[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

1.8 Mathématiques 2 - filière PSI

1.8.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le sujet avait trait à plusieurs modes d'approximation des lois de Poisson par des lois à support fini. Dans un premier temps (partie **I**), on étudiait la probabilité qu'une permutation d'un ensemble à n éléments soit un dérangement, par la méthode des séries entières génératrices, puis la loi du nombre X_n de points fixes d'une permutation d'un ensemble à n éléments. On démontrait, lorsque n tend vers $+\infty$, la convergence en loi de X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1.

La deuxième partie du sujet étudiait une mesure effective de l'écart entre deux lois sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$: la mesure en question est la **distance de variation totale**, dont on montrait à la question 10 qu'elle vérifiait les axiomes d'une distance sur l'ensemble des familles positives sommables de somme 1 (que l'on peut identifier à l'ensemble des lois de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$).

L'objectif essentiel, dans le reste du problème, était de quantifier la convergence observée en partie **I** au sens de cette mesure (questions 14 et 15), puis de faire de même pour l'approximation de la loi de Poisson de paramètre λ par la loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \lambda/\backslash)$ (question 20) et l'approximation d'une loi de Poisson par une autre (question 22).

La stratégie, dans cette dernière partie, était de contrôler la distance de variation totale entre deux produits de convolution (opération sur les lois correspondant à l'addition de deux variables aléatoires entières indépendantes) en fonction des distances facteur à facteur. Les derniers résultats était obtenus par écriture de la loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \lambda/\backslash)$ comme produit de convolution de n lois de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, et de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ comme produit de convolution de n lois de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$.

1.8.2 Structure du sujet et questions souvent abordées

Le sujet pouvait être intégralement traité dans le temps imparti. Plusieurs candidats y sont essentiellement parvenus, ne lâchant des points que par quelques erreurs d'étourderie et imprécisions dans l'argumentation.

Les trois grandes parties présentaient des dépendances significatives entre elles. Le résultat de la question 5 intervenait dans les questions 12 à 15, tandis que l'objet introduit dans la partie **II**, à savoir la distance en variation totale, était d'usage constant dans la partie **III**.

La plupart des candidats ont tenté de traiter les toutes premières questions, puis la question 6, la question 8, les questions 10 à 12, puis 16 et 17. Le reste a moins souvent été abordé.

Beaucoup de candidats ont essayé de traiter un très grand nombre de questions, mais en survolant absolument tout. En général, ces copies ont reçu une note très faible. Le picorage est très fortement déconseillé : on attend au contraire un réel investissement des candidats dans le sujet.

Le jury relève unanimement un important relâchement dans la présentation des copies par rapport aux éditions précédentes. On déplore de nombreuses copies à la limite de la lisibilité, des copies dont la rédaction et les justifications sont quasi-absentes, d'autres truffées de fautes d'orthographe.

Dans certaines copies, il est rare de voir correctement quantifiées les propositions mathématiques énoncées : les objets du discours ne sont pas fixés.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe F.

1.8.3 Conclusion

L'observation générale est le manque de soin dans la vérification des hypothèses des théorèmes manipulés. L'exemple le plus flagrant de cette tendance est les produits de Cauchy (de séries entières ou de séries numériques), dont les hypothèses ne sont qu'épisodiquement rappelées, et encore plus épisodiquement vérifiées avec rigueur.

La rédaction des raisonnements de dénombrement met en général les candidats en grande difficulté. On est loin en la matière de l'excès de formalisme, bien au contraire : le plus souvent ces questions révèlent un franc manque de rigueur dans l'usage du vocabulaire.

Les questions de rayon de convergence sont rarement satisfaisantes : presque tous les candidats oublient de considérer la valeur absolue du terme général, beaucoup tentent de manipuler des inégalités entre les sommes de séries entières (sans que rien n'ait vraiment été bien justifié) pour conclure sur les rayons de convergence. On attendait des candidats une distinction claire entre la série entière (qui est une série de fonctions, ce qui équivaut à la donnée d'une suite de fonctions) et sa somme.

Enfin, on note beaucoup de passages en force de la part des candidats : sauts abrupts à la conclusion, étapes de calcul sans justification claire etc.

En définitive, les candidats disposant d'une maîtrise suffisante du programme et ayant bien intégré les attendus en termes de rédaction et de justification se sont très facilement détachés des autres.

F Mathématiques 2 PSI

Q1 - Le rappel du cardinal de $\mathcal{S}_n$ n'a pas été une grande difficulté pour les candidats. En revanche, l'exploitation précise de celui-ci pour en déduire la minoration $R \geq 1$ a très rarement été satisfaisante. Il est d'abord maladroit d'invoquer un théorème de comparaison avec le rayon de convergence de $\sum_n z^n$, puisque la source de cette comparaison, à savoir le caractère borné de la suite $\left(\frac{d_n}{n!}1^n\right)_n$, est directement lié à la définition officielle du rayon de convergence (telle qu'elle figure dans le programme de la filière PSI). Par ailleurs, les candidats se limitent très souvent à la majoration $d_n \leq n!$ et oublient presque toujours de citer la positivité de $\frac{d_n}{n!}\cdot$ Il est manifeste que le réflexe fondamental en la matière, à savoir que c'est le module du terme général qu'il faut prendre en compte, n'est pas ancré chez suffisamment de candidats.

Q2 - Cette question de dénombrement pose évidemment le problème du degré de rigueur attendu dans les explications. Le jury accordait la totalité des points aux candidats expliquant qu'ils partitionnaient l'ensemble des permutations à k points fixes selon l'ensemble de leurs points fixes, puis qui dénombraient clairement (mais sans nécessairement faire appel à la notion de bijection) que pour un sous-ensemble donné A de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, le nombre de permutation ayant A pour ensemble de points fixes est d_{n-k}. On n'attend donc pas des candidats un formalisme extrêmement rigoureux. Cependant, le jury est frappé des raisonnements souvent très vagues, et régulièrement confus, qu'il a pu lire. Nombre de candidats attribuent le qualificatif de dérangement à des points (alors que cela désigne un type de permutation) etc. Il est finalement rare de trouver une explication bien convaincante. Dans la conclusion, il fallait impérativement citer que la loi envisagée sur $\mathcal{S}_n$ était uniforme.

Q3 - Comme indiqué plus haut, cette question a mis en évidence le manque de soin dans la vérification des hypothèses du théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières. On attendait aussi un minimum d'explication pour la formule $\sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) = 1$, le caractère uniforme de la probabilité sur l'univers envisagé était parfaitement hors-sujet pour ce point, et son rappel n'a fait que créer chez le jury la suspicion d'un manque de compréhension de la situation par les candidats concernés. Enfin, pour la conclusion sur le rayon de convergence, on voit une proportion très importante de candidats annoncer que le rayon de convergence du produit de Cauchy est systématiquement le minimum des rayons de convergence des deux séries ainsi multipliées, ce qui est une erreur classique. Trop rarement, l'observation judicieuse que $s \underset{1^+}{\longrightarrow} +\infty$ n'est pas accompagnée d'un raisonnement fondé sur la continuité de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

Q4 - Il y avait deux méthodes possibles. La plus directe consistait à écrire $s(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et à utiliser un nouveau produit de Cauchy pour conclure grâce à l'unicité du développement en série entière. L'autre méthode, plus directement suggérée par l'énoncé, consistait à comparer les développements en série entière des deux membres de $(1-x)s(x) = e^{-x}$ pour aboutir à une relation de récurrence vérifiée par $\left(\frac{d_n}{n!}\right)_n$. Cette deuxième méthode, plus élémentaire sur le papier, a pourtant conduit à de nombreuses erreurs ou blocages du fait de la nécessité d'être très précis sur les indices des sommes et l'exploitation de la relation de récurrence.

Q5 - On attendait que soient cités précisément les résultats antérieurs utilisés, y compris la référence aux questions où ils avaient été obtenus.

Q6 - On attendait d'abord que les candidats citent clairement que U_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Quant au calcul de $P_n(U_i = 1)$, il a très souvent donné lieu à des raisonnements vagues qui n'étaient pas fondés sur une utilisation précise de la loi de probabilité envisagée. Ici, la seule façon d'obtenir le résultat était de dénombrer les permutations fixant le point i, ce qui n'a que rarement été bien fait. Le problème s'est retrouvé, exacerbé, pour le calcul de la loi de U_iU_j, que la plupart des candidats se retrouvent incapables de calculer correctement faute d'avoir bien situé la difficulté (à savoir dénombrer les permutations fixant i et j à la fois).

Q7 - Le jury est satisfait de constater que beaucoup de candidats pensent à écrire X_n comme somme des U_i. Cette stratégie fondamentale à l'étude de lois de comptage semble donc acquise par la plupart des candidats. Beaucoup plus problématique a été la suite des raisonnements, puisqu'un très grand nombre de candidats postulent l'indépendance des U_i, voire annoncent que X_n suit une loi binomiale sans envisager cette indépendance (pourtant indispensable). Pourtant, il n'en est rien, les variables U_i présentant une véritable dépendance, ce qui est à la fois illustré par le résultat de la question précédente et par l'observation du premier cas non trivial ($n = 2$, où l'on observe que $U_1 = U_2$!). En outre, la loi de X_n était donnée à la question **5**, il n'était donc pas bien difficile de noter qu'elle différait profondément d'une loi binomiale. Quant à ceux qui avaient évité le piège des fausses indépendances, seul leur restait comme obstacle le calcul de la variance : le taux de réussite pour cette partie est très faible, tous types d'erreurs étant relevés : mauvaise formule pour la variance d'une somme (à noter qu'il était légèrement plus court ici de calculer l'espérance du carré plutôt que la variance), dénombrement incorrect des parties à deux éléments de $[\![1, n]\!]$, ou pour les couples d'éléments distincts.

Q8 - Il n'y a pas de raison *a priori* pour que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(X_n = k)$ existe, et il est donc incorrect de démarrer une résolution par « $y_k = \cdots$ ». En général, la loi de Poisson de paramètre 1 est correctement reconnue.

