Programme de colles – Semaine 13 – du 15/01 au 20/01

Séries entières

Rayon de convergence

- Lemme d'Abel
- Rayon de convergence. Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.
- Convergence absolue dans le disque (ou intervalle) ouvert de convergence.
- $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$
- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_b \leq R_a$. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_b = R_a$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Utilisation de la règle de d'Alembert.
- Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

Régularité de la somme

- Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.
- Relation $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction d'une variable réelle

- Fonction développable en série entière.
- Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$
- Unicité du développement en série entière.
- Développements des fonctions usuelles : exp, cos, sin, ch, sh, Arctan,$x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Utilisation d'une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

Séries entières d'une variable complexe

- Continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. (Admis)
- Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
- Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.

$\boxed{\textbf{Variables aléatoires discrètes}}$

Généralités

— Définition d'une variable aléatoire discrète.

— Loi P_X d'une v.a. discrète.

— Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$, $f(X) \sim f(Y)$.

— Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.

— Couple de variables aléatoires indépendantes. Extension au cas de n v.a. Suites de v.a. indépendantes, suites i.i.d.

— Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Lemme des coalitions.

Espérance et variance

— Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$.

— Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.

— Variable centrée

— Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

— Formule du transfert.

— Linéarité, positivité et croissance de l'espérance.

— Si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

— Si $X \geq 0$ et $E(X) = 0$, alors $(X = 0)$ est presque sûr.

— Si X et Y sont indépendantes et d'espérance finie, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (admis). (La réciproque est fausse). Extension à n variables.

— Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz : $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$. Cas d'égalité.

— Définition de la variance. Ecart type. Formule de König-Huyghens.

— $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

— Variable réduite. Si $\sigma(X) > 0$, $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

— Covariance de deux v.a. Relation $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

— Si X et Y sont indépendantes, $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. (La réciproque est fausse.)

— $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y)$.
Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. (La réciproque est fausse.)
Extension à n variables.

Fonctions génératrices

- Définition de la fonction génératrice d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La loi de X est entièrement caractérisée par G_X. Le rayon de convergence de G_X est ≥ 1. G_X CVN sur $[-1, 1]$ donc est continue.
- Lien série génératrice-espérance. Lien série génératrice-variance.
- Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Lois usuelles

Les fonctions génératrices des variables suivant les lois usuelles doivent savoir être calculées rapidement par les étudiants.

- Loi uniforme (loi+espérance dans le cas $\mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$)
- Loi de Bernoulli (loi+espérance+variance)
- Loi binomiale (loi+espérance+variance)
- Loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Espérance, variance. Interprétation comme rang du 1er succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Relation $P(X > k) = (1 - p)^k$.
- Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Espérance, variance. Interprétation en termes d'événements rares.

Inégalités probabilistes

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.