i(\mathbb{K})$ et $B_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \\ \lambda & -1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p-1-i}(\mathbb{K})$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_A(\lambda) &= \lambda^p - \alpha_{p-1}\lambda^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{p+i+1} \alpha_i \det(A_i) \det(B_i) + (-1)^{p+1}(-\alpha_0)(-1)^{p-1} \\ &= \lambda^p - \alpha_{p-1}\lambda^{p-1} - \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{p+i+1} \alpha_i \lambda^i (-1)^{p-i-1} - \alpha_0 \\ &= \lambda^p - \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \lambda^i \end{aligned}$$

7.8 Polynôme caractéristique et valeurs propres

7.8.1 Théorème

- Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u son polynôme caractéristique et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ valeur propre de $u \iff \chi_u(\lambda) = 0$
ie Sp (u) est l'ensemble des racines de χ_u.

- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_M son polynôme caractéristique et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  λ valeur propre de $M \iff \chi_M(\lambda) = 0$
  ie Sp (M) est l'ensemble des racines de χ_M.

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n a au plus n racines distinctes.
On retrouve :

- Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Sp (u) est un ensemble fini et Card (Sp (u))$\leq n$.
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Sp (M) est un ensemble fini et Card (Sp (M))$\leq n$.

Tout polynôme à coefficients complexes de degré supérieur ou égal à 1 a au moins une racine complexe. On en déduit :

- Soient E un $\mathbb{C}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Sp $(u) \neq \emptyset$ ie u a au moins une valeur propre (et donc au moins un vecteur propre).
  (En dimension infinie c'est faux cf)
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  Sp $(M) \neq \emptyset$ ie M a au moins une valeur propre.
  Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M a au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$ (qui peut être réelle).

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle. On en déduit :

- Soient E un $\mathbb{R}$ ev de dimension $2p+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  Sp $(u) \neq \emptyset$ ie u a au moins une valeur propre (forcément réelle).
- Soit $M \in \mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$.
  M a au moins une valeur propre réelle.
  C'est faux en dimension paire.
  Exemple
  Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  $\chi_M = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle donc M n'a pas de valeur propre réelle.
  En dimension $2p$, le polynôme caractéristique de la matrice diagonale par blocs $\text{Diag}(M, \ldots, M)$ est $(X^2+1)^p$.

7.8.2 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition

- Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u.
  On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de u.
- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de M.
  On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique de M.

Remarque
Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités.

7.8.3 Somme et produit des valeurs propres

- Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  On suppose que χ_u est scindé (ce qui est le cas en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u comptées avec leurs multiplicités.
  On a
$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(u) \\ \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = \det u \end{cases}}$$
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec leurs multiplicités.
  On a
$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(M) \\ \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = \det M \end{cases}}$$

  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de M comptées avec leurs multiplicités (dans le cas où χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, les λ_i sont réelles).
  On a
$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(M) \\ \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n = \det M \end{cases}}$$

Démonstration
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les racines (comptées avec leurs multiplicités) du polynôme scindé $\chi_u = X^n - \operatorname{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.
Donc :
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -\frac{-\operatorname{tr}(u)}{1} = \operatorname{tr}(u)$$
$$\lambda_1 \dots \lambda_n = (-1)^n \frac{(-1)^n \det u}{1} = \det u$$

7.8.4 Dimension des sous-espaces propres

Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u de multiplicité α.
Alors on a :
$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq \alpha$$

Démonstration
$\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \iff \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0\}$
Donc $\dim E_\lambda(u) = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E) \geq 1$

Soit $p = \dim E_\lambda(u)$.
Si $p = n$, $\operatorname{Ker}(u - \lambda Id_E) = E$ donc $u = \lambda Id_E$.
$\forall \mu \in \mathbb{K}\ \chi_u(\mu) = \det(\mu Id_E - \lambda Id_E) = (\mu - \lambda)^n$
Donc $\chi_u = (X - \lambda)^n$ et $\alpha = n$.
L'inégalité est vérifiée.

On suppose $1 \leq p < n$.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $E_\lambda(u)$.
$(e_1, \dots, e_p)$ étant libre, on peut la compléter en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dite adaptée à $E_\lambda(u)$.
La matrice de u dans cette base est : $\begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
Pour tout $\mu \in \mathbb{K}$:
$\det(\mu id_E - u) = \begin{vmatrix} (\mu-\lambda)I_p & -B \\ 0 & \mu I_{n-p} - C \end{vmatrix} = \det((\mu-\lambda)I_p) \times \det(\mu I_{n-p} - C) = (\mu-\lambda)^p \chi_C(\mu)$
Donc : $\chi_u(X) = (X-\lambda)^p \chi_C(X)$.
On en déduit $\alpha \geq p$.