Q9 - La difficulté principale de cette question était de comprendre le sens précis de l'indication. Presque aucun candidat n'a compris qu'on attendait de reconnaître $G_{X_n}(s)$ comme la somme partielle de rang n d'une série produit de Cauchy, ce qui était le point de vue aboutissant de la manière la plus simple et directe à la solution. Plusieurs candidats ont néanmoins su résoudre différemment la question, soit en réalisant des interversions (licites) de sommes, soit grâce à un théorème de double-limite correctement employé (une difficulté étant que la variable pour les fonctions envisagées était ici l'entier n, mais on pouvait s'appuyer sur le théorème au programme au prix de l'introduction d'une partie entière afin de donner un sens aux quantités manipulées pour une variable réelle $x \geq 0$ que l'on tentait de faire tendre vers $+\infty$).

Q10 - Cette question a posé peu de difficultés, mais on attendait une rédaction soigneuse – sans être exagérément délayée – des différents points, et en particulier de ne pas oublier l'implication réciproque dans le deuxième point. La positivité de la distance est souvent obtenue de manière exagérément compliquée, alors qu'il suffisait d'invoquer la positivité du terme général. Trop peu de candidats s'interrogent sur la convergence des séries manipulées.

Q11 - Cette question assez facile a donné lieu a une quantité d'erreurs assez surprenante. Beaucoup de candidats concluent à une distance nulle, sans visiblement que cela ne leur semble contradictoire avec le deuxième point de la question précédente.

Q12 - Cette question a illustré un manque de rigueur assez préoccupant chez une large majorité de candidats : en effet ceux-ci lèvent le problème du signe dans $|(1 - \lambda) - e^{-\lambda}|$ sans aucune explication, et ne se préoccupe de l'inégalité $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ que quelques lignes plus loin ! Pour cette dernière, indiquer qu'elle est vraie « par convexité » et sans autre forme de procès ne fait que laisser planer le doute sur l'honnêteté des candidats concernés. On rappelle que l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$ figure explicitement au programme, et qu'il était donc judicieux de la citer sous cette forme puis d'indiquer qu'on l'applique à $-\lambda$. Pour la dernière inégalité, contrôler la positivité de λ, puis la citer, avant de multiplier l'inégalité $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ membre à membre n'est visiblement pas un réflexe suffisamment ancré. Pour ceux n'ayant pas repéré la convexité, on note une grande quantité d'erreurs dans les calculs de dérivées (et souvent aussi un manque de clairvoyance dans le choix de la fonction à étudier : ici s'inquiéter de $\lambda \mapsto \lambda^2 - (1 - e^{-\lambda})\lambda$ n'était pas particulièrement intelligent).

Q13 - L'identité $P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ n'était établie que pour $k \in [\![0, n]\!]$, il était donc hors de question de l'utiliser sans explication en dehors de ce domaine de validité. D'autant plus que la signification de la notation $\sum_{i=0}^{m} a_i$ lorsque $m < -1$ ne fait pas l'objet d'un réel consensus dans la communauté mathématique : considérer que cette somme est nulle car signifiant une somme indexée sur l'ensemble (vide) des entiers i vérifiant $0 \leq i \leq m$ est séduisant mais pose le double-problème de violation de la relation de Chasles et de l'incohérence avec la convention correspondante sur les intégrales orientées (l'intégrale $\int_0^{-2} x^2 \,\mathrm{d}x$ n'est pas nulle, n'est-ce pas ?). En définitive, il était indispensable de dissocier le cas $k \leq n$ du cas $k > n$ dans l'écriture de la somme, ce qui était presque le seul enjeu de cette question.

Q14 - Comme pour la question 12, le jury est parfois gêné de constater que les candidats multiplient des inégalités membre à membre sans jamais citer la positivité des termes. Une minorité des candidats parvient à comprendre comment majorer simplement le terme général $\frac{1}{k!}$, peu citent la convergence de la série majorante avant de sommer les inégalités. Pour l'équivalent, l'occasion était donnée aux candidats d'utiliser le théorème des gendarmes pour les équivalents, innovation de la récente réforme des programmes de PCSI/PSI dont fort peu ont pensé à se saisir. Un nombre trop élevé de candidats trouve un équivalent nul sans remord visible (un équivalent nul n'est pourtant possible que pour une suite nulle à partir d'un certain rang, ce qui n'est évidemment pas le cas ici).

Q15 - Le jury a été agréablement surpris de voir un nombre substantiel de réponses correctes à cette question, avec une grande variété de solutions. Il n'était pas indispensable d'appliquer le théorème des séries alternées pour majorer $\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right|$, mais si on le faisait il fallait correctement en citer les hypothèses ! Attention, une nouvelle fois, de ne pas oublier de citer la positivité de $d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1)$ avant de conclure à la domination (alternativement, on pouvait majorer la valeur absolue de $d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1)$).

Q16 - Il ne fallait pas oublier de signaler (c'était implicitement admis dans l'énoncé) que $x * y$ était à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour le reste, il manque très souvent les hypothèses précises du théorème sur les produits de Cauchy de séries numériques, ainsi que des explications claires à ce sujet (les convergences absolues que l'on doit vérifier nécessitent de rappeler la positivité des séries en présence). À noter qu'aucun théorème au programme ne concerne directement les produits de Cauchy pour les séries à termes positifs.

Q17 - C'était quasiment une question de cours, on attendait donc des candidats qu'ils indiquent précisément à quel moment du calcul ils utilisaient l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

Q18 - Question élémentaire. Trop souvent les candidats oublient de citer la posivitité de y et u au moment d'appliquer l'inégalité triangulaire, ce qui était pourtant crucial.

Q19 - On ne pouvait pas se contenter des majorations $y \leq 1$ et $u \leq 1$, il fallait utiliser $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, via un produit de Cauchy. Une nouvelle fois, le jury est très souvent confronté à un déluge de calculs injustifiés (en particulier, le point crucial consistant à s'appuyer sur un produit de Cauchy de séries numériques ; très souvent le mot « produit de Cauchy » est absent, et il est exceptionnel de lire une justification du fait que le théorème associé est effectivement appliquable).

Q20 - Cette question nécessitait une large autonomie. Le jury n'a pas tenu rigueur aux candidats annonçant que toute variable suivant $\mathcal{B}(\backslash, \lambda)$ est somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre λ (c'est pourtant faux !). Pour éviter ce genre d'écueil, le raisonnement par récurrence s'avérait particulièrement adapté, à la difficulté près qu'il fallait étudier le produit de convolution de la loi $\mathcal{B}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{B}(\backslash, \lambda)$, ce qui n'est pas particulièrement aisé. À noter qu'il est clair dans le programme que l'utilisation directe la fonction génératrice d'une loi de Poisson n'est pas autorisée, les candidats devant seulement « savoir la retrouver » (ce qui ne coûte que trois lignes de calcul tout au plus, effort qui n'est peut-être pas complètement insurmontable pour les candidats).
Q21 - Beaucoup de candidats obtiennent la partie facile de la question, à savoir la convergence vers 0 de la distance en variation totale d'une loi binomiale $\mathcal{B}(\backslash, \alpha/\backslash)$ vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$. En revanche, presque aucun candidat ne parvient à en déduire précisément la convergence annoncée (alors qu'il suffisait de majorer le terme de rang k de la somme par la somme totale !). À noter que la méthode n'était pas ici imposée, il était donc possible d'obtenir le résultat par un simple retour à la définition d'une loi binomiale : cependant, les candidats s'étant engagés dans cette voie – qui figurait probablement dans leur cours – ont le plus souvent échoué.
Q22 - Un tout petit nombre de bonnes réponses à cette question, dont les ressorts étaient largement semblables à ceux de la question 20.

🡅RETOUR

Concours Commun Mines-Ponts 2023

Épreuve de mathématiques II, PSI

(corrigé)

1 Nombre de points fixes d'une permutation

1. On a : $\operatorname{card}(\mathcal{S}_n) = n!$. Comme l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$ est inclus dans $\mathcal{S}_n$, on a : $d_n \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{S}_n) = n!$, donc : $0 \leqslant \dfrac{d_n}{n!} \leqslant 1$. Par le théorème de comparaison, on en déduit que le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!}x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$, qui vaut 1 (on reconnaît une série usuelle : c'est la série géométrique). On a donc : $R \geqslant 1$.

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On cherche à dénombrer $(X_n = k)$. Pour cela, on note que pour construire une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes :
   - on choisit l'ensemble F de ses points fixes : cela revient à choisir k éléments de $[\![1,n]\!]$ (**il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilités**), et pour tout $i \in F$ on pose : $\sigma(i) = i$;
   - on doit à présent définir l'image par σ des éléments de $D = [\![1,n]\!] \setminus F$; pour cela, justifions que $\sigma_{|D}$ doit être un dérangement de D :
     - $\sigma_{|D}$ *est une application de D dans lui-même* : en effet, s'il existe $i \in D$ tel que : $\sigma(i) = j \notin D$, alors j appartient au complémentaire de D (c'est-à-dire F), donc : $j = \sigma(j)$, mais on a alors : $\sigma(i) = \sigma(j)$, donc par injectivité de σ (on veut en effet que ce soit une permutation de $[\![1,n]\!]$) on a : $i = j$, ce qui est impossible puisque $i \in D$ et $j \notin D$; ainsi $\sigma(D) \subseteq D$, donc $\sigma_{|D}$ est une application de D dans lui-même ;
     - $\sigma_{|D}$ *est une permutation de D* : en effet σ est injective, donc $\sigma_{|D}$ également, et comme le cardinal de son ensemble de départ et d'arrivée est le même, $\sigma_{|D}$ est une bijection de D dans D ;
     - $\sigma_{|D}$ *est un dérangement de D* : pour tout $i \in [\![1,n]\!] \setminus F$, on veut : $\sigma(i) \neq i$ (dans le cas contraire, on aurait $i \in F \cap ([\![1,n]\!] \setminus F) = \emptyset$, ce qui est absurde) ;

     en résumé, pour définir $\sigma_{|D}$, il suffit de choisir un dérangement τ de D (**comme D a $n-k$ éléments, il y a d_{n-k} tels dérangements : nous justifierons ci-dessous plus en détails ce point**) et de poser $\sigma_{|D} = \tau$;
   - ayant défini σ sur F et D, et étant donné que $F \cup D = [\![1,n]\!]$, cela définit bien un élément de $\mathcal{S}_n$ (la construction assure la bijectivité) avec exactement k points fixes : les éléments de F.

