

Programme de colles – Semaine 12 – du 18/12 au 22/12

Séries de fonctions**Modes de convergence d'une série de fonctions**

- Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions.
- La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Régularité de la somme d'une série de fonctions

- Continuité de la somme.
- Théorème de la double limite
- Intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment
- Dérivation de la somme d'une série de fonctions.
- Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Equations différentielles – Révisions de PCSI

- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus
 - Résolution d'une équation homogène
 - Méthode de variation de la constante
- Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants
 - Résolution de l'équation homogène
 - Détermination d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto B \sin(\omega x)$.

Séries entières**Rayon de convergence**

- Lemme d'Abel
- Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.
- Convergence absolue dans le disque (ou intervalle) ouvert de convergence.
- $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$
- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_b \leq R_a$. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_b = R_a$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Utilisation de la règle de d'Alembert.
- Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Régularité de la somme

- Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

- Caractère \mathcal{C}^∞ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
- Relation $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction d'une variable réelle

- Fonction développable en série entière.
- Série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞
- Unicité du développement en série entière.
- Développements des fonctions usuelles : exp, cos, sin, ch, sh, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Utilisation d'une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

Séries entières d'une variable complexe

- Continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. (Admis)
- Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
- Développement de $\exp(z)$ sur \mathbb{C} .