Remarques

- Lorsque λ est une valeur propre simple de u (ie λ est une racine simple de χ_u) on a $\dim E_\lambda(u) = 1$.
- Si λ est une valeur propre multiple il peut y avoir inégalité stricte.

  Exemple
  Soit E un $\mathbb{R}$ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
  Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  $\chi_u = X^3$
  0 est valeur propre triple de u.
  $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in \text{Ker}(u) \iff x_3 = 0$
  $E_0(u) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ de dimension 2.
  On a $1 < 2 = \dim(E_0(u)) < 3 = mul(0)$.
- On a bien sûr les mêmes résultats pour les matrices.
- Ce théorème établit un lien entre une grandeur géométrique : la dimension du sous-espace propre et une grandeur algébrique : la multiplicité de la valeur propre.

7.8.5 Théorème de Cayley-Hamilton

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0$.
- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E. Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0$.

Démonstration
Il suffit de prouver :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ \chi_A(A) = 0$
Cela sera fait en plusieurs étapes :

- On montrera, après avoir étudié les matrices diagonalisables, que $\chi_A(A) = 0$ pour toute matrice diagonalisable.
- On montrera, après avoir étudié les matrices trigonalisables, que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On montrera que l'application $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Etant nulle sur une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elle sera nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemples

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  Montrer :

$A^n = 0 \iff \mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

Si $A^n = 0$ alors le polynôme X^n annule A donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de X^n à savoir $\{0\}$.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A (qui est de degré $n \geq 1$) a au moins une racine et le spectre de A est non vide donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Réciproquement, si on suppose que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, χ_A est un polynôme unitaire de degré n n'ayant que la racine 0.
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A a n racines comptées avec leurs multiplicités et 0 est valeur propre de multiplicité n de A.
On a donc $\chi_A = X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.
Remarque
Si A est à coefficients réels :
$A^n = 0 \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente :
  $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $A^p = 0$
  Montrer : $A^n = 0$.

  Le spectre complexe de A est inclus dans l'ensemble des racines de X^p : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$.
  χ_A est un polynôme unitaire de degré n. D'après d'Alembert-Gauss, il est entièrement factorisable en produit de polynômes de degré 1, de la forme $X - 0 = X$ d'après ce qui précède.
  On en déduit $\chi_A = X^n$.
  D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$.

8 Matrices diagonalisables

8.1 Définition

Une matrice carrée est dite diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale.
En d'autres termes :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M diagonalisable $\iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K})\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale tq $M = PDP^{-1}$

8.2 Lien avec les endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
On a :
u diagonalisable $\iff M$ diagonalisable.

Démonstration

$\Longrightarrow$ u est diagonalisable donc il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale, qu'on note D.
M et D représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes donc M et D sont semblables.

Plus précisément, si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, $M = PDP^{-1}$

$\Longleftarrow$ On suppose M diagonalisable.

Il existe donc P inversible et D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.

P est inversible donc c'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une nouvelle base $\mathcal{C}$.

D'après les formules de changement de base, la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ est $P^{-1}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P = P^{-1}MP = D$.

Il existe donc une base dans laquelle la matrice de u est diagonale. On en déduit que u est diagonalisable.

8.3 Remarque

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé : $u_M \begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \mapsto MX \end{cases}$.

Donc :

M diagonalisable $\Longleftrightarrow$ u_M diagonalisable.

Compte tenu du cours sur les endomorphismes diagonalisables et des définitions de 3.3, on en déduit des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité de M :

- Il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de M
- $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_\lambda(M)$

Ces deux CNS ne sont pas mentionnées dans le programme au contraire des suivantes :

8.4 CNS de diagonalisabilité d'une matrice carrée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

M diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim\left(E_\lambda(M)\right) = n$

8.5 CNS de diagonalisabilité d'une matrice carrée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable} &\iff M \text{ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples} \\ &\iff \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda) \text{ annule } M \end{aligned}$$

8.6 Démonstration du théorème de Cayley-Hamilton : première étape

Il s'agit de prouver que si M est diagonalisable alors $\chi_M(M) = 0$.

Soit donc $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.