   On obtient ainsi toutes les permutations de $[\![1,n]\!]$ avec k points fixes exactement. Par principe multiplicatif, on en déduit :
   $$(X_n = k) = \binom{n}{k} d_{n-k}.$$
   D'où le résultat.

   Remarque. Il semble *a priori* que d_{n-k} désigne le nombre de dérangements de $[\![1,n-k]\!]$ et non de D. Vérifions que d_{n-k} donne bien le nombre de dérangements de D (c'est-à-dire des bijections de D dans lui-même sans point fixe). Soient $\text{Dér}_{[\![1,n-k]\!]}$ l'ensemble des dérangements de $[\![1,n-k]\!]$ et Dér_D l'ensemble des dérangements de D. Comme D est de cardinal $n-k$, il existe une bijection f de $[\![1,n-k]\!]$ dans D (c'est même la définition du cardinal d'un ensemble fini). On montre alors que les applications :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} \text{Dér}_{[\![1,n-k]\!]} & \to & \text{Dér}_D \\ \sigma & \mapsto & f\circ\sigma\circ f^{-1} \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} \text{Dér}_D & \to & \text{Dér}_{[\![1,n-k]\!]} \\ \sigma & \mapsto & f^{-1}\circ\sigma\circ f \end{array}\right.$$

sont correctement définies, c'est-à-dire : si σ est un dérangement de $[\![1, n-k]\!]$, alors $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ est un dérangement de D ; la justesse des ensembles de départ et d'arrivée est facile à vérifier, et $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ est bijective en tant que composition d'applications bijectives ; enfin, on vérifie que $i \in [\![1, n-k]\!]$ est un point fixe de σ si et seulement si $f(i) \in D$ est un point fixe de $f \circ \sigma \circ f^{-1}$, donc σ n'admet aucun point fixe si et seulement si $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ n'en admet pas : ainsi $f \circ \sigma \circ f^{-1}$ est bien un dérangement de D si σ en est un de $[\![1, n-k]\!]$. De même pour la vérification que la seconde application est bien définie. De plus ces deux applications sont clairement réciproques l'une de l'autre : ce sont donc des bijections, et comme une bijection conserve les cardinaux on a : $\text{card}\,(\text{Dér}_D) = \text{card}\left(\text{Dér}_{[\![1,n-k]\!]}\right) = d_{n-k}$. D'où le résultat.

3. Notons $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n x^n$ le produit de Cauchy de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{d_n}{n!} x^n$ (qui est de rayon de convergence $R \geqslant 1$) avec la série entière exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$ (qui est de rayon de convergence infini). Alors le rayon de convergence R_p de ce produit de Cauchy est supérieur ou égal à $\min(R, +\infty) = R \geqslant 1$, et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec, par définition d'un produit de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} d_{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} \overset{(q.\,2)}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\text{card}(X_n = k)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)}.$$

Or $\mathcal{S}_n$ est muni de la probabilité uniforme P_n, donc :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \frac{\text{card}(X_n = k)}{\text{card}(\mathcal{S}_n)} = \mathrm{P}_n(X_n = k).$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_n(X_n = k) = \mathrm{P}_n(X_n \in [\![0, n]\!]),$$

et comme X_n est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ (en effet une permutation de $\mathcal{S}_n$ ne peut pas avoir plus de points fixes que le cardinal de son ensemble de départ $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire n), on a :

$$\mathrm{P}_n(X_n \in [\![0, n]\!]) = 1.$$

En principe tout notre raisonnement vaut pour $n \geqslant 1$; pour $n = 0$, on utilise la convention de l'énoncé selon laquelle $d_0 = 1$. En résumé, nous avons montré : $\forall n \in \mathbf{N}$, $c_n = 1$, donc :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

d'où le résultat.

Voyons comment en déduire que $R = 1$: on sait déjà que $R \geqslant 1$. De plus le produit de Cauchy ci-dessus est égal à $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$, qui est de rayon de convergence $R_p = 1$, et on sait que $R_p \geqslant R$. Donc : $1 \geqslant R$. Ayant montré que R est supérieur et inférieur à 1, on a donc : $R = 1$.

4. Soit $x \in]-1,1[$. De la question précédente on déduit : $(1-x)s(x) = e^{-x}$. C'est-à-dire :

$$e^{-x} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^n$$
$$= d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\right)x^n.$$

Mais on a aussi : $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$. Par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad d_0 = 1.$$

On en déduit, en sommant la première égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},$$

or la somme du membre de gauche est télescopique. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{d_n}{n!} - \frac{d_0}{0!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},$$

soit donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}, \quad \frac{d_n}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

On remarque que cette égalité reste valable pour $n = 0$.

Autre démonstration. En multipliant la relation de la question précédente par e^{-x}, on a :

$$s(x) = \frac{1}{1-x}\cdot e^{-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right).$$

Faisons le produit de Cauchy des deux sommes du membre de droite. Il est défini sur $]-1,1[$ par un raisonnement analogue à celui de la question précédente. Notons-le $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n$. Alors :

$$s(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n,$$

mais on a aussi : $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n$. Par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{d_n}{n!} = u_n,$$

or, par définition d'un produit de Cauchy : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},$$

ce qui démontre le résultat voulu.

5. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On rappelle que P_n est la probabilité uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Donc :

$$\mathrm{P}_n(X_n = k) = \frac{\operatorname{card}(X_n = k)}{\operatorname{card}(\mathcal{S}_n)} \overset{(q.\,2)}{=} \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{(n-k)!k!} \overset{(q.\,4)}{=} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!},$$

d'où le résultat.

6. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque U_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. On détermine son paramètre en calculant $\mathrm{P}_n(U_i = 1)$. Notons F_i l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ telles que $\sigma(i) = i$. On a :

$$\mathrm{P}_n(U_i = 1) = \frac{\operatorname{card}(U_i = i)}{\operatorname{card}(\mathcal{S}_n)} = \frac{\operatorname{card}(F_i)}{n!}.$$

Or, en reprenant le raisonnement de dénombrement de la question 2 (quand on veut montrer que $\sigma_{|D}$ est une permutation de D), on montre que $\sigma \in F_i$ si et seulement si $\sigma_{|\llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{i\}}$ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, et il y a $(n-1)!$ tels permutations (là encore, voir la remarque de la question 2 pour avoir une idée de la façon de démontrer qu'il y a autant de permutations de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ que de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$). Donc :

$$\mathrm{P}_n(U_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

donc : $U_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Le même raisonnement montre que si $i \neq j$, alors $U_i U_j$ est une loi de Bernoulli de paramètre :

$$\mathrm{P}_n(U_i U_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

si $n \geqslant 2$ (si $n = 1$ on ne peut de toute façon pas considérer $i \neq j$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$). La clé du raisonnement est de noter que $U_i U_j(\sigma) = 1$ si et seulement si $U_i(\sigma) = 1$ et $U_j(\sigma) = 1$ (car U_i et U_j ne prennent que les valeurs 0 et 1), si et seulement si σ fixe i et j, si et seulement si $\sigma_{|\llbracket 1,n \rrbracket \setminus \{i,j\}}$ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$. Comme il y a $(n-2)!$ permutations de cet ensemble, on obtient le calcul ci-dessus. En conclusion :

$$U_i U_j \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right).$$

Remarque. Ce calcul permettrait de démontrer que U_i et U_j ne sont pas indépendantes si $i \neq j$. En effet, $\mathrm{P}_n(U_i = 1, U_j = 1) = \mathrm{P}_n(U_i U_j = 1) = \dfrac{1}{n(n-1)}$, tandis que :

$$\mathrm{P}_n(U_i = 1)\mathrm{P}_n(U_j = 1) = \frac{1}{n^2} \neq \frac{1}{n(n-1)}.$$

7. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

En effet, comme les U_i sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i(\sigma) = k$, si et seulement si k termes de la somme sont égaux à 1, si et seulement si σ admet k points fixes (puisque, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$U_i(\sigma) = 1$ si et seulement si i est un point fixe de σ), si et seulement si $X_n(\sigma) = k$. Ceci montre bien que $\sum_{i=1}^{n} U_i(\sigma) = X_n(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.
Comme l'espérance est linéaire, on en déduit :

$$\mathrm{E}\left(X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(U_i\right) \overset{(q.8)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

Pour la variance, on écrit :

$$\mathrm{V}\left(X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}\left(U_i\right) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(U_i, U_j).$$

Comme U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, on a : $\mathrm{V}\left(U_i\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Passons à la covariance de U_i et U_j pour $i \neq j$. On a :

$$\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = \mathrm{E}\left(U_i U_j\right) - \mathrm{E}\left(U_i\right)\mathrm{E}\left(U_j\right) \overset{(q.8)}{=} \mathrm{E}\left(U_i U_j\right) - \frac{1}{n^2},$$

et on a montré dans la question précédente que U_iU_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-1)}$, donc : $\mathrm{E}\left(U_iU_j\right) = \frac{1}{n(n-1)}$. Donc : $\mathrm{Cov}(U_i, U_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}$. Ainsi :

$$\mathrm{V}\left(X_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + 2\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1.$$

Pour calculer : $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1$, il suffit de dénombrer les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vérifiant $i < j$. Cela revient à compter le nombre de façons de choisir deux éléments parmi les n éléments de $[\![1, n]\!]$ (il suffit alors de décréter que i est le plus petit des deux et j le plus grand). On sait qu'il y en a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi :

$$\mathrm{V}\left(X_n\right) = 1 - \frac{1}{n} + 2\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right)\frac{n(n-1)}{2} = 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{n-1}{n} = 1.$$

En conclusion :

$$\mathrm{E}\left(X_n\right) = \mathrm{V}\left(X_n\right) = 1.$$

8. On a, d'après la question 5 : $\mathrm{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$. Or on sait que pour tout $x \in \mathbf{R}$ la série $\sum_{i \geqslant 0} \frac{x^i}{i!}$ converge et que sa somme est e^x. Pour $x = -1$, cela donne :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}_n(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

Ainsi la variable aléatoire Y définie dans l'énoncé vérifie :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = 1^k \frac{e^{-1}}{k!}.$$

On reconnaît une loi de Poisson : $Y \sim \mathcal{P}(1)$.

