PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n^{o} 4
Samedi 20 janvier 2024
Durée : 4 heures

***

Documents et calculatrices interdits.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Vous traiterez au choix un des deux sujets suivants :

— le sujet 1 (CCINP/E3A) constitué de trois problèmes indépendants.

— le sujet 2 (Mines-Ponts) constitué d'un problème unique.
(L'épreuve des Mines dure officiellement 3 heures. Vous pouvez au choix traiter ce sujet en 4 heures, ou le traiter en 3 heures et traiter un des problèmes du sujet 1 en plus.)

SUJET 1

Problème 1 : Étude du minimum et du maximum d'une suite de variables aléatoires uniformes indépendantes

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que : $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $\left(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs das une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} P(X \geqslant i).$$

On dispose d'une boîte dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel $\geqslant 2$. On tire k fois de suite un jeton dans cette boîte. On note son numéro et on le remet dans la boîte. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du $i^{\text{ème}}$ tirage, pour i dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, \ldots, X_k) \quad \text{et} \quad V_k = \max(X_1, \ldots, X_k).$$

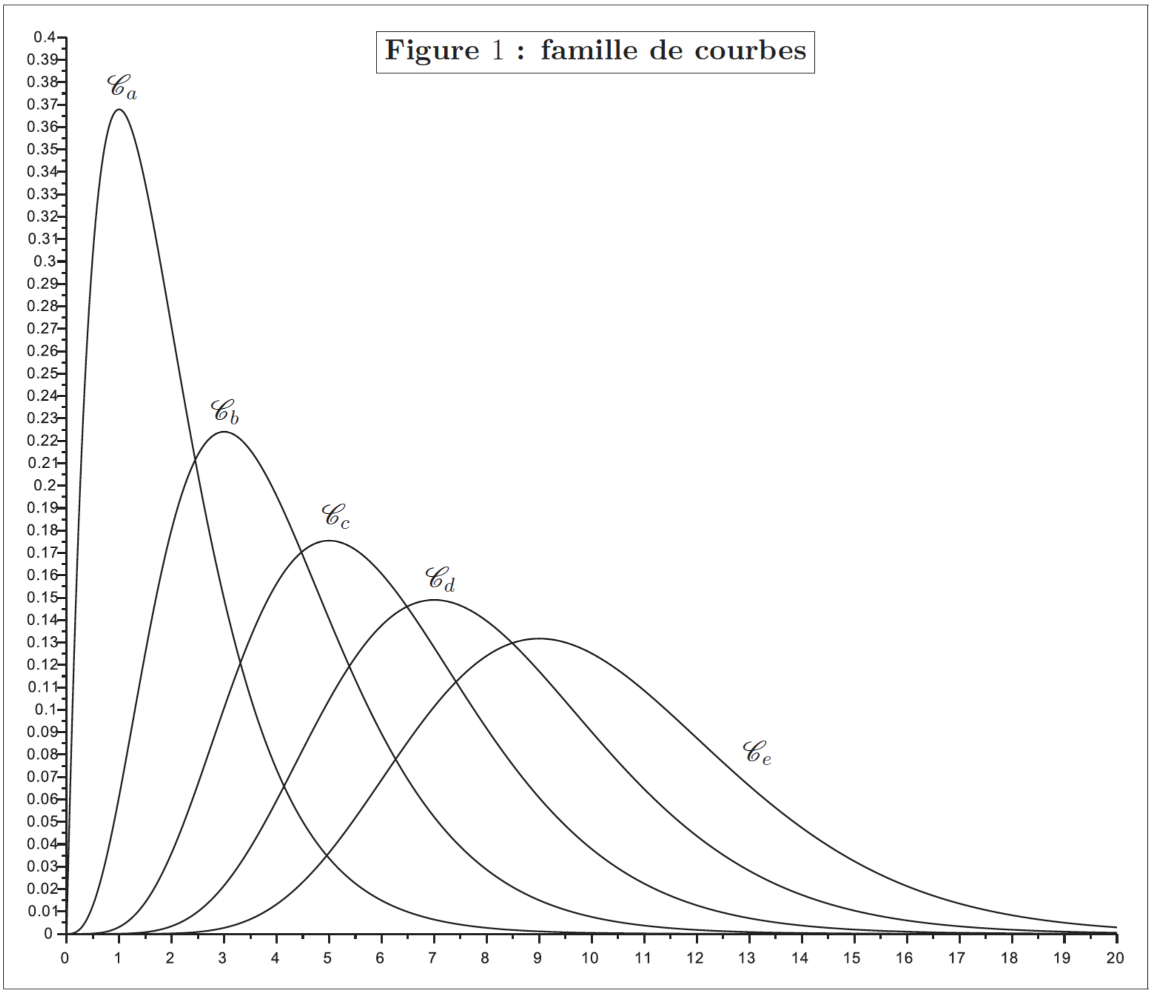
3. Exprimer $E(X_1)$, $E(X_1^2)$ et $V(X_1)$ en fonction de N.
4. On se propose de simuler en Python les variables V_k pour $N = 10$.
   (a) Ecrire une fonction s̑imulX qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $X_1, \ldots, X_{100}$. On pourra utiliser la fonction : random.randint.
   L'instruction random.randint(1,10) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 10]\!]$ uniformément.
   (b) En déduire une fonction R̂EALIV qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $V_1, \ldots, V_{100}$.
5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.
   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :
   $$P(U_k \geqslant i) = \left(\frac{N - i + 1}{N}\right)^k.$$
   (b) On appelle plusieurs fois la fonction R̂EALIV de la question 4b. On constate qu'à chaque fois, le résultat obtenu est une liste qui se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement ce résultat.
   (c) Exprimer $E(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $E(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
6. (a) On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[\![1, N]\!]$. Justifier que les variables $(Y_1, \ldots, Y_N)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.
   (b) En déduire $E(V_k)$ et $V(V_k)$ en fonction de $E(U_k)$ et $V(U_k)$.

