Devoir surveillé de mathématiques n° 4 – Corrigé

$\boxed{\text{SUJET 1}}$

Problème 1 : Étude du minimum et du maximum d'une suite de variables aléatoires uniformes indépendantes *(D'après E3A Math 1 PC 2018)*

1. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $i \in [\![1, n]\!]$.
   La fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $[i, i+1]$ donc $\forall x \in [i, i+1], x^k \geqslant i^k$. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_i^{i+1} x^k \mathrm{d}x \geqslant \int_i^{i+1} i^k \mathrm{d}x = i^k$. En sommant l'inégalité de $i = 1$ à n, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} x^k \mathrm{d}x \geqslant \sum_{i=1}^{n} i^k$.

   Par la relation de Chasles, $S_k(n) \leqslant \displaystyle\int_1^{n+1} x^k \mathrm{d}x$.

   En raisonnant de même sur $[i-1, i]$, on obtient $\displaystyle\int_0^n x^k \mathrm{d}x \leqslant S_k(n)$.

   On a donc $\dfrac{n^{k+1}}{k+1} \leqslant S_k(n) \leqslant \dfrac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}$. puis $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{S_k(n)}{k+1} \leqslant \dfrac{\overbrace{((n+1)/n)^{k+1}}^{\to 1} - \overbrace{1/n^{k+1}}^{\to 0}}{k+1}$

   Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\dfrac{1}{n^{k+1}} S_k(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{k+1}.}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} P(X \geqslant i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k P(X = k)$.

   On a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} P(X \geqslant i) = E(X).}$

3. X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$.

   On sait donc que $\boxed{E(X_1) = \dfrac{N+1}{2}}$

   Par le théorème du transfert, $E(X_1^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{N} = \frac{S_2(N)}{N}$. $\boxed{E(X_1^2) = \dfrac{(N+1)(2N+1)}{6}.}$

   Par la formule de König-Huygens, $V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \dfrac{(N+1)(2N+1)}{6} - \dfrac{(N+1)^2}{4}$
   $= \dfrac{N+1}{2}\left(\dfrac{2N+1}{3} - \dfrac{N+1}{2}\right) = \dfrac{N+1}{2} \dfrac{4N+2-3N-3}{6} = \dfrac{N+1}{2}\dfrac{N-1}{6}$. $\boxed{V(X_1) = \dfrac{N^2-1}{12}.}$

4. (a) Par exemple :

```
def SIMULX():
    L=[]
    for i in range(100):
        L.append(random.randint(1,10))
    return L
```

ou :

```
def SIMULX():
    return [random.randint(1,10) for i in range(100)]
```

(b) Par exemple :

```
def REALIV():
    X=SIMULX()
    L=[]
    max=0
    for i in range(100):
        if X[i]>max:
            max=X[i]
        L.append(max)
    return L
```

ou :

```
def REALIV():
    X=SIMULX()
    return [max(X[:i+1]) for i in range(100)]
```

5. (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. $(U_k \geqslant i) = (\min(X_1, \ldots, X_k) \geqslant i) = \bigcap_{j=1^k} (X_k \geqslant i)$.

(En effet, si toutes les variables sont supérieures à i, la plus petite d'entre elles est $\geqslant i$. Et réciproquement, si la plus petite est $\geqslant i$, les autres étant plus grandes, elles sont toutes $\geqslant i$).

Par indépendance des tirages,

$$P(U_k \geqslant i) = \prod_{j=1}^{k} P(X_k \geqslant i) = \prod_{j=1}^{k} \sum_{j=i}^{N} P(X_k = j) = \prod_{j=1}^{k} \sum_{j=i}^{N} \frac{1}{N} = \prod_{j=1}^{k} \frac{N-i+1}{N}$$

On a bien $\boxed{P(U_k \geqslant i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.}$

(b) On a $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $V_{k+1} \geqslant V_k$ avec les V_k à valeurs dans $[\![1, 10]\!]$. Ainsi, dès que $V_{k_0} = 10$, on a $V_k = 10$ pour tout $k \geqslant k_0$.