9. Soient $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathbf{R}$. La fonction G_{X_n} est définie sur $\mathbf{R}$ car X_n est à support fini. On a par définition :
$$G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}_n(X_n = k)s^k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_n(X_n = k)s^k.$$
Or Y suit une loi de Poisson de paramètre 1, donc on sait que l'on a : $G_Y(s) = e^{s-1}$. On en déduit :
$$\begin{aligned} |G_{X_n}(s) - G_Y(s)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}_n(X_n = k)s^k - \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-1}\frac{s^k}{k!} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{P}_n(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right) s^k - e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + e^{-1} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \right|. \end{aligned} \tag{1}$$
Pour montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s)$, nous allons montrer que chacun des termes de la majoration ci-dessus devient arbitrairement petit. Commençons par le dernier terme : comme $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!}$ est le reste d'indice n d'une série convergente (la série exponentielle, qui converge en tout réel), il tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On en déduit qu'il existe un rang $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_1$, on ait :
$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \right| \leqslant e\varepsilon. \tag{2}$$
Le choix de majorer par $e\varepsilon$ plutôt que par ε est pour avoir une majoration plus simple à la fin du raisonnement, mais majorer par ε n'empêche absolument pas de conclure. De même pour les autres majorations « epsilonesques » plus bas.
Passons au premier terme. D'après la question précédente : $\lim\limits_{k\to+\infty} k!\mathrm{P}_n(X_n = k) = e^{-1}$, donc il existe un rang $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, on ait : $|k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1}| \leqslant e^{-|s|}\varepsilon$. Prenons $n > N_2$ désormais, et écrivons :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{N_2} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + \sum_{k=N_2+1}^{n} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N_2} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + e^{-|s|}\varepsilon \sum_{k=N_2+1}^{n} \frac{|s|^k}{k!} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N_2} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + e^{-|s|}\varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|s|^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{N_2} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} + \varepsilon. \end{aligned}$$
Enfin, $\sum\limits_{k=0}^{N_2} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ puisque c'est une somme (avec un nombre fixe et fini de termes) de termes tendant vers 0. Donc il existe $N_3 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_3$, on ait : $\sum\limits_{k=0}^{N_2} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} \leqslant \varepsilon$. En prenant $n \geqslant \max(N_2 + 1, N_3)$, on a alors :
$$\sum_{k=0}^{n} \left| k!\mathrm{P}_n(X_n = k) - e^{-1} \right| \cdot \frac{|s|^k}{k!} \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \tag{3}$$

Posons : $N = \max(N_1, N_2 + 1, N_3)$, et $n \geqslant N$. En combinant (1), (2) et (3), on obtient :

$$|G_{X_n}(s) - G_Y(s)| \leqslant 2\varepsilon + e^{-1}e\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on ait : $|G_{X_n}(s) - G_Y(s)| \leqslant 3\varepsilon$. Par définition de la limite (s'il vous ennuie d'avoir une majoration par 3ε plutôt que ε, reprenez tout le raisonnement ci-dessus en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{3}$), on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s),$$

ce qu'il fallait démontrer.

2 Convergence en variation totale

10. Comme $\mathrm{d}_{VT}(x, y)$ est une somme de réels positifs, on a : $\mathrm{d}_{VT}(x, y) \geqslant 0$. De plus, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\mathrm{d}_{VT}(x, y) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(|x(k)| + |y(k)|) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)| + \sum_{k=0}^{+\infty}|y(k)|\right),$$

et comme une distribution est à valeurs positives, on peut simplifier les valeurs absolues pour obtenir :

$$\mathrm{d}_{VT}(x, y) \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x(k) + \sum_{k=0}^{+\infty}y(k)\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

On a montré :

$$0 \leqslant \mathrm{d}_{VT}(x, y) \leqslant 1.$$

De plus une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc :

$$\mathrm{d}_{VT}(x, y) = 0 \iff \forall k \in \mathbf{N},\ |x(k) - y(k)| = 0 \iff \forall k \in \mathbf{N},\ x(k) = y(k) \iff x = y.$$

La relation $\mathrm{d}_{VT}(y, x) = \mathrm{d}_{VT}(x, y)$ est évidente, étant donné que $|x(k)-y(k)| = |-(x(k)-y(k))| = |y(k) - x(k)|$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. Enfin, par l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{VT}(x, z) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k) - z(k)| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|(x(k) - y(k)) + (y(k) - z(k))| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(|x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k) - y(k)| + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|y(k) - z(k)| \\
&= \mathrm{d}_{VT}(x, y) + \mathrm{d}_{VT}(y, z),
\end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer les quatre propriétés demandées.
Remarque. On a implicitement démontré que d_{VT} est une distance sur $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}$.

11. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{VT}(p_X, p_Y) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|\mathrm{P}(X = k) - \mathrm{P}(Y = k)| \\
&= \frac{1}{2}(|\mathrm{P}(X = 0) - \mathrm{P}(Y = 0)| + |\mathrm{P}(X = 1) - \mathrm{P}(Y = 1)|) \\
&= \frac{1}{2}(|(1-\lambda) - (1-\mu)| + |\lambda - \mu|) \\
&= |\lambda - \mu|.
\end{aligned}$$

12. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{VT}\left(p_X, \pi_\lambda\right) &= \frac{1}{2}\left(\left|\mathrm{P}(X=0)-\pi_\lambda(0)\right| + \left|\mathrm{P}(X=1)-\pi_\lambda(1)\right| + \sum_{k=2}^{+\infty}\left|-\pi_\lambda(k)\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left|1-\lambda-e^{-\lambda}\right| + \left|\lambda-\lambda e^{-\lambda}\right| + e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left|1-\lambda-e^{-\lambda}\right| + \lambda\left|1-e^{-\lambda}\right| + e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1-\lambda\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left|1-\lambda-e^{-\lambda}\right| + \lambda\left|1-e^{-\lambda}\right| + e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)\right)
\end{aligned}$$

Or $\lambda > 0$, donc : $1-e^{-\lambda} > 0$. De plus on sait que l'on a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1+x$. Appliqué à $x=-\lambda$, cela donne : $0 \geqslant 1-\lambda-e^{-\lambda}$. Donc :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_X, \pi_\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(1-\lambda-e^{-\lambda}\right) + \lambda\left(1-e^{-\lambda}\right) + e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)\right) = \lambda\left(1-e^{-\lambda}\right),$$

ce qu'il fallait démontrer. En réutilisant l'inégalité $e^{-\lambda} \geqslant 1-\lambda$, on obtient :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_X, \pi_\lambda\right) \leqslant \lambda \cdot \lambda = \lambda^2.$$

13. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$2\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|\mathrm{P}_n(X_n=k) - \frac{e^{-1}}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{n}\left|\mathrm{P}_n(X_n=k) - \frac{e^{-1}}{k!}\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|-\frac{e^{-1}}{k!}\right|.$$

Or, d'après la question 5 d'une part, et l'identité $e^{-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$ d'autre part, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on a :

$$\mathrm{P}_n(X_n=k) - \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = -\frac{1}{k!}\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!},$$

donc :

$$2\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!},$$

ce qu'il fallait démontrer.

14. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout entier $k \geqslant n+1$, on a :

$$k! = \left(\prod_{\ell=n+2}^{k}\ell\right)\cdot(n+1)! \geqslant \left(\prod_{\ell=n+2}^{k}(n+2)\right)\cdot(n+1)! = (n+2)^{k-(n+1)}(n+1)!,$$

donc :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} \overset{(\ell=k-(n+1))}{=} \frac{1}{(n+1)!}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)^{\ell}},$$

d'où la majoration désirée. On reconnaît là une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$, donc :

$$r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Mais comme r_n est une somme de réels positifs, on peut aussi la minorer par son premier terme. Ainsi on a :
$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$
Les deux extrémités de cet encadrement sont clairement équivalentes asymptotiquement à $\dfrac{1}{(n+1)!}$ quand $n \to +\infty$. Donc, par le théorème des gendarmes :
$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}.$$

15. Soit $n \in \mathbf{N}$ au voisinage de $+\infty$. On reprend l'identité démontrée dans la question 13. Intéressons-nous à la première somme du membre de droite. Comme $\displaystyle\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ est le reste d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées (en effet $\left(\dfrac{1}{i!}\right)_{i\geqslant 0}$ est décroissante, positive et converge vers 0), il est majoré en valeur absolue par son premier terme :
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leqslant \frac{1}{(n-k+1)!},$$
donc :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}.$$
Or, par la formule du binôme de Newton :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^k 1^{n+1-k} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1},$$
donc :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leqslant \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 2 \cdot \frac{2^n}{(n+1)!}.$$
Ainsi :
$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| + \frac{e^{-1}}{2} r_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right) + \frac{e^{-1}}{2} r_n.$$
Or : $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)!}$, et on a : $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant \dfrac{2^n}{(n+1)!}$, donc : $r_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{2^n}{(n+1)!}\right)$. On peut conclure :
$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right).$$

Remarque. En particulier, par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = 0$. Comme d_{VT} définit une distance sur $\mathcal{D}_{\mathbf{N}}$ (on l'a fait remarquer à la fin de la question 10), ceci permet de formaliser l'idée que $\left(p_{X_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers π_1 (à ceci près que le programme de classes préparatoires ne parle de convergence que dans les espaces vectoriels normés).