Le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)$ annule M.

$\chi_M = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)^{\text{mul}(\lambda)}$ est un multiple de P :

$\chi_M = QP$ avec $Q = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)^{\text{mul}(\lambda)-1} \in \mathbb{K}[X]$

Donc $\chi_M(M) = Q(M)P(M) = 0$ car $P(M) = 0$.

8.7 Utilisation du polynôme caractéristique

8.7.1 Cas des endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} (i)\, \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ (ii)\, \text{Pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } u, \dim E_\lambda(u) \text{ est égale à la multiplicité de } \lambda \end{cases}$$

Démonstration

- $\Longrightarrow$
  Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u, les λ_i étant deux à deux distinctes.
  On a $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$.
  Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à cette décomposition.
  La matrice de u dans cette base est la matrice diagonale par blocs :
  $\text{Diag}\left(\lambda_1 I_{\dim(E_{\lambda_1}(u))}, \dots, \lambda_p I_{\dim(E_{\lambda_p}(u))}\right)$
  On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_u(\lambda) &= \det\left(\text{Diag}\left((\lambda-\lambda_1) I_{\dim(E_{\lambda_1}(u))}, \dots, (\lambda-\lambda_p) I_{\dim(E_{\lambda_p}(u))}\right)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{p} (\lambda-\lambda_i)^{\dim(E_{\lambda_i}(u))} \end{aligned}$$

  Donc : $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\dim(E_{\lambda_i}(u))}$.
  On en déduit :
  $\begin{cases} (i)\, \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ (ii)\, \forall i \in [\![1;p]\!]\ mul(\lambda_i) = \dim(E_{\lambda_i}(u)) \end{cases}$
- $\Longleftarrow$
  $\chi_u(X) = \prod_{\lambda \text{ racine de } \chi_u} (X-\lambda)^{mul(\lambda)}$.
  Le spectre de u est égal à l'ensemble des racines de χ_u donc :
  $\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X-\lambda)^{mul(\lambda)}$.
  Donc :
  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} mul(\lambda) = deg(\chi_u) = n = \dim E$
  On en déduit que u est diagonalisable.

8.7.2 Cas des matrices carrées

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a :

$$M \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} (i)\, \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ (ii)\, \text{Pour toute valeur propre } \lambda \text{ de } M, \dim E_\lambda(M) \text{ est égale à la multiplicité de } \lambda \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique fournit également une condition suffisante de diagonalisabilité :

8.7.3 Cas des endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si u possède n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres

sont tous de dimension 1.

Remarque
L'hypothèse "u possède n valeurs propres distinctes" est équivalente à : "χ_u est scindé à racines simples".

Démonstration
Plusieurs démonstrations sont possibles :

- u a n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on peut choisir pour chacune d'elles un vecteur propre x_i.
  D'après le chapitre précédent, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. Comme c'est une famille libre de n vecteurs de E qui est de dimension n, c'est une base de E. Elle est formée de vecteurs propres de u donc u est diagonalisable.
  La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, la dimension de E.
  Mais c'est une somme de n nombres supérieurs ou égaux à 1 donc ces nombres sont tous égaux à 1.
- u a n sous-espaces propres. Ces sous-espaces de E sont en somme directe donc la somme de leurs dimensions est inférieure ou égale à celle de l'espace ie n.
  Mais cette somme est la somme de n entiers supérieurs ou égaux à 1 donc elle est supérieure ou égale à n.
  La somme des dimensions des sous-espaces propres de u vaut donc n : u est diagonalisable.
  Comme on a une somme de n nombres supérieurs ou égaux à 1 qui vaut n, ces n nombres sont tous égaux à 1.
- χ_u est scindé et :
  $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\ 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq mul(\lambda) = 1$
  Donc :
  $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\ \dim E_\lambda(u) = 1 = mul(\lambda)$
- D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u est un polynôme annulateur de u. Or ici on le suppose scindé à racines simples donc u est diagonalisable.

8.7.4 Cas des matrices

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si M a n valeurs propres distinctes, ou ce qui revient au même si χ_M est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$, alors M est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

9 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

9.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable :

il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ A^k = P\,D^k\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Démonstration
On raisonne par récurrence sur k.
La propriété est vraie pour $k = 0$ par convention et elle est vraie pour $k = 1$ par hypothèse.
Supposons la vraie pour k.
$A^{k+1} = A^k\,A = (P\,D^k\,P^{-1})\,(P\,D\,P^{-1}) = P\,D^k\,(P^{-1}P = I_n)\,D\,P^{-1} = P\,D^{k+1}\,P^{-1}$.