De plus, $P(V_k = 10) = 1 - P(V_k \leqslant 9) = 1 - P(X_1 \leqslant 9 \cap \ldots \cap X_k \leqslant 9) = 1 - \prod_{i=1}^{k} P(X_i \leqslant 9)$ par indépendance.

Donc $P(V_k = 10) = 1 - (\frac{9}{10})^k$ qui tend vers 1 avec une vitesse de convergence exponentielle, il est donc normal qu'on atteigne rapidement 10 et que les simulations se terminent par un grand nombre de 10.

(c) U_k est à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Grâce à la formule démontrée à la question 2,

$$E(U_k) = \sum_{i=1}^{N} P(U_k \geqslant i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k = \frac{1}{N^k} \sum_{i=1}^{N} (N-i+1)^k \underset{j=N-i+1}{=} \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^{N} j^k.$$

$$\boxed{E(U_k) = \frac{S_k(N)}{N^k}.}$$

D'après la question 1, $S_k(N) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N^{k+1}}{k+1}$. On en déduit que $\boxed{E(U_k) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N}{k+1}.}$

6. (a) Les variables $(X_1, \ldots, X_N)$ sont indépendantes. Par le lemme des coalitions, les variables $(N+1-X_1, \ldots, N+1-X_N)$ sont indépendantes.

Soit $k \in [\![1,N]\!]$. $X_k(\Omega) = [\![1,N]\!]$. Comme $Y_k(\Omega) = \{N+1-k, k \in X_k(\Omega)\}$, on a également $Y_k(\Omega) = [\![1,N]\!]$. Pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $P(Y_k = j) = P(N+1-X_k = j)$
$= P(X_k = \underbrace{N+1-j}_{\in[\![1,N]\!]}) = \dfrac{1}{N}$. Ainsi,

$\boxed{\text{les variables } (Y_1, \ldots, Y_N) \text{ sont indépendantes et de même loi : la loi uniforme sur } [\![1,N]\!].}$

(b) $V_k = \max(X_1, \ldots, X_k) = -\min(-X_1, \ldots, -X_k)$
$= N+1-\min(N+1-X_1, \ldots, N+1-X_k) = N+1-\min(Y_1, \ldots, Y_k)$
On note $Z_k = \min(Y_1, \ldots, Y_k)$. Les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_k$ sont indépendantes et de même loi que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ donc Z_k suit la même loi que U_k.
Or $V_k = N+1-Z_k$
Par linéarité, $\boxed{E(V_k) = N+1-E(Z_k) = N+1-E(U_k).}$
Par la formule $V(aX+b) = a^2V(X)$, $\boxed{V(V_k) = V(Z_k) = V(U_k).}$

7. (a) $\boxed{U_2 + V_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = X_1 + X_2.}$
$\boxed{U_2V_2 = \min(X_1, X_2)\max(X_1, X_2) = X_1X_2.}$

(b) $V(U_2+V_2) = V(X_1+X_2) = V(X_1)+V(X_2)$ par indépendance de X_1 et X_2 donc $\boxed{V(U_2+V_2) = \dfrac{N^2-1}{6}.}$

$E(U_2V_2) = E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$ par indépendance, donc $\boxed{E(U_2V_2) = \dfrac{(N+1)^2}{4}.}$

(c) On sait que $V(U_2) = V(V_2)$ d'après la question 6b et $V(U_2+V_2) = \dfrac{N^2-1}{6}$ par la question précédente.
Or $V(U_2+V_2) = V(U_2)+V(V_2)+2\operatorname{cov}(U_2,V_2)$ d'où $2V(U_2) = V(U_2+V_2)-2\operatorname{cov}(U_2,V_2)$
$= \dfrac{N^2-1}{6} - \dfrac{(N^2-1)^2}{18N^2} = (N^2-1)\dfrac{3N^2-(N^2-1)}{18N^2} = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{18N^2}$ puis
$\boxed{V(U_2) = V(V_2) = \dfrac{(N^2-1)(2N^2+1)}{36N^2}}$