3 Autres estimations de distances en variation totale

16. Il est clair que $x * y$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ (en effet x et y le sont, donc pour tout k entier naturel le nombre $(x * y)(k)$ est une somme de réels positifs). Pour que ce soit une distribution sur $\mathbf{N}$, il suffit donc de démontrer : $\sum_{k=0}^{+\infty}(x * y)(k) = 1$. Or on reconnaît un produit de sommes de réels positifs :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(x * y)(k) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{i+j=k} x(i)y(j) = \left(\sum_{k\in\mathbf{N}} x(i)\right)\left(\sum_{j\in\mathbf{N}} y(j)\right) = 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi $x * y$ est bien une distribution sur $\mathbf{N}$.

17. Soit $k \in \mathbf{N}$. Comme X et Y sont à valeurs positives et entières, on a :

$$(X + Y = k) = \bigcup_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant k \\ i+j=k}} (X = i) \cap (Y = j).$$

Par σ-additivité et indépendance des variables aléatoires X et Y, on en déduit :

$$\mathrm{P}(X + Y = k) = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant k \\ i+j=k}} \mathrm{P}\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant k \\ i+j=k}} \mathrm{P}\left(X = i\right)\mathrm{P}\left(Y = j\right),$$

c'est-à-dire :

$$p_{X+Y}(k) = \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant k \\ i+j=k}} p_X(i)p_Y(j) = p_X * p_Y(k),$$

d'où : $p_{X+Y} = p_X * p_Y$, ce qu'il fallait démontrer.

18. Soit $k \in \mathbf{N}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
|(x * y)(k) - (u * v)(k)| &= \left|\sum_{i+j=k} (x(i)y(j) - u(i)v(j))\right| \\
&\leqslant \sum_{i+j=k} |x(i)y(j) - u(i)v(j)| \\
&= \sum_{i+j=k} |(x(i) - u(i) + u(i))y(j) - u(i)v(j)| \\
&= \sum_{i+j=k} |(x(i) - u(i))y(j) - u(i)(v(j) - y(j))| \\
&\leqslant \sum_{i+j=k} (|(x(i) - u(i))y(j)| + |u(i)(v(j) - y(j))|) \\
&= \sum_{i+j=k} |(x(i) - u(i))y(j)| + \sum_{i+j=k} |u(i)(v(j) - y(j))|,
\end{aligned}$$

et par multiplicativité de la valeur absolue (et positivité de y et u), on peut conclure :

$$|(x * y)(k) - (u * v)(k)| \leqslant \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|.$$

19. On a :

$$2\mathrm{d}_{VT}(x*y, u*v) = \sum_{k=0}^{+\infty} |(x*y)(k)-(u*v)(k)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|\right).$$

On reconnaît encore des produits de sommes de réels positifs :

$$\sum_{k\in\mathbf{N}}\sum_{i+j=k} y(j)|x(i)-u(i)| = \left(\sum_{j\in\mathbf{N}} y(j)\right)\left(\sum_{i\in\mathbf{N}} |x(i)-u(i)|\right) = 1\times 2\mathrm{d}_{VT}(x,u),$$

et de même : $\sum_{k\in\mathbf{N}}\sum_{i+j=k} u(i)|y(j)-v(j)| = 2\mathrm{d}_{VT}(y,v)$. Donc :

$$2\mathrm{d}_{VT}(x*y,u*v) \leqslant 2\mathrm{d}_{VT}(x,u)+2\mathrm{d}_{VT}(y,v),$$

d'où le résultat après division par 2.

20. Soit $\lambda\in]0,1[$. Nous allons montrer pour tout $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$:

P_n : « pour toute variable aléatoire U suivant la loi $\mathcal{B}(n,\lambda)$, on a : $\mathrm{d}_{VT}(p_U,\pi_{n\lambda})\leqslant n\lambda^2$ »,

par récurrence sur n.
Pour $n=1$, le résultat découle de la question 12. D'où P_1.
Démontrons l'hérédité de la proposition. Soit $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$. Supposons P_n. Soit $\lambda\in]0,1[$, et soit U une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n+1,\lambda)$. Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n,\lambda)$ et $\mathcal{B}(1,\lambda)=\mathcal{B}(\lambda)$. Comme elles sont indépendantes, on sait que l'on a : $U_1+U_2\sim\mathcal{B}(n+1,\lambda)$. Autrement dit, U_1+U_2 et U ont même loi, donc : $p_U=p_{U_1+U_2}$, et donc par la question 17 :

$$p_U = p_{U_1}*p_{U_2}.$$

De même, soient V_1, V_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(n\lambda)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$. Comme elles sont indépendantes, on sait que l'on a : $V_1+V_2\sim\mathcal{P}((n+1)\lambda)$, donc : $\pi_{(n+1)\lambda}=p_{V_1+V_2}=p_{V_1}*p_{V_2}=\pi_{n\lambda}*\pi_\lambda$. On a donc, par la question précédente :

$$\mathrm{d}_{VT}(p_U,\pi_{n\lambda}) = \mathrm{d}_{VT}\left(p_{U_1}*p_{U_2},\pi_{n\lambda}*\pi_\lambda\right)\leqslant \mathrm{d}_{VT}(p_{U_1},\pi_{n\lambda})+\mathrm{d}_{VT}(p_{U_2},\pi_\lambda).$$

Comme U_1 suit la loi $\mathcal{B}(n,\lambda)$, l'hypothèse de récurrence P_n permet d'écrire : $\mathrm{d}_{VT}(p_{U_1},\pi_{n\lambda})\leqslant n\lambda^2$.
De plus U_2 suit la loi $\mathcal{B}(\lambda)$, donc d'après la question 12 on a : $\mathrm{d}_{VT}(p_{U_2},\pi_\lambda)\leqslant\lambda^2$. D'où :

$$\mathrm{d}_{VT}(p_U,\pi_{n\lambda})\leqslant n\lambda^2+\lambda^2=(n+1)\lambda^2,$$

ce qui démontre P_{n+1}. Ainsi P_n implique P_{n+1} pour tout $n\in\mathbf{N}\setminus\{0\}$ et la proposition est effectivement héréditaire.
Par principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $n\geqslant 1$ et toute variable aléatoire U suivant une loi binomiale de paramètres n et $\lambda\in]0,1[$, on a :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_U,\pi_{n\lambda}\right)\leqslant n\lambda^2.$$

21. Soit $k\in\mathbf{N}$ et soit n au voisinage de $+\infty$ (vérifiant en particulier : $n>\lfloor\alpha\rfloor$, ce qui assure que $\frac{\alpha}{n}\in]0,1[$). Par la question précédente, on a :

$$0\leqslant|\mathrm{P}(B_n=k)-\pi_\alpha(k)|\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}|\mathrm{P}(B_n=k)-\pi_\alpha(k)| = 2\mathrm{d}_{VT}\left(p_{B_n},\pi_{n\frac{\alpha}{n}}\right)\leqslant 2n\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2=\frac{2\alpha^2}{n}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(B_n=k)=\pi_\alpha(k)=e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}.$$

22. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ au voisinage de $+\infty$ (de sorte que $n > \lfloor \alpha \rfloor$ et $n > \lfloor \beta \rfloor$), notons B_n et C_n des variables aléatoires suivant des lois binomiales, respectivement de paramètres $\left(n, \dfrac{\alpha}{n}\right)$ et $\left(n, \dfrac{\beta}{n}\right)$.
D'après la question 10, d_{VT} vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant \mathrm{d}_{VT}\left(\pi_\alpha, p_{B_n}\right) + \mathrm{d}_{VT}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right) + \mathrm{d}_{VT}\left(p_{C_n}, \pi_\beta\right).$$

D'après la question 20, on a donc :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant \frac{\alpha^2+\beta^2}{n} + \mathrm{d}_{VT}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right).$$

Pour majorer $\mathrm{d}_{VT}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right)$, on raisonne par récurrence, en suivant de près la stratégie de la question 20. Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on a :

P_n : « Pour tout $(\lambda, \mu) \in]0,1[^2$, et pour toutes variables aléatoires X et Y suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, \lambda)$ et $\mathcal{B}(n, \mu)$, on a : $\mathrm{d}_{VT}\left(p_X, p_Y\right) \leqslant n|\lambda-\mu|$ »,

par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, le résultat découle immédiatement de la question 11. D'où P_1.
Démontrons l'hérédité de la proposition. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Supposons P_n. Soit $(\lambda, \mu) \in]0,1[^2$, et soient X, Y deux variables aléatoires suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n+1, \lambda)$ et $\mathcal{B}(n+1, \mu)$. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, \lambda)$ et $\mathcal{B}(\lambda)$, et Y_1, Y_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, \mu)$ et $\mathcal{B}(\mu)$. En reprenant le raisonnement effectué dans l'hérédité de la récurrence de la question 20, on a : $p_X = p_{X_1} * p_{X_2}$, et : $p_Y = p_{Y_1} * p_{Y_2}$. Donc par la question 17, on a :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_X, p_Y\right) \leqslant \mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_1}, p_{Y_1}\right) + \mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_2}, p_{Y_2}\right).$$

Comme X_1 et Y_1 suivent des lois binomiales de paramètres (n, λ) et (n, μ) respectivement, d'après l'hypothèse de récurrence P_n on a : $\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_1}, p_{Y_1}\right) \leqslant n|\lambda-\mu|$. Par la question 11, on a : $\mathrm{d}_{VT}\left(p_{X_2}, p_{Y_2}\right) \leqslant |\lambda-\mu|$. Donc :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(p_X, p_Y\right) \leqslant n|\lambda-\mu| + |\lambda-\mu| = (n+1)|\lambda-\mu|,$$

ce qui montre que P_n implique P_{n+1}, d'où l'hérédité.
Par principe de récurrence, on a donc P_n pour tout entier $n \geqslant 1$. En particulier, si l'on revient au contexte originel de notre question, si on applique cette proposition avec B_n et C_n, pour n au voisinage de $+\infty$, on a : $\mathrm{d}_{VT}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right) \leqslant n\left|\dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\beta}{n}\right| = |\alpha-\beta|$, donc finalement :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant \frac{\alpha^2+\beta^2}{n} + |\alpha-\beta|.$$

Quand $n \to +\infty$, cela donne :

$$\mathrm{d}_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant |\alpha-\beta|,$$

d'où le résultat.