7. On considère le couple de variables aléatoires (U_2, V_2).
   (a) Exprimer $U_2 + V_2$ et U_2V_2 en fonction de X_1 et X_2.
   (b) En déduire $V(U_2 + V_2)$ et $E(U_2V_2)$ en fonction de N.
   On peut en déduire par un calcul la covariance de U_2 et V_2, notée $\mathrm{cov}(U_2, V_2)$. On admet sa valeur :
   $$\mathrm{cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$
   (c) Exprimer $V(U_2)$ et $V(V_2)$ en fonction de N.
   (d) On note $\rho_2(N)$ le coefficient de corrélation de U_2 et V_2. Exprimer $\rho_2(N)$ en fonction de N.
   (e) Que peut-on dire de la suite $(\rho_2(N))_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}}$ lorsque N tend vers $+\infty$?
8. (a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, démontrer que $E(X^2) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(X \geqslant i)$.
   (b) Exprimer $E(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.
   (c) Exprimer $V(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.
   (d) Donner un équivalent de $V(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Problème 2 : Étude d'une famille de fonctions

On considère la fonction f et, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n, définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = 0 \text{ et } f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}.$$



1. On rappelle qu'un équivalent de $n!$ est $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.
   (a) Étudier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire son maximum.
   (b) Montrer que $f_n(n) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{n^{1/2}}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (c) Établir que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.
2. (a) Déterminer l'ensemble D des valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x \mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ est convergente.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} t^n \mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$.

   (b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de H_n'.

   (c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to 0} (H_n(x))$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (H_n(x))$.

   (d) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (H_n(x))$.

4. Dans la figure 1 de la page 4, on peut visualiser certaines des représentations graphiques des fonctions de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont celle de f_1 et f_5.

   (a) Lesquelles des courbes $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$, $\mathscr{C}_c$, $\mathscr{C}_d$ ou $\mathscr{C}_e$ de la figure 1 correspondent respectivement aux représentations graphiques de f_1 et de f_5 ?

   (b) Pouvez-vous faire le lien entre cette figure et certaines propriétés analysées dans les questions précédentes ?

5. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, a]$.

   (c) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Problème 3 : Un jeu de société

Présentation générale

On considère deux entiers $M \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $A \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un plateau de jeu infini sur lequel se trouve un parcours composé de cases numérotées par les entiers naturels. Un pion se trouve initialement sur la case numérotée 0 et il doit atteindre ou dépasser la case numérotée A pour terminer le jeu. À chaque tour de jeu, le joueur utilise un ordinateur qui génère aléatoirement et uniformément un élément de l'ensemble $[\![0, M-1]\!]$: le pion est avancé d'autant de cases que le nombre généré.

Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement au nombre de tours de jeu nécessaire pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, M-1]\!]$. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On considère la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1) si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n < A$, alors on pose $T = 0$;

2) sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n \geqslant A\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'espérance de la variable aléatoire T dans deux cas particuliers.

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Dans cette sous-partie, on effectue le lien entre la situation présentée dans l'introduction et le modèle considéré ci-dessus.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représentent les variables aléatoires X_n et S_n dans le contexte de la situation présentée ?

Q7. Que représente la variable aléatoire T ?

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Q8. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.$$

Q9. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant p} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} x^n$ est égal à 1 .

Q10. Soit $p \in \mathbb{N}$. En développant la fonction f en série entière, déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Q12. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire T ?

Q13. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant A$. Exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction des évènements $(S_{k-1} = A - 1)$ et $(X_k = 1)$. En déduire que :

$$P(T = k) = \binom{k-1}{A-1} \frac{1}{2^k}$$

Q14. Calculer $P(T = 0)$.

Il.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On déduit des résultats précédents que la fonction génératrice G_T de la variable aléatoire T est égale à la somme de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ sur son intervalle de convergence.

Q15. Déterminer la rayon de convergence R_T de la série entière $\sum\limits_{k \geqslant A} P(T = k)x^k$ et montrer que :

$$\forall x \in]-R_T, R_T[, \quad G_T(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)^A.$$

Q16. En déduire le nombre moyen de tours de jeu pour terminer notre partie.

Partie III - Étude d'un second cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $A \leqslant M$.

III. 1 - Calcul de la probabilité $P\left(S_n \leqslant k\right)$

Dans cette sous-partie, on pourra librement utiliser la formule suivante :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n+k-\ell}{n} = \binom{n+1+k}{n+1}.$$

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $\left(\left(X_{n+1} = 0\right), \ldots, \left(X_{n+1} = M-1\right)\right)$, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_{n+1} \leqslant k\right) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{k} P\left(S_n \leqslant k - \ell\right).$$

Q18. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P\left(S_n \leqslant k\right) = \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}$$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

On rappelle le résultat suivant qui pourra être utilisé librement dans la suite : si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(Z > n)$ converge, alors Z admet une espérance et on a l'égalité :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$$

Q19. Que peut-on dire des évènements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer sa valeur.

SUJET 2

Distance entre deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$

1 Nombre de points fixes d'une permutation.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'intervalle entier $[\![1,n]\!]=\{1,2,\cdots,n\}$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1,n]\!]$ vers lui-même. Si $\sigma\in\mathcal{S}_n$ est une permutation, on appelle **point fixe** de σ tout entier $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(i)=i$

Une permutation $\sigma\in\mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe. Pour tout $n\geqslant 1$, on note d_n le nombre de dérangements de l'intervalle entier $[\![1,n]\!]$. Par convention, on pose $d_0=1$.

On munit l'ensemble fini $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme notée P_n. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n,P_n)$, on définit la variable aléatoire X_n telle que, pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_n$, $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de la permutation σ.

On introduit enfin la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{d_n}{n!}x^n$, dont le rayon de convergence est noté R, et dont la somme sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$ est notée s :

$$\forall x\in]-R,R[\quad s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n$$

1. Rappeler le cardinal de $\mathcal{S}_n$. En déduire que $R\geqslant 1$.

2. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, montrer que le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k}$.

   En déduire que $P_n\left(X_n=k\right)=\dfrac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$.

3. Montrer que

$$\forall x\in]-1,1[\quad s(x)e^x=\frac{1}{1-x}.$$

   En déduire que $R=1$.

4. En partant de la relation $(1-x)s(x)=e^{-x}$ pour $x\in]-1,1[$, exprimer $\dfrac{d_n}{n!}$ pour n entier naturel, sous la forme d'une somme.

5. Montrer que la loi de la variable aléatoire X_n est donnée par

$$\forall k\in[\![0,n]\!]\quad P_n\left(X_n=k\right)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}.$$

6. Sur l'espace probabilisé fini $(\mathcal{S}_n, P_n)$, on définit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire U_i telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on ait $U_i(\sigma) = 1$ si $\sigma(i) = i$, et $U_i(\sigma) = 0$ sinon.

   Montrer que U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

   Montrer que, si $i \neq j$, la variable $U_i U_j$ suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

7. Exprimer X_n à l'aide des U_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. En déduire l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$.