9.2 Exemple (CCP)

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Correction

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -11 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -11 \\ -\lambda & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & -11 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & -11 \\ 0 & \lambda-2 & -12 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda-2 & -12 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda - 10)
\end{aligned}$$

Donc $\chi_A = X(X-5)(X+2)$
χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
On remarque que les deux premières colonnes de A sont égales.
On en déduit $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

Or $E_0(A) = \mathrm{Ker}\,(A)$ est de dimension 1 (0 est valeur propre simple) donc $E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sans calculs.
Ensuite on fait un peu de calculs pour trouver :
$E_5(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-2}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (sans qu'il soit nécessaire d'expliciter P^{-1} ou de faire un produit de matrices).
Ceci achève la diagonalisation de A.

On a alors :
$\forall n \in \boxed{\mathbb{N}^*}\ A^n = PD^nP^{-1} = P\text{Diag}(0, 5^n, (-2)^n)P^{-1}$
(attention à $0^0 = 1$)
$P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ A^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3\,5^n + 4(-2)^n & 3\,5^n + 4(-2)^n & 9\,5^n - 16(-2)^n \\ 5^n - (-2)^n & 5^n - (-2)^n & 3\,5^n + 4(-2)^n \\ 5^n - (-2)^n & 5^n - (-2)^n & 3\,5^n + 4(-2)^n \end{pmatrix}$$

Remarque :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

9.3 Application aux suites récurrentes

Soient $a_0, \ldots, a_p$ $p+1$ éléments de $\mathbb{K}$ avec a_p et $a_0 \neq 0$.
On s'intéresse à la relation de récurrence : $a_p\, u_{n+p} + \cdots + a_0\, u_n = 0$ ie on cherche toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_p\, u_{n+p} + \cdots + a_0\, u_n = 0 \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même, la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_0 u_n \tag{2}$$

où, pour tout i compris entre 0 et $p-1$, $\alpha_i = -\dfrac{a_i}{a_p}$.

On vérife facilement que $E = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient (2.1) ou (2.2)$\}$ est un $\mathbb{K}$-ev.
$L \begin{cases} E \to \mathbb{K}^p \\ (u_n) \mapsto (u_0, \ldots, u_{p-1}) \end{cases}$ est linéaire et bijective.
L est bijective car :

$$\forall (y_0, \ldots, y_{p-1}) \in \mathbb{K}^p \exists!(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_0 u_n \\ u_0 = y_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} = y_{p-1} \end{cases}$$

En d'autres termes, tout élément de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{K}^p$ a un antécédent et un seul par L dans l'ensemble de départ E.
L est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev et $\dim E = \dim \mathbb{K}^p = p$.

On introduit alors la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & & \dots & & \alpha_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

et pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ la suite $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec :

$\forall n \in \mathbb{N}\ V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$

$$\begin{aligned} u \text{ vérifie (2.1) ou (2.2)} &\iff V \text{ vérifie (2.3) : } \forall n \in \mathbb{N}\ V_{n+1} = AV_n \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ V_n = A^n V_0 \end{aligned}$$

L'intérêt n'est pas que théorique. On en reparlera en info, cf le calcul des nombres de Fibonacci, l'exponentiation rapide....

Cherchons à diagonaliser A.

- $A - \lambda I_p = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & 0 & \\ & -\lambda & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ \alpha_0 & & \dots & & \alpha_{p-1} - \lambda \end{pmatrix}$

  Les $p-1$ dernières colonnes sont échelonnées donc le rang de $A - \lambda I_p$ est supérieur ou égal à $p-1$. On en déduit que son noyau est de dimension 0 ou 1.
  Par conséquent les sous-espaces propres de A sont de dimension 1 et la somme de leurs dimensions est égale au cardinal du spectre.
  Par conséquent :
  A diagonalisable $\iff \chi_A$ est scindé à racines simples sans aucun calcul.
- On peut calculer χ_A mais ce n'est pas indispensable.
  Pour calculer χ_A, on fait $C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2 + \lambda^2 C_3 + \dots + \lambda^{p-1} C_p$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & 0 & \\ 0 & \lambda & -1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ P(\lambda) & & \dots & & \lambda - \alpha_{p-1} \end{vmatrix}$

  avec $P(X) = X^p - \alpha_{p-1}X^{p-1} - \dots - \alpha_1 X - \alpha_0$
  On développe alors par rapport à la première colonne pour obtenir :
  $\chi_A = P = \dfrac{1}{a_p}\left(a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0\right)$
  On a donc :
  $a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$ scindé à racines simples $\implies A$ diagonalisable
  On peut montrer que la réciproque est vraie avec l'argument précédent mais on n'a pas les sous-espaces propres.