Concours commun Mines et Ponts 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2 - PSI

m.laamoum@gmail.com.

Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

1. Nombre de points fixes d'une permutation

1 ▷ On a $\text{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$par suite $d_n \leq n!$ et $0 < \frac{d_n}{n!} \leq 1$ donc $\text{R}_{\text{cv}}\left(\sum\limits_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n\right) \geq \text{R}_{\text{cv}}\left(\sum\limits_{n\geq 0} x^n\right)$, d'où $R \geq 1$.

2 ▷ • Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et $\mathcal{P}_k$ l'ensemble de toutes les parties de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k éléments , on a $\text{Card}(\mathcal{P}_k) = \binom{n}{k}$.

L'événement $[X_n = k]$ est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes. Pour tout $I \in \mathcal{P}_k$ notons $F(I) = \{\sigma \in [X_n = k] \ , \forall i \in I \ \ \sigma(i) = i\}$, c'est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ dont les points fixes sont exactement les éléments de I .

On a $[X_n = k] = \bigcup\limits_{I\in\mathcal{P}_k} F(I)$ et $F(I) \cap F(J) = \varnothing$ si $I \neq J$ donc

$$\text{Card}([X_n = k]) = \sum_{I\in\mathcal{P}_k} \text{Card}(F(I))$$

Si $\sigma \in F(I)$ alors $\sigma_{|I} = id_I$ et $\sigma_{|\overline{I}}$ la restriction de σ à $\overline{I}$, le complémentaire de I , est un dérangement de $\overline{I}$, ainsi l'application $\sigma \mapsto \sigma_{|\overline{I}}$ établit une bijection de $F(I)$ sur l'ensemble des dérangements de $\overline{I}$, ce dernier est en bijection avec l'ensemble des dérangements de $[\![1, n-k]\!]$, donc $\text{Card}(F(I)) = d_{n-k}$ et

$$\text{Card}([X_n = k]) = \sum_{I\in\mathcal{P}_k} d_{n-k} = d_{n-k} \sum_{I\in\mathcal{P}_k} 1 = d_{n-k}\ \text{Card}(\mathcal{P}_k)$$

d'où

$$\boxed{\text{Card}([X_n = k]) = \binom{n}{k} d_{n-k}.}$$

• $\mathbb{P}_n$ est la probabilité uniforme sur $\mathcal{S}_n$ donc

$$\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{\text{Card}([X_n = k])}{\text{Card}(\mathcal{S}_n)} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k} d_{n-k}.$$

ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}}$$

3 ▷ On a $([X_n = k])_{0\leq k\leq n}$ est un système complet d'événements (*ils sont deux à deux disjoints et de réunion égale à* $\mathcal{S}_n$) donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_n(X_n = k) = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$$

Soit $x \in]-1,1[$, on a $s(x)e^x = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$ ($R \geq 1$ *donc* s *est définie sur* $]-1,1[$ *et* exp *est de rayon de convergence infini*) , le théorème du produit de Cauchy donne : $s(x)e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ avec $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} = 1$ d'où

$$\boxed{s(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.}$$

On a $R \geq 1$, si on suppose que $R > 1$ alors s est définie et continue en 1, mais la formule précédente donne $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} s(x) = +\infty$, ce qui est absurde, donc $R = 1$.

4 ▷ Soit $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}(1-x)s(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}x^n\\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}\right)x^n\end{aligned}$$

Puisque $(1-x)s(x) = e^{-x}$ alors $(1-x)s(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n$, par unicité des coefficients d'un DSE on a

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \geq 1$$

une sommation de cette relation entre 1 et n donne $\dfrac{d_n}{n!} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$, ainsi

$$\boxed{d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

5 ▷ Soit $k \in [\![0, n]\!]$, d'après la question **2.** on a $\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$ donc

$$\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!(n-k)!}\left((n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.}$$

6 ▷ Si $i \in [\![1, n]\!]$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

- On a $U_i(\mathcal{S}_n) = \{0, 1\}$, l'événement $[U_i = 1] = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) = i\}$ est en bijection avec $\mathcal{S}_{n-1}$ (*par l'application qui à σ associe sa restriction à $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$*) , donc $\text{Card}([U_i = 1]) = (n-1)!$.

Ainsi $\mathbb{P}_n(U_i = 1) = \dfrac{\text{Card}([U_i = 1])}{\text{Card}(\mathcal{S}_n)} = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}_n(U_i = 0) = 1 - \mathbb{P}_n(U_i = 1) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

U_i suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

- On suppose ici $n \geq 2$. Soit $i \neq j$, on a $U_iU_j(\mathcal{S}_n) = \{0, 1\}$ et

$$[U_iU_j = 1] = [U_i = 1] \cap [U_j = 1] = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, \sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j\}$$

comme précédement $[U_iU_j = 1]$ est en bijection avec $\mathcal{S}_{n-2}$ donc il est de cardinal $(n-2)!$ ce qui donne

$$\mathbb{P}_n(U_iU_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$$

Donc U_iU_j suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$.

7 ▷ • Soit $k \in [\![0, n]\!]$, si $\sigma \in [X_n = k]$ alors il existe $\{i_1, ..., i_k\} \subset [\![1, n]\!]$ tel que $U_{i_1}(\sigma) = ... = U_{i_k}(\sigma) = 1$ et $U_j(\sigma) = 0$ si $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$, donc

$$X_n(\sigma) = U_{i_1}(\sigma) + ... + U_{i_k}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} U_i(\sigma)$$

ainsi

$$\boxed{X_n = \sum_{i=1}^{n} U_i}$$

- <u>Espérance :</u> on a $U_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\mathbb{E}(U_i) = \frac{1}{n}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) = 1$.

<u>Variance :</u> on a $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2$ et $X_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i^2 + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} U_iU_j$, or $U_i^2 = U_i$ pout tout i , donc $X_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i + 2 \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} U_iU_j$ et

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(U_iU_j) = 1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(U_iU_j).$$

de plus $U_iU_j \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)$ pout tout $i<j$, donc $\mathbb{E}(U_iU_j) = \frac{1}{n(n-1)}$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n}^{n} \mathbb{E}(U_iU_j) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\le i<j\le n}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} 1 \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (n-i) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ainsi $\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = 2$ et $\mathbb{V}\left(X_n\right) = 1$. Conclusion

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X_n\right) = 1 \text{ ,} \mathbb{V}\left(X_n\right) = 1}$$

8 ▷ Soit k un entier naturel , pour $n \geq k$ on a $\mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ donc

$$y_k = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

par suite

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

et Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

9 ▷ • Soit $t \in \mathbb{R}$, on a $G_{X_n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) t^k$ et $\mathbb{P}_n\left(X_n = k\right) = \frac{1}{k!} \sum\limits_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$ donc

$$G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{k!i!} t^k \overset{(j=n-i)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{k!(n-j)!} t^k$$

remarquons que

$$\begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ k \leq j \leq n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq j \end{cases}$$

donc

$$G_{X_n}(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{t^k}{k!} \right) \overset{(j=n-i)}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=0}^{n-i} \frac{t^k}{k!} \right)$$

D'autre part $Y \sim \mathcal{P}(1)$ donc

$$G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) t^k = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^{t-1}$$

- Soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$G_{X_n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right) - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right).$$

le reste $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$ converge vers 0, quad n tend vers $+\infty$, donc pour $\varepsilon > 0$ il existe N tel que , si $n \geq N$ alors $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right| \leq \frac{\varepsilon}{e}$, par suite

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right)\right| \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right| \leq \frac{\varepsilon}{e} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \leq \varepsilon$$

donc $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\right)$ converge vers 0 , quad n tend vers $+\infty$, ce qui donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^{t-1} = G_Y(t)}$$

2. Convergence en variation totale

10 ▷ Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbb{N}$.

- Par inégalité triangulaire on a : $|x(k) - y(k)| \leq x(k) + y(k)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$ donc

$$\mathrm{d_{VT}}(x, y) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) = 1$$

ainsi $0 \leq \mathrm{d_{VT}}(x, y) \leq 1$;

- Séparabilité : on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d_{VT}}(x, y) &= 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| = 0 \\
&\Leftrightarrow |x(k) - y(k)| = 0,\ \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow x(k) = y(k),\ \forall k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{d_{VT}}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

- Symétrie : $\mathrm{d_{VT}}(x, y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |y(k) - x(k)| = \mathrm{d_{VT}}(x, y)$.

- Inégalité triangulaire : on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d_{VT}}(x,z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)-y(k)+y(k)-z(k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} (|x(k)-y(k)|+|y(k)-z(k)|) \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)-y(k)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |y(k)-z(k)|
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{d_{VT}}(x,z) \leq \mathrm{d_{VT}}(x,y)+\mathrm{d_{VT}}(y,z)$.

11 ▷ Soient X et Y deux variables de Bernoulli, $X \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{B}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in \,]0,1[$.
On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d_{VT}}(p_X, p_Y) &= \frac{1}{2}|p_X(1)-p_X(1)| + \frac{1}{2}|p_X(0)-p_X(0)| \\
&= \frac{1}{2}|\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(Y=1)| + \frac{1}{2}|\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(Y=0)| \\
&= \frac{1}{2}|\lambda-\mu| + \frac{1}{2}|(1-\lambda)-(1-\mu)|
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d_{VT}}(p_X, p_Y) = |\lambda-\mu|}$$

12 ▷ • Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in \,]0,1[$.
On a $\pi_\lambda(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $p_X(1)=\lambda$, $p_X(0) = 1-\lambda$ et $p_X(k)=0$ pour $k \geq 2$, donc ,

$$\begin{aligned}
2\mathrm{d_{VT}}(p_X\ , \pi_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |p_X(k)-\pi_\lambda(k)| \\
&= |p_X(0)-\pi_\lambda(0)| + |p_X(1)-\pi_\lambda(1)| + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_\lambda(k) \\
&= |p_X(0)-\pi_\lambda(0)| + |p_X(1)-\pi_\lambda(1)| + 1 - \pi_\lambda(0) - \pi_\lambda(1) \\
&= \left|1-\lambda-e^{-\lambda}\right| + \left|\lambda-\lambda e^{-\lambda}\right| + 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Soit $\varphi : x \mapsto x + e^{-x} - 1$, on a $\varphi'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$ pour tout $x \in \,]0,1[$, φ est croissante sur $]0,1[$ et $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(x) \geq 0$ sur $]0,1[$.
Donc

$$2\mathrm{d_{VT}}(p_X\ , \pi_\lambda) = \lambda + e^{-\lambda} - 1 + \lambda - \lambda e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$$

et

$$\boxed{\mathrm{d_{VT}}(p_X\ , \pi_\lambda) = \lambda\left(1-e^{-\lambda}\right)}$$

- On a $\varphi(\lambda) \geq 0$ donc $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$ d'où $\boxed{\mathrm{d_{VT}}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2}$.