(d) $\rho_2(N) = \dfrac{\operatorname{cov}(U_2,V_2)}{\sigma(U_2)\sigma(V_2)} = \dfrac{\operatorname{cov}(U_2,V_2)}{V(U_2)}$
d'où $\boxed{\rho_2(N) = \dfrac{N^2-1}{2N^2+1}}$

(e) D'après la question précédente, $\rho_2(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N^2}{2N^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\rho_2(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}.}$

8. (a) *L'énoncé n'est pas clair sur la définition de N. On suppose que $X(\Omega) \subset [\![1,N]\!]$.*
$\sum\limits_{i=1}^{N}(2i-1)P(X \geqslant i) = \sum\limits_{i=1}^{N}(2i-1)\sum\limits_{k=i}^{N}P(X=k)$
$= \sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=i}^{N}(2i-1)P(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{k}(2i-1)P(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{N}P(X=k)\sum\limits_{i=1}^{k}(2i-1)$
$= \sum\limits_{k=1}^{N}P(X=k)(2S_1(k)-k) = \sum\limits_{k=1}^{N}P(X=k)(k(k+1)-k) = \sum\limits_{k=1}^{N}P(X=k)k^2 = E(X^2)$
par la formule du transfert.
On a bien $\boxed{E(X^2) = \sum\limits_{i=1}^{N}(2i-1)P(X \geqslant i).}$

(b) D'après la question précédente, $E(U_k^2) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(U_k \geqslant i) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k$ d'après la question 5a.

donc $E(U_k^2) = \frac{1}{N^k}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)(N-i+1)^k \underset{j=N+1-i}{=} \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}(2(N+1-j)-1)j^k$

$= \frac{1}{N^k}((2N+1)\sum_{j=1}^{N} j^k - 2\sum_{j=1}^{N} j^{k+1})$

$\boxed{E(U_k^2) = \frac{(2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)}{N^k}.}$

(c) Par la formule de König-Huygens,

$\boxed{V(U_k) = E(U_k^2) - E(U_k)^2 = \frac{(2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)}{N^k} - \left(\frac{S_k(N)}{N^k}\right)^2.}$

(d) On sait par la question 1 que $S_k(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^{k+1}}{k+1}$, donc $S_k(N) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})$

Ainsi, $V(U_k) \underset{N\to+\infty}{=} \frac{(2N+1)(\frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})) - 2(\frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2}))}{N^k} - \frac{(\frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1}))^2}{N^{2k}}$

$= \frac{2N^2}{k+1} - \frac{2N^2}{k+2} - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) = \frac{2(k+1)(k+2) - 2(k+1)^2 - (k+2)}{(k+1)^2(k+2)}N^2 + o(N^2)$

$= \frac{k}{(k+1)^2(k+2)}N^2 + o(N^2)$

donc $\boxed{V(U_k) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{(k+1)^2(k+2)}N^2.}$

Problème 2 : Étude d'une famille de fonctions *(D'après CCP PC 2015)*

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par produit de fonctions dérivables et $\forall t \in \mathbb{R}_+, f_n'(t) = \frac{1}{n!}(-e^{-t}t^n + e^{-t}nt^{n-1}) = \frac{1}{n!}e^{-t}t^{n-1}(n-t)$

   Ainsi, f_n est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$.

   On en déduit que $\boxed{f_n \text{ possède un maximum, atteint en } n, \text{ qui vaut } f_n(n) = \frac{e^{-n}n^n}{n!}.}$

   (b) D'après la formule de Stirling, $f_n(n) \sim \frac{e^{-n}n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

   On a bien $\boxed{f_n(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}}.}$

   (c) $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|f_n(t) - f(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} f_n(t)$ (car $f_n \geqslant 0$ et $f = 0$)

   donc $\|f_n - f\|_\infty = f_n(n)$ puis $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Donc $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^x$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

$e^{-t}t^x \underset{t\to 0}{\sim} t^x > 0$. Or, par le critère de Riemann, $\displaystyle\int_0^1 t^x \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$. Ainsi, par équivalence, $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}t^x \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.