- On peut aller plus loin sans utiliser le polynôme caractéristique :

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1\\ x_3 = \lambda x_2\\ \vdots\\ x_p = \lambda x_{p-1}\\ \alpha_0 x_1 + \cdots + \alpha_{p-1}x_p = \lambda x_p\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1\\ x_3 = \lambda^2 x_1\\ \vdots\\ x_p = \lambda^{p-1} x_1\\ \left(\lambda^p - \alpha_{p-1}\lambda_{p-1} - \cdots - \alpha_0\right) x_1 = 0\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \lambda^p - \alpha_{p-1}\lambda_{p-1} - \cdots - \alpha_0 = 0\\ &\iff a_p\lambda^p + \cdots + a_0 = 0\end{aligned}$$

On retrouve ce qui précède mais en plus :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\ E_\lambda(A) = \mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{p-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A \text{ diagonalisable} &\iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = p\\ &\iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} 1 = p\\ &\iff \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = p\\ &\iff a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0 \text{ scindé à racines simples}\end{aligned}$$

Supposons $a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0$ scindé à racines simples et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses racines.

$A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_p \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{p-1} & \ldots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix}$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

$$\begin{aligned} u \text{ vérifie (2.1) ou (2.2)} &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ V_n = PD^nP^{-1}V_0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = P\text{Diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n)P^{-1}V_0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = P\text{Diag}(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}\ V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n y_1 \\ \vdots \\ \lambda_p^n y_p \end{pmatrix} \\ &\implies \forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \sum_{k=1}^{p} p_{1,k} y_k \lambda_k^n \end{aligned}$$

Donc si u vérifie (2.1) ou (2.2) alors u est combinaison linéaire des suites géométriques $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_p^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc $E \subset \text{Vect}\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
On conclut avec les dimensions.

$$\boxed{E = \text{Vect}\left((\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_p^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)}$$

10 Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 *(Mines 2017)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.
Montrer que la trace de A est nulle.

Exercice 2 *(Centrale 99)*

CNS pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable ?

Exercice 3 *(CCP 2023)*

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur (a, b, c, d) pour que A soit diagonalisable.

Exercice 4 *(CCP 2024)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{rg}(A) = 2$ et $\text{tr}\,(A) = 0$.
Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^n est non nulle.

Exercice 5 *(CCP 2024)*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ et $\rho(A) = \max(\text{Sp}(A))$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & \mathrm{e}^{i\theta} \end{pmatrix}$.
   Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.
2. Montrer que :
   $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$
3. Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
   Montrer :
   $\forall i \ni [\![1; n]\!] \ |\lambda x_i| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j} x_j|$
   En déduire que $\rho(A) \leq \|A\|$.
4. Montrer :
   $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ \forall k \in \mathbb{N}\ \rho(A^k) = \rho(A)^k$
5. On suppose que A est diagonalisable.
   Montrer :
   $A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \iff \rho(A) < 1$

Exercice 6 *(Centrale maths 2 2019)*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est stochastique si et seulement si :
  (i) $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2 \ a_{i,j} \geq 0$
  (ii) $\forall i \in [\![1; n]\!] \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
- On dit que A est bistochastique si et seulement si :
  (i) $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2 \ a_{i,j} \geq 0$
  (ii) $\forall i \in [\![1; n]\!] \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$
  (iii) $\forall j \in [\![1; n]\!] \ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$
- On dit que A est strictement bistochastique si et seulement si :
  (i) $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!]^2 \ a_{i,j} > 0$
  (ii) $\forall i \in [\![1; n]\!] \ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$

$(iii)\ \forall j \in [\![1;n]\!]\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs.
   Montrer que A est bistochastique si, et seulement si, $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ est vecteur propre des matrices A et A^T pour la valeur propre 1.
2. Montrer que le produit de deux matrices strictement bistochastiques est une matrice strictement bistochastique.
3. On donne deux matrices bistochastiques, une à trois lignes et trois colonnes, une à quatre lignes et quatre colonnes.
   On demandait de faire des conjectures sur les valeurs propres des matrices stochastiques ainsi que sur leurs puissances à l'aide de l'ordinateur.
4. Démontrer la conjecture de la question 3.
   Remarque
   Il s'agit a priori de prouver que si A est stochastique alors toute valeur propre complexe de A est de module inférieur ou égal à 1.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.
   Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
   Montrer que $|x_1| = \cdots = |x_n|$ et que X est colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique.
   Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.
   Soit H le sev de $\mathbb{C}^n$ défini par :
   $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in H \iff \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$
   Montrer que H est un supplémentaire de $\mathbb{C}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ stable par u.
7. ?