13 ▷ On $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad p_{X_n}(k) = \mathbb{P}_n(X_n = k) = \frac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$, $p_{X_n}(k) = 0$ si $k > n$ et $\pi_1(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$, donc

$$\begin{aligned}
2\mathrm{d_{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| \\
&= \sum_{k=0}^{n} |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \pi_1(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{e^{-1}}{k!} - \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

sachant que $e^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ alors

$$\boxed{2\mathrm{d_{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.}$$

14 ▷ • Soit n un entier naturel, on a $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+n+1)!}$.

Ecrivons pour tout $k \geq 0$, $(k+n+1)! = (n+1)!\underbrace{(n+2)...(n+k+1)}_{k \text{ termes}}$ donc $(k+n)! \geq (n+1)!(n+2)^k$,

ainsi

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

• On a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$, par suite

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \quad (*)$$

Ainsi

$$\boxed{r_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}}$$

15 ▷ De la question **13.** on a ,

$$\begin{aligned}
2\mathrm{d_{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} r_{n-k} + e^{-1} r_n
\end{aligned}$$

la relation (*) donne $0 \leq r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{2}{(n+1)!}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} r_{n-k} \leq 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k+1)!} \leq 2 \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!(n-k+1)!}$$

on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!(n-k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui donne pour n assez grand

$$2\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_{X_n}, \pi_1\right) \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2e^{-1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(pX_n, \pi_1\right) \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)}$$

3. Autres estimations de distances en variation totale

16 ▷ Soit x et y sont deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, $x * y$ est définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}^+$.
Les séries $\sum x(n)$ et $\sum y(n)$ convergent absolument, le théorème du produit de Cauchy donne : la série $\sum v_n$, avec $v_n = \sum\limits_{i+j=n} x(i)y(j)$, converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n). \sum_{n=0}^{+\infty} y(n) = 1$$

comme $v_n = (x * y)(n)$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (x * y)(n) = 1$.
Ainsi $x * y$ est une distribution sur $\mathbb{N}$.

17 ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$,on a $p_{X+Y}(n) = \mathbb{P}(X + Y = n)$. Soit $\omega \in [X + Y = n]$ alors il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $X(\omega) = k$ et $Y(\omega) = n - k$ donc

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k)$$

et $\mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \mathbb{P}(\,[X = k] \cap [Y = n - k])$, l'indépendance de X et Y donne
$\mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \mathbb{P}\,(X = k)\,\mathbb{P}\,(Y = n - k)$, par suite

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\,(X = k)\,\mathbb{P}\,(Y = n - k)$$

qui s'écrit

$$p_{X+Y}(n) = \sum_{k=0}^{n} p_X(k) p_X\,(n-k) = p_X * p_Y(n)$$

d'où $\boxed{p_{X+Y} = p_X * p_Y}$.
On peut le faire en utilisant les fonctions génératrices et la relation $G_{X+Y} = G_X G_Y$, vérfiée par des variables indépendantes .

18 ▷ Soient $(x,y,u,v) \in (\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^4$ et k entier naturel, on a

$$\begin{aligned}
|(x*y)(k)-(u*v)(k)| &= \left|\sum_{i+j=k}(x(i)-u(i)+u(i))\,y(j)-\sum_{i+j=k}u(i)v(j)\right| \\
&= \left|\sum_{i+j=k}(x(i)-u(i))\,y(j)+\sum_{i+j=k}u(i)\,(y(j)-v(j))\right| \\
&\leq \sum_{i+j=k}y(j)|x(i)-u(i)|+\sum_{i+j=k}u(i)|y(j)-v(j)|.
\end{aligned}$$

19 ▷ On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x*y,u*v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|(x*y)(k)-(u*v)(k)| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}y(j)|x(i)-u(i)|+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}u(i)|y(j)-v(j)|
\end{aligned}$$

La formule du produit de Cauchy donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i+j=k}y(j)|x(i)-u(i)| &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}y(k)\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-u(k)|\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-u(k)|\right)
\end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x*y,u*v) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|(x*y)(k)-(u*v)(k)| \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|x(k)-u(k)|+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}|y(k)-v(k)|
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x*y,u*v)\leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(x,u)+\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(y,v)}$$

20 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \,]0,1[$, $U \sim \mathcal{B}(n,\lambda)$ donc $p_U(k)=\binom{n}{k}\lambda^k\,(1-\lambda)^{n-k}$ si $k \in [\![0,n]\!]$.
Soit $X_1,...,X_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre λ , on sait que $X_1+...+X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\lambda)$ *(c'est du cours)* donc $p_U=p_{X_1+...+X_n}$.
Soit $Y_1,...,Y_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Poison de paramètre λ , on sait que $Y_1+...+Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{P}(n\lambda)$ donc $\pi_{n\lambda}=p_{Y_1+...+Y_n}$.
D'après la question **17.** $p_U=p_{X_1+...+X_{n-1}}*p_{X_n}$ car $X_1+...+X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes , de même $\pi_{n\lambda}=p_{Y_1+...+Y_{n-1}}*p_{Y_n}=p_{Y_1+...+Y_{n-1}}*\pi_\lambda$.
La question **19.** donne

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}\left(p_U,\pi_{n\lambda}\right)\leq \mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_1+...+X_{n-1}},p_{Y_1+...+Y_{n-1}})+\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(p_{X_n},\pi_\lambda)$$

D'après la question **12.** on a $\mathrm{d_{VT}}(p_{X_n}, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$, donc

$$\mathrm{d_{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq \mathrm{d_{VT}}(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}) + \lambda^2$$

ainsi par récurrence on obtient :

$$\boxed{\mathrm{d_{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq n\lambda^2}$$

21 ▷ Soit $\alpha > 0$, $n > \lfloor \alpha \rfloor$ et $B_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$, on applique le résultat précédent avec $\lambda = \frac{\alpha}{n} \in \left]0, 1\right[$.

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)| = \mathrm{d_{VT}}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) \leq \frac{\alpha^2}{n}$$

donc pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a $|p_{B_n}(k) - \pi_\alpha(k)| \leq \frac{2\alpha^2}{n}$ ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{B_n}(k) = \pi_\alpha(k)$.
Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n = k\right) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}}$$

22 ▷ Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n > \max(\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \beta \rfloor)$, $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\alpha}{n}$ et $Y_1, ..., Y_n$ des variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\beta}{n}$.
Posons $B_n = X_1 + ... + X_n$ et $C_n = Y_1 + ... + Y_n$, on sait que $B_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\alpha}{n})$ et $C_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{\beta}{n})$.
On a

$$\mathrm{d_{VT}}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq \mathrm{d_{VT}}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) + \mathrm{d_{VT}}\left(p_{C_n}, \pi_\beta\right) + \mathrm{d_{VT}}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right)$$

d'après la question **20.** $\mathrm{d_{VT}}\left(p_{B_n}, \pi_\alpha\right) \leq \frac{\alpha^2}{n}$ et $\mathrm{d_{VT}}\left(p_{C_n}, \pi_\beta\right) \leq \frac{\beta^2}{n}$, avec la même méthode de la question **20.** on a

$$\mathrm{d_{VT}}\left(p_{B_n}, p_{C_n}\right) \leq \mathrm{d_{VT}}(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}) + \mathrm{d_{VT}}(p_{X_n}, p_{Y_n})$$

d'après la question **11.** $\mathrm{d_{VT}}(p_{X_n}, p_{Y_n}) = \left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right|$, donc

$$\mathrm{d_{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq \mathrm{d_{VT}}(p_{X_1+\ldots+X_{n-1}}, p_{Y_1+\ldots+Y_{n-1}}) + \left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right|$$

par récurrence on obtient

$$\mathrm{d_{VT}}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leq n\left|\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}\right| = |\beta - \alpha|$$

ainsi

$$\mathrm{d_{VT}}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\beta - \alpha| + \frac{\alpha^2}{n} + \frac{\beta^2}{n}$$

ceci est valable pour tout $n > \max(\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor \beta \rfloor)$, par passage à la limite on a

$$\boxed{\mathrm{d_{VT}}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leq |\beta - \alpha|}$$

FIN

(1) Card$S_n = n!$, donc $\dfrac{d_n}{n!} \leq 1$, et $R = R_{CV}\left(\sum \dfrac{d_n x^n}{n!}\right) \geq R_{CV}\left(\sum x^n\right) = 1$.

(2) On forme une permutation avec exactement k points fixes en choisissant les k points fixes parmi les n éléments puis, ce choix étant fait, en choisissant un dérangement de l'ensemble des $n-k$ autres éléments. Par conditionnement ("lemme des bergers"), on dénombre donc $\binom{n}{k} d_{n-k}$ permutations de ce type (on admet que le nombre de dérangements d'un ensemble E ne dépend que du cardinal de cet ensemble).

On a donc $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} d_{n-k}$ cas favorables à l'événement $(X_n = k)$ sur $n!$ possibles, d'où $P(X_n = k) = \dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.