$t^2 e^{-t}t^x \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $e^{-t}t^x \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Par domination, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}t^x \mathrm{d}t$ converge pour tout réel x.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x > -1$

$\boxed{D =]-1,+\infty[}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $n \in D$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t$ converge. Par multiplication par la constante $\dfrac{1}{n!}$, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

(c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

$I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt$

Les fonctions $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Le produit $u \times v$ admet des limites finies en 0 (par continuité) et en $+\infty$ (limite nulle par croissances comparées). I_{n+1} étant convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left([-t^{n+1}e^{-t}] - \int_0^{+\infty}(-(n+1)t^n e^{-t})\mathrm{d}t\right) = \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = I_n.$$

La suite (I_n) est donc constante. On a $I_0 = 1$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1.}$

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$. Par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x} f_n(t)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

On a vu à la question précédente que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1$.

On obtient bien la relation demandée : $\boxed{H_n(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t}$

(b) La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par le théorème fondamental de l'analyse, $\boxed{H_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, H_n'(x) = -f_n(x).}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(H_n(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{n!}\int_x^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t$

donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}(H_n(x)) = 1}$

$\lim_{x\to+\infty}(H_n(x)) = \lim_{x\to+\infty} 1 - \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(H_n(x)) = 0.}$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}_+$

Les fonctions f_n sont continues sur $[0, x]$ et convergent uniformément sur $[0, x]$ vers f. Par interversion limite-intégrale sur un segment :

$\lim_{n\to+\infty}(H_n(x)) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_0^x 0\mathrm{d}t$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(H_n(x)) = 1.}$

4. (a) On a vu à la question 1a que f_n possède un maximum atteint en n. On peut ainsi identifier sur la figure 1 que $\boxed{f_1 \text{ est représentée par } \mathscr{C}_a \text{ et } f_5 \text{ par } \mathscr{C}_c.}$

(b) On peut voir que les fonctions f_n tendent vers la fonction nulle, que les maximums des fonctions sont décroissants, que l'aire sous chacune des courbes vaut 1 (si on a de bons yeux…)

5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Par convergence de la série exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient que $\sum f_n(t)$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} = e^{-t}e^t = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+}$ et sa somme est la fonction constante égale à 1.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $t \in [0, a]$, $n \in \mathbb{N}$. On a $e^{-t} \leqslant 1$ par décroissance, et $t^n \leqslant a^n$ par croissance sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{a^n}{n!}$. Donc, sur $[0, a]$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{a^n}{n!}$.

On sait que $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge (par convergence de la série exponentielle sur $\mathbb{R}$) donc, par majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur le segment } [0, a].}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction étant positive sur $\mathbb{R}_+$, $\|f_n\|_\infty = \max_{\mathbb{R}_+} f_n = f_n(n)$ d'après la question 1a.

D'après la question 1b, $\|f_n\|_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}} > 0$. Par le critère de Riemann, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, donc $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge par équivalence.

$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}_+.}$

Problème 3 : Un jeu de société

Partie I - Préliminaires

I.1 - Modélisation

Q6. X_n représente le n-ième entier généré aléatoirement par l'ordinateur, et donc le nombre de cases dont le pion est avancé au n-ième tour de jeu. S_n représente alors le numéro de la case atteinte par le pion à l'issue du n-ième tour de jeu.

Q7. T représente le nombre de tours de jeu qu'il a fallu pour que le pion atteigne ou dépasse la case numérotée A (ou 0 si cette case n'est jamais atteinte).

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

Q8. $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[}$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{0!}{(1-x)^{0+1}}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$. Alors, pour tout $x \in]-1,1[$, $f^{(p+1)}(x) = \dfrac{(p+1)p!}{(1-x)^{p+2}} = \dfrac{(p+1)!}{(1-x)^{p+2}}$

On a montré par récurrence que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}.}$

Q9. Soit $p \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, $n \geqslant p$.

$$\left| \dfrac{\binom{n+1}{p} x^{n+1}}{\binom{n}{p} x^n} \right| = \dfrac{(n+1)!p!(n-p)!}{n!p!(n+1-p)!}|x| = \dfrac{n+1}{n+1-p}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série entière converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{son rayon de convergence est égal à 1.}}$.