8. Dans cette question, on fixe un entier naturel k. Déterminer

$$y_k = \lim_{n \to +\infty} P_n(X_n = k)$$

   Soit Y une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad P(Y = k) = y_k.$$

   Reconnaître la loi de Y.

9. On note G_{X_n} et G_Y les fonctions génératrices respectives des variables X_n et Y de la question précédente. Exprimer $G_{X_n}(s)$ sous forme de somme, pour s réel, et vérifier que

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to +\infty} G_{X_n}(s) = G_Y(s).$$

2 Convergence en variation totale

Dans la suite du problème, on appelle **distribution (de probabilités)** sur $\mathbb{N}$ toute application $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) = 1$$

On note $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}$ l'ensemble des distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$.

Si x et y sont deux distributions sur $\mathbb{N}$, on définit la **distance en variation totale** entre x et y par

$$d_{VT}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)|$$

10. Soient x, y, z trois distributions sur $\mathbf{N}$. Prouver les propriétés :

$$0 \leqslant d_{VT}(x, y) \leqslant 1$$
$$d_{VT}(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$
$$d_{VT}(y, x) = d_{VT}(x, y);$$
$$d_{VT}(x, z) \leqslant d_{VT}(x, y) + d_{VT}(y, z).$$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on note p_X la distribution de probabilités de X. Ainsi, p_X est l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad p_X(k) = P(X = k).$$

Il est clair que $p_X \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}$.

En particulier, si λ est un réel strictement positif, on appelle **distribution de Poisson de paramètre** λ l'application $\pi_\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \pi_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Soient X et Y deux variables de Bernoulli, ayant respectivement pour paramètres $\lambda \in]0,1[$ et $\mu \in]0,1[$. Calculer $d_{VT}(p_X, p_Y)$.
12. Soit X une variable de Bernoulli de paramètre $\lambda \in]0,1[$. Montrer que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda \left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

En déduire que

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leqslant \lambda^2$$

On considère de nouveau les variables aléatoires X_n introduites dans la partie 1. Les questions **8**. et **9**. semblent montrer une certaine "convergence" des lois des variables X_n vers la loi de Poisson de paramètre 1. Le but de la fin de cette partie est de montrer que

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que cette convergence est assez rapide.

13. Vérifier la relation, pour tout n entier naturel non nul,

$$2 d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

14. Pour n entier naturel, on pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Prouver la majoration

$$r_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

En déduire un équivalent simple de r_n lorsque n tend vers $+\infty$.

15. En continuant de majorer le second membre de l'égalité de la question **13.**, établir l'estimation

$$d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$$

On pourra faire intervenir des coefficients binomiaux.

3 Autres estimations de distances en variation totale

Si x et y sont deux distributions de probabilités sur $\mathbb{N}$, on définit l'application $x * y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ par

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (x * y)(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)y(k-i) = \sum_{i+j=k} x(i)y(j).$$

16. Montrer que $x * y$ est une distribution sur N.
17. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prouver la relation

$$p_{X+Y} = p_X * p_Y.$$

18. Soient $(x, y, u, v) \in (\mathcal{D}_{\mathbb{N}})^4$. Montrer que, pour tout k entier naturel,

$$|(x * y)(k) - (u * v)(k)| \leqslant \sum_{i+j=k} y(j)|x(i) - u(i)| + \sum_{i+j=k} u(i)|y(j) - v(j)|.$$

19. Avec les notations de la question précédente, établir l'inégalité

$$d_{VT}(x * y, u * v) \leqslant d_{VT}(x, u) + d_{VT}(y, v).$$

20. Soit U une variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in]0, 1[$. Prouver l'inégalité

$$d_{VT}\left(p_U, \pi_{n\lambda}\right) \leqslant n\lambda^2$$

21. Soit α un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n tel que $n > \lfloor \alpha \rfloor$, on note B_n une variable binomiale de paramètres n et $\dfrac{\alpha}{n}$. Pour tout k entier naturel, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(B_n = k\right).$$

On pourra utiliser la question précédente.

22. Soient α et β deux réels strictement positifs. En utilisant les résultats et les méthodes qui précèdent, montrer que

$$d_{VT}\left(\pi_\alpha, \pi_\beta\right) \leqslant |\beta - \alpha|$$

Fin du problème