Exercice 7 *(Centrale maths 2 2019)*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases}(u_0, \ldots, u_{p-1}) \in \mathbb{R}^p \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \dfrac{1}{p}\left(u_{n+p-1} + \cdots + u_n\right)\end{cases}.$$

1. Dans cette question, $p = 3$.

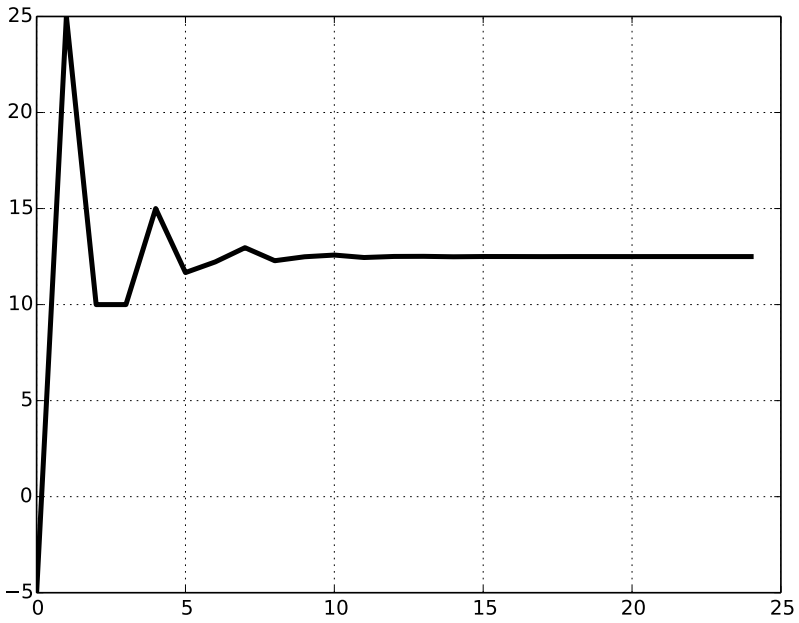
(a) Ecrire une implémentation Python pour calculer u_n en fonction de a, b, c avec $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $u_2 = c$.
Réponse

```
def u(n,a,b,c):
    if n==0:
        return a
    elif n==1:
        return b
    elif n==2:
        return c
    else:
        p=3
        for i in range(3,n+1):
            a,b,c=b,c,(a+b+c)/3.
        return c
```

(b) Essayer différentes valeurs de a, b et c et conjecturer la convergence.
Réponse

```
import matplotlib.pyplot as pypl

les_n=[n for n in range(25)]
les_u=[u(n,-5,25,10) for n in les_n]
pypl.plot(les_n,les_u,color='black',linewidth=3)
pypl.grid()
pypl.show()
```



(c) Montrer la convergence.

2. Pour $p \geq 1$, soit $Q_p = pX^p - X^{p-1} - \cdots - X - 1$.
Vérifier sur Python que, en dehors de 1, les racines de Q_p sont de modules strictement

inférieurs à 1.
Réponse

```
from numpy.polynomial import Polynomial
import numpy
p=5
Qp=Polynomial([-1]*p+[p])
Racines=Qp.roots()
print(numpy.abs(Racines))
[ 0.64624413  0.64624413  0.69201959  0.69201959  1.        ]
```

3. Démontrer que si z est racine de Q_p alors $z = 1$ ou $|z| < 1$.
4. Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11 Exemples de suites de matrices