Q10. Soit $p \in \mathbb{N}$.

On a $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Par dérivation terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, on a :

$\forall x \in]-1,1[, f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$

En multipliant par $\dfrac{x^p}{p!}$ des deux côtés de l'égalité, on obtient le résultat attendu :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} x^n = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.}$$

Partie II - Étude d'un premier cas

Dans cette partie uniquement, on suppose que $M = 2$.

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q11. Puisque $M = 2$, $X_n \sim \mathcal{U}([\![0,1]\!]) = \mathcal{B}(\dfrac{1}{2})$.

Ainsi, S_n est la somme de n variables indépendantes de Bernoulli de même paramètre 1/2.

donc $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } 1/2.}$

Q12. Puisque le pion peut avancer d'une case au maximum par tour, il faut au moins A tours pour atteindre la case A. On inclut la possibilité que A ne soit pas atteinte ($T = 0$).

On a donc $\boxed{T(\Omega) = \{0\} \cup [\![A, +\infty[\![.}$

Q13. Soit $k \geqslant A$.

Pour avoir $(T = k)$, on doit atteindre la case A pour la première fois au k-ième tour. Puisqu'on avance le pion de 0 ou 1 case par tour, cela signifie que le pion était en $A-1$ à la fin du tour $k-1$ puis qu'il a avancé d'une case.

On a donc $\boxed{(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1).}$

Par indépendance des tirages, $P(T = k) = P(S_{k-1} = A-1)P(X_k = 1)$.

Or $S_{k-1} \sim \mathcal{B}(k-1, 1/2)$ et $X_k \sim \mathcal{B}(1/2)$ d'où

$P(T=k)=\binom{k-1}{A-1}\dfrac{1}{2^{k-1}}\times\dfrac{1}{2}$, d'où $\boxed{P(T=k)=\left(\begin{array}{c}k-1\\A-1\end{array}\right)\frac{1}{2^k}.}$

Q14. Puisque $T(\Omega)=\{0\}\cup[\![A,+\infty[\![$, on a donc $P(T=0)=1-\sum\limits_{k=A}^{+\infty}P(T=k)$.

Or $\sum\limits_{k=A}^{+\infty}P(T=k)=\sum\limits_{k=A}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}k-1\\A-1\end{array}\right)\frac{1}{2^k}=\sum\limits_{k=A-1}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}k\\A-1\end{array}\right)\frac{1}{2^{k+1}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=A-1}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}k\\A-1\end{array}\right)\frac{1}{2^k}$.

Puisque $A-1\in\mathbb{N}$ et $\dfrac{1}{2}\in]-1,1[$, on peut utiliser le résultat de la question **Q10.**

$\sum\limits_{k=A-1}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}k\\A-1\end{array}\right)\frac{1}{2^k}=\dfrac{(1/2)^{A-1}}{(1-1/2)^A}=2.$

d'où $\boxed{P(T=0)=1-\dfrac{1}{2}\times 2=0}$

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q15. $\sum\limits_{k\geqslant A}P(T=k)x^k=\sum\limits_{k\geqslant A}\binom{k-1}{A-1}(\dfrac{x}{2})^k$.

D'après la question **??**, cette série converge si $|x/2|<1$ et diverge si $|x/2|>1$. Ainsi, $\boxed{R_T=2.}$

Soit $x\in]-2,2[$. Comme à la question précédente

$G_T(x)=\dfrac{x}{2}\sum\limits_{k=A-1}^{+\infty}\left(\begin{array}{c}k\\A-1\end{array}\right)(\frac{x}{2})^k$, et puisque $A-1\in\mathbb{N}$ et $\dfrac{x}{2}\in]-1,1[$, on a par la question **Q10.**

$G_T(x)=\dfrac{x}{2}\dfrac{(x/2)^{A-1}}{(1-x/2)^A}=(\dfrac{x/2}{1-x/2})^A$

d'où $\boxed{\forall x\in]-2,2[,\quad G_T(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)^A.}$

Q16. Puisque $R_T>1$, T admet une espérance et $E(T)=G_T'(1)$.