(3) Les deux séries entières sont de rayon ≥ 1, donc par le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries entières : $\forall x \in]-1, 1[$, $s(x)e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) x^n$ d'après Q.2.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_n(X_n = k) = 1$ donc $s(x)e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Comme $R_{CV}\left(\sum \dfrac{x^n}{n!}\right) = +\infty$, le rayon de convergence de $\sum x^n$ est donc $\geq R$. Or il vaut 1, donc $1 \geq R$, ce qui donne $R = 1$ avec Q.1.

(4) Ainsi, $\forall x \in]-1, 1[$, $s(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$ (produit de Cauchy des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$, de rayons respectifs $+\infty$ et 1).

Par unicité du développement en série entière (rayon non nul), on en déduit $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

(5) On applique les formules de Q.2 et Q.4 : $P_n(X_n = k) = \dfrac{1}{k!(n-k)!}(n-k)! \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

(6) Les permutations fixant i sont en bijection avec les permutations de l'ensemble des $n-1$ autres éléments, d'où $(n-1)!$ cas favorables sur $n!$ possibles, d'où $P(U_i = 1) = 1/n$. On en déduit que $U_i \sim \mathcal{B}(1/n)$.

Si $i \neq j$, $U_i U_j(S_n) = \{0, 1\}$, donc $U_i U_j$ suit bien une loi de Bernoulli. On a $U_i(\sigma)U_j(\sigma) = 1$ ssi i et j sont points fixes de σ. On a donc $(n-2)!$ cas favorables, d'où $U_i U_j \sim \mathcal{B}(1/n(n-1))$.

(7) $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$ donc (linéarité de l'espérance) $E(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(U_i) = n \times (1/n) = 1$.

$X_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i^2 + \sum_{i\neq j} U_i U_j$ Or $U_i^2 = U_i$, d'où $E(X_n^2) = nE(U_1) + n(n-1)E(U_1 U_2) = n \times (1/n) + n(n-1) \times \dfrac{1}{n(n-1)} = 2$.

On en déduit $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1$ (merci à G. Barat qui m'avait signalé une erreur).

(8) Avec Q.5 : $P_n(X_n = k) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \to \frac{1}{k!}e^{-1}$ quand $n \to +\infty$.

On en déduit $y_k = \dfrac{1}{k!}e^{-1}$ et on reconnaît $Y \sim \mathcal{P}(1)$.

(9) On a pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$G_{X_n}(s) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!} = \sum_{i+k\leq n}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{i+k=m}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!}.$$

Or $\displaystyle\sum_{i+k=m}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!}$ est le terme général du produit de Cauchy des séries absolument convergentes : $\displaystyle\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^i}{i!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{s^k}{k!}$.

La série produit est donc elle aussi absolument convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{i+k=m}\frac{(-1)^i s^k}{i!k!} = \left(\sum_{i\geq 0}\frac{(-1)^i}{i!}\right)\left(\sum_{k\geq 0}\frac{s^k}{k!}\right) = e^{-1}e^s.$$

Or $Y \sim \mathcal{P}(1)$ donc $G_Y(s) = e^{-1}e^s$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s)$.

(10) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on majore $|x(k)-y(k)| \leq x(k)+y(k)$. donc $d_{VT}(x,y) \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x(k)+y(k) = 1$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) = 1$.

On a une somme de termes positifs, donc elle est d'une part positive, et si elle est nulle, on a $\forall k \in \mathbb{N}$: $|x(k) - y(k)| = 0$, donc $x(k) = y(k)$, d'où $x = y$. La réciproque est triviale, de même que la symétrie.

Pour trois distributions x, y, z, on a pour tout k $|x(k) - z(k)| \leq |x(k) - y(k) + y(k) - z(k)| \leq |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)|$, d'où le résultat en sommant membre à membre.

(11) $d_{VT}(p_X, p_Y) = \dfrac{1}{2}\left(|(1-\lambda) - (1-\mu)| + |\lambda - \mu|\right) = |\lambda - \mu|$.

(12) $2d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = |(1-\lambda) - e^{-\lambda}| + |\lambda - \lambda e^{-\lambda}| + \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ On note que $t \mapsto e^{-t}$ est convexe (dérivée seconde positive), donc $e^{-t} \geq 1 - t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On peut donc expliciter les valeurs absolues : $2d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = e^{-\lambda} - 1 + \lambda + \lambda(1 - e^{-\lambda}) + e^{-\lambda}(e^\lambda - 1 - \lambda) = 2\lambda(1 - e^{-\lambda})$ (après simplifications), d'où $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda(1 - e^{-\lambda})$. La même inégalité de convexité donne $0 \leq 1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$, d'où $d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$.

(13) $2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{e^{-1}}{k!}\right| + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{e^{-1}}{k!}$.

Or $\dfrac{1}{k!}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} - e^{-1}\right) = \frac{1}{k!}\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}$, et on a bien :

$$2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\right| + e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}.$$

(14) $r_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1+k)!}$. Or $(n+1+k)! = (n+1)!(n+2)\dots(n+k+1) \geq (n+1)!(n+2)^k$.
(k facteurs après $(n+1)!$, tous $\geq (n+2)$.)

D'où $r_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$.

En particulier, $r_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$, donc

$1 \leq (n+1)! r_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{(1-1/n+2)} \to 1$. D'où $r_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$.

(NB : il n'est pas utile d'invoquer Stirling dans ce contexte.)

(15) La suite $\frac{(-1)^i}{i!}$ est de signe alterné, sa valeur absolue $\frac{1}{i!}$ décroit et tend vers 0, donc on peut appliquer le théorème des séries alternées, et en particulier $\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$.

On en déduit :
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left|\sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

D'après Q.14, $e^{-1}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sim \frac{e^{-1}}{(n+1)!}$.

Les deux termes du membre de droite de Q.13 sont donc dominés et $d_{VT}(p_{X^n}, \pi_1) = O(\frac{2^n}{(n+1)!}$.

(16) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x * y(k) \in \mathbb{N}$.
De plus, $x * y(k)$ est le terme général du produit de Cauchy des séries $\sum x(i)$ et $\sum y(j)$, qui sont absolument convergentes et de somme 1. On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} x * y(k) = \sum_{i=0}^{+\infty} x(i) \sum_{j=0}^{+\infty} y(j) = 1$.

(17) On considère le système complet d'événements $(X = i)_{i\in\mathbb{N}}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$p_{X+Y}(k) = P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X+Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i)p_Y(k-i)$ car X et Y sont indépendantes.

On a donc $p_{X+Y}(k) = p_X * p_Y(k)$.

(18) On a $x*y(k) - u*v(k) = \sum_{i+j=k} x(i)y(j) - u(i)v(j) = \sum_{i+j=k} (x(i)-u(i))y(j) + u(i)(y(j)-v(j))$
et par inégalité triangulaire : $|x*y(k) - u*v(k)| \leq \sum_{i+j=k} y(j)|x(i)-u(i)| + u(i)|y(j)-v(j)|$.

(19) Encore des produits de Cauchy ! Les séries $\sum_{j\geq 0} y(j)$ et $\sum_{i\geq 0} |x(i) - u(i)|$ sont absolument convergentes (positives), de sommes respectives 1 et $2d_{VT}(x,u)$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| = 2d_{VT}(x,u)$.

De même, $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)| = 2d_{VT}(y,v)$.

En sommant les deux membres de Q.18, il vient après simplification par 2 : $d_{VT}(x*y, u*v) \leq d_{VT}(x,u) + d_{VT}(y,v)$.

(20) On se donne n variables indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de loi $\mathcal{B}(\lambda)$.

Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,\lambda)$. (Justification : fonction génératrice $G_{X_1}(t)^n = (1-p+pt)^n$.)

De même, on se donne n variables indépendantes $Y_1, \ldots, Y_n$ de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. (Justification : fonction génératrice $G_{Y_1}(t)^n = e^{n\lambda(s-1)}$.)

En utilisant Q.19, on peut démontrer par récurrence sur n que $d_{VT}(p_{X_1+\cdots+X_n}, p_{Y_1+\cdots+Y_n}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_{VT}(p_{X_k}, p_{Y_k})$.

Or $p_{S_n} = p_U$ et $p_{Z_n} = \pi_{n\lambda}$ donc d'après Q.12 : $d_{VT}(p_U, \pi_{n\lambda}) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda^2 = n\lambda^2$.

(21) Comme $\alpha > 0$ et $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on a $0 < \dfrac{\alpha}{n} < 1$, donc B_n est bien définie. En appliquant Q.20 avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{n}$, il vient :

$d_{VT}(p_{B_n}, \pi_\alpha) \leq \dfrac{\alpha^2}{n} \to 0$ (quand $n \to +\infty$).

Or par définition, pour tout k, $|P(B_n = k) - e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}| \leq 2d_{VT}(p_{B_n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} P(B_n = k) = e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}$.

(22) On se donne comme à Q.21 une variable binomiale C_n de paramètres n et $\dfrac{\beta}{n}$, dès que $n > \lfloor \beta \rfloor$. On supposera que n est assez grand pour que B_n et C_n soient bien définies.

On procède comme en Q.20 en considérant n variables indépendantes X_i de loi $\mathcal{B}(\alpha/n)$ et n variables indépendantes Y_i de loi $\mathcal{B}(\beta/n)$, de sorte que $p_{B_n} = p_{X_1+\ldots X_n}$ et $p_{C_n} = p_{Y_1+\cdots+Y_n}$.

D'après Q.20 et Q.11, on a

$d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}) \leq n d_{VT}(p_{X_1}, p_{Y_1}) = n\left|\dfrac{\alpha}{n} - \dfrac{\beta}{n}\right| = |\alpha - \beta|$.

Or par inégalité triangulaire (Q.10) :

$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n}) + d_{VT}(p_{B_n}, p_{C_n}) + d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta)$ donc

$d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha - \beta| + d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n}) + d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta)$.

On fait tendre n vers $+\infty$: $d_{VT}(\pi_\alpha, p_{B_n})$ et $d_{VT}(p_{C_n}, \pi_\beta)$ tendent vers 0 d'après Q.21, donc $d_{VT}(\pi_\alpha, \pi_\beta) \leq |\alpha - \beta|$.