11.1 Centrale 2008

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
Discuter de la limite de la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la liste des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.
$\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = P\,D\,P^{-1}$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
$\forall k \in \mathbb{N}\ A^k = P\,D^k\,P^{-1}$
On suppose que $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
Soit $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sa limite.
$\forall k \in \mathbb{N}\ D^k = P^{-1}\,A^k\,P$
Donc $D^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} PLP^{-1}$
Donc $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.
Réciproquement si la suite $\left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P\Delta P^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge} &\iff \left(D^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2\ \left(\left(D^k\right)_{i,j}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ \left(\lambda_i^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge} \\
&\iff \forall i \in [\![1;n]\!]\ |\lambda_i| < 1 \text{ ou } \lambda_i = 1 \\
&\iff \mathrm{Sp}(A) \subset D(0,1) \cup \{1\}
\end{aligned}$$

On peut numéroter les valeurs propres de telle manière que :
$\lambda_1 = \cdots = \lambda_\alpha = 1$ et $|\lambda_{\alpha+1}|, \dots, |\lambda_n| < 1$
$A^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} P\,\mathrm{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)\,P^{-1}$ qui est la matrice dans la base canonique de la projection sur $E_1(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)\setminus\{1\}} E_\lambda(A)$.

11.2 X 2006

1. Comment définir l'exponentielle d'un nombre complexe ?
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.
   On considère dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la norme $N \begin{cases} \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+ \\ M \mapsto \sup |M_{i,j}| \end{cases}$.
   - Trouver une inégalité de la forme :
     $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \ N(A.B) \leq K.N(A).N(B)$
   - Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
     Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{A^n}{n!}$.
     Montrer que pour tout $(i,j) \in \{1;\dots;d\}^2$ la suite $((S_p)_{i,j})_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
     On note $\exp A = \lim\limits_{p\to+\infty} S_p$.
3. **Application :**
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Déterminer $\exp A$ et $\exp B$. A-t-on $\exp(A+B) = \exp A.\exp B$?

Correction

1. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
2. •
$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in [\![1;d]\!]^2 \ |(AB)_{i,j}| &= \left| \sum_{k=1}^{d} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{d} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{d} N(A)N(B) = dN(A)N(B) \end{aligned}$$
   On ne peut pas faire mieux :
   Si $A = B = J_d$, alors $AB = J_d^2 = dJ_d$.
   On a $N(AB) = dN(J_d) = d$ et $dN(A)N(B) = d$
   - Par une récurrence triviale, on a :
     $\forall n \in \mathbb{N}^* \ N(A^n) \leq d^{n-1}N(A)^n$
     $((S_p)_{i,j})$ est la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_n = \frac{(A^n)_{i,j}}{n!}$.
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \ |u_n| &= \frac{|(A^n)_{i,j}|}{n!} \leq \frac{N(A^n)}{n!} \leq \frac{d^{n-1}N(A)^n}{n!} \\ &\leq \frac{1}{d}\frac{(dN(A))^n}{n!} \text{ terme général d'une série convergente} \end{aligned}$$
     La convergence absolue de $\sum \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ sera vue dans le cours d'analyse.
     Donc $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
     D'où $S_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp(A) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

3. $A^2 = B^2 = 0$
Donc $\exp(A) = I_2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(B) = I_2 + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
On en déduit : $\exp(A) \times \exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A+B)^2 = I_2$

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ licite car ces deux séries CVA} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_d}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A+B}{(2n+1)!} \\ &= \cosh 1\, I_d + \sinh 1\,(A+B) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\exp(A+B) \neq \exp(A) \times \exp(B)$ cf la diagonale
L'examinateur a demandé pourquoi $\exp(A+B) \neq \exp(A) \times \exp(B)$.
C'est parce que $AB \neq BA$.
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$(A+B)^n \neq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ a priori
et on détaille :
on écrit $\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!}$
et $\exp(A) \times \exp(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}$ qu'on développe en faisant un produit de Cauchy.

11.3 Centrale 2008

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (symétrique réelle), à valeurs propres positives [1]. Prouver l'existence d'une suite (R_p) de matrices avec :

$$\begin{cases} R_0 = I_n \\ R_{p+1} = \dfrac{1}{2}\left(R_p + A\,R_p^{-1}\right) \end{cases}$$

Cette suite converge-t-elle ? Si oui vers quoi ?