Or $\forall x\in]-2,2[$, $G_T'(x)=A\left(\frac{x}{2-x}\right)^{A-1}\dfrac{2-x+x}{(2-x)^2}$

donc $\boxed{E(T)=2A}$.

Partie III - Étude d'un second cas

III. 1 - Calcul de la probabilité $P\left(S_n\leqslant k\right)$

Q17. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Puisque $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,M-1]\!]$, $((X_{n+1}=0),\ldots,(X_{n+1}=M-1))$ est bien un système complet d'événements.

Soit $k\in[\![0,A-1]\!]$

Par la formule des probabilités totales, $P\left(S_{n+1}\leqslant k\right)=\sum\limits_{\ell=0}^{M-1}P(S_{n+1}\leqslant k,X_{n+1}=\ell)$.

Or $(S_{n+1}\leqslant k,X_{n+1}=\ell)=(S_{n+1}-X_{n+1}\leqslant k-\ell,X_{n+1}=\ell)=(S_n\leqslant k-\ell,X_{n+1}=\ell)$.

Les variables S_n et X_{n+1} étant indépendantes, on a :

$P\left(S_{n+1}\leqslant k\right)=\sum\limits_{\ell=0}^{M-1}P(S_n\leqslant k-\ell,X_{n+1}=\ell)=\sum\limits_{\ell=0}^{M-1}P(S_n\leqslant k-\ell)P(X_{n+1}=\ell)$.

Puisque $X_{n+1}\sim\mathcal{U}([\![0,M-1]\!]$, $P(X_{n+1}=\ell)=\dfrac{1}{M}$ d'où

$\boxed{P\left(S_{n+1}\leqslant k\right)=\frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k}P\left(S_n\leqslant k-\ell\right).}$

Q18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n : ´ $\forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}$ ˇ

$S_1 = X_1 \sim \mathcal{U}_{[\![0,M-1]\!]}$

Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$. $P(S_n \leqslant k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P(S_n = i) = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{1}{M}$ (car $i \leqslant k \leqslant A-1 \leqslant M-1$)

donc $P(S_n \leqslant k) = \dfrac{k+1}{M} = \dfrac{1}{M}\dfrac{(k+1)!}{k!1!} = \dfrac{1}{M^1}\binom{k+1}{k}$ <u>d'où H_1</u>.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose H_n.

Soit $k \in [\![0, A-1]\!]$.

Par la question précédente, $P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} P(S_n \leqslant k-\ell)$.

Par hypothèse de récurrence, $P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+k-\ell \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{M^{n+1}}\sum_{\ell=0}^{k}\begin{pmatrix} n+k-\ell \\ n \end{pmatrix}$

Par l'indication de l'énoncé,

$P(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M^{n+1}}\begin{pmatrix} n+1+k \\ n+1 \end{pmatrix}$. <u>d'où H_{n+1}.</u>

On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, A-1]\!], \quad P(S_n \leqslant k) = \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}}$

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q19. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si $(T > n)$, la case A est dépassée ou atteinte strictement après le n-ième tour, donc le pion n'a pas encore atteint A au rang n, donc l'événement $(S_n < A)$ est réalisé. La réciproque est également vraie, donc $\boxed{(T > n) = (S_n < A)}$

Ainsi, $\sum\limits_{n \geqslant 0} P(Z > n) = \sum\limits_{n \geqslant 0} P(S_n < A)$.

$E(T) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(S_n \leqslant A-1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+A-1 \\ n \end{pmatrix}$

$= \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n}\begin{pmatrix} n+A-1 \\ A-1 \end{pmatrix}$ *(car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)*

$= \sum\limits_{n=A-1}^{+\infty} \binom{n}{A-1}\dfrac{1}{M^{n-A+1}}$. *La série converge car $1/M \in]-1,1[$.*

$= M^{A-1}\dfrac{(1/M)^{A-1}}{(1-1/M)^A} = \dfrac{M^A}{(M-1)^A}$.