Remarque
Voici un exercice posé à l'épreuve Centrale maths 2 en 2019 :
Soit $S_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

1. L'exercice peut être traité avec l'hypothèse : "soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres positives"

1. Montrer que pour toute matrice A de $S_n^+(\mathbb{R})$ il existe $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
   L'unicité de M est admise, on l'appelle racine de A.
2. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Soit C la racine de A.
   Montrer que AB est semblable à CBC.
   En déduire que AB est diagonalisable.
3. Soit $A \in S_d^+(\mathbb{R})$.
   Prouver que la suite définie par :
   $U_0 = I_d$
   $\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n + AU_n^{-1})$
   est définie et converge vers la racine de A (commencer par le cas où A est diagonale puis généraliser).
4. Écrire un programme (avec toutes les notices qu'on a sur le site et tout ce dont on a besoin pour inverser et multiplier) qui donne une approximation de racine de A (A une matrice 4x4 donnée).

Voici un exercice posé à l'épreuve Centrale maths 2 en 2022 :

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tq $M^2 = A$.
   Dans la suite, on admet l'unicité de M et on la note $\sqrt{A}$.
2. On pose $U_0 = I_n$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_{p+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_p + AU_p^{-1}\right)$.
   (a) Dans le cas $n = 1$, montrer que U_p est défini pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) Dans le cas $n > 1$, montrer que U_p est défini pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   On pourra commencer par le cas où A est diagonale.
   (c) Montrer que $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{A}$.
3. (a) Ecrire une fonction `U(p,A)` qui prend en entrée une matrice A symétrique positive et un entier p et qui renvoie la matrice U_p.
   (b) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{A}$ pour $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ (je n'ai pas vérifié la matrice)

Correction de l'exercice de 2008
$A \in S_n(\mathbb{R}_+)$ donc il existe $P \in O(n)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $A = P\,D\,P^T$ avec $D = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Si $M = P\,Diag(\mu_1, \dots, \mu_n)\,P^T$ avec $\mu_i > 0$ alors M est inversible et :
$\dfrac{1}{2}\left(M + A\,M^{-1}\right) = P\,Diag\left(\dfrac{\mu_1 + \lambda_1/\mu_1}{2}, \dots, \dfrac{\mu_n + \lambda_n/\mu_n}{2}\right)P^T$.
Comme $R_0 = I_n$ est de cette forme, on a :
$\forall p \in \mathbb{N}\ R_p = P\,Diag(\mu_{1,p}, \dots, \mu_{n,p})\,P^T$ avec :
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \mu_{i,0} = 1$
$\forall i \in [\![1; n]\!]\ \forall p \in \mathbb{N}\ \mu_{i,p+1} = \dfrac{\mu_{i,p} + \lambda_i/\mu_{i,p}}{2}$
la suite (R_p) étant bien définie.

Si $\lambda_i = 0$ alors :
$\forall p \in \mathbb{N}\ \mu_{i,p+1} = \dfrac{\mu_{i,p}}{2}$
$\forall p \in \mathbb{N}\ \mu_{i,p} = \dfrac{\mu_{i,0}}{2^p} = \dfrac{1}{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 = \sqrt{0}$ (cf plus loin le pourquoi de la racine)

Soit $a > 0$ et $f \begin{cases} \mathbb{R}+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \dfrac{x + a/x}{2} \end{cases}$
f est $\mathcal{C}^\infty$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ f'(x) = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$
$f(x) = x \iff x^2 = a$
On dresse le tableau :
f décroît entre 0 et $\sqrt{a}$ puis croît.
En 0 et en $+\infty$, la limite est $+\infty$.
$f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.
$f(x) - x$ est positif entre 0 et $\sqrt{a}$ puis négatif.
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n \geq \sqrt{a}$ (car $f(x) \geq \sqrt{a}$ pour tout x)
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$
(u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ donc (u_n) converge vers $l \geq \sqrt{a}$.
f est continue en $l > 0$ donc $f(l) = l$ et $l = \sqrt{a}$.

Donc $R_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} P\, Diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)\, P^T = B$.
$B \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B^2 = A$.
On peut montrer qu'il y a une seule matrice qui vérifie ces propriétés.

11.4 Densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $n \geq 1$.
$GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En d'autres termes, tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est point adhérent à $GL_n(\mathbb{K})$ ou encore toute matrice carrée est limite d'une suite de matrices inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A est inversible, $(A)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers A.
On suppose donc que A n'est pas inversible.
A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, dont 0.
Donc :
$\exists a > 0$ tq $\forall \lambda \in [-a; a] \setminus \{0\}\ A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K})$
$\dfrac{1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc :
$\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0\ \dfrac{1}{p} \in [-a; a] \setminus \{0\}$
On a :

i $\forall p \geq p_0\ A - \dfrac{1}{p} I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

ii $A - \dfrac{1}{p} I_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$