Extrait des rapports CCINP 2020 et 2021

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).
De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question.
Les candidats doivent faire attention à rester dans le cadre du programme officiel de mathématiques de la filière PC. Par exemple, [...] les coefficients binomiaux généralisés n'en font pas partie.
Nous avons constaté qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas les questions assez consciencieusement : il arrive souvent qu'ils oublient de répondre à une partie de la question.
L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

Problème 1 – Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron *(D'après CCINP PC 2021)*

Extrait du rapport

L'exercice a mis en évidence les faiblesses des candidats sur la manipulation des inégalités. Lorsque les solutions proposées étaient justes, elles étaient souvent complexes et mal rédigées, ce qui rendait difficile leur évaluation.

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}^*$. $(f_k(x))^2 - x = \frac{1}{4}(f_{k-1}(x)^2 + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}) - x$

   $= \frac{1}{4}(f_{k-1}(x)^2 - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}) = (\frac{1}{2}(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}))^2 \geqslant 0.$

   Ainsi, $f_k(x)^2 \geqslant x$. $f_k(x)$ et x étant positifs, on obtient par croissance ce la racine carrée que $\boxed{f_k(x) \geqslant \sqrt{x}}$.

   Extrait du rapport

   Il faut mentionner que $f_k(x)$ est positif pour conclure.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}^*$.
$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \dfrac{1}{2}(f_k(x) + \dfrac{x}{f_k(x)}) - f_k(x) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{f_k(x)} - f_k(x)) = \dfrac{x - f_k(x)^2}{2f_k(x)}$
$x - f_k(x)^2 \leqslant 0$ d'après la question précédente, $f_k(x) > 0$ d'après l'énoncé, donc $f_{k+1}(x) - f_k(x) \leqslant 0$
$\boxed{(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après les questions précédentes, la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{x}$. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.
On note ℓ_x sa limite. Par opérations sur les limites dans la relation de récurrence définissant (f_k), elle vérifie $\ell_x = \dfrac{1}{2}(\ell_x + \dfrac{x}{\ell_x})$ puis $x = \ell_x^2$.
Puisqu'on a admis que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_k(x) > 0$, on a $\ell_x \geqslant 0$ par stabilité des inégalités larges, d'où $\ell_x = \sqrt{x}$, *i.e.* $f_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sqrt{x}$.
En conclusion, $\boxed{(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers la fonction } f.}$

> **Extrait du rapport**
>
> Une part écrasante des candidats pense que le minorant trouvé pour la suite est automatiquement sa limite sans aucune justification.

I.2 - Majoration de l'erreur

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$.
$\frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) = \dfrac{(f_k(x) - \sqrt{x})^2}{2f_k(x)} = \dfrac{f_k(x)^2 + x - 2\sqrt{x}f_k(x)}{2f_k(x)} = \dfrac{1}{2}(f_k(x) + \dfrac{x}{f_k(x)}) - \sqrt{x}.$
$\boxed{f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right).}$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
D'après la question 1, $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ donc $|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) - \sqrt{x}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(k)$: « $|f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$. »

$$f_1(x) - \sqrt{x} = \frac{f_0(x) - \sqrt{x}}{2}(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_0(x)}) = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} = \frac{1 \overbrace{-2\sqrt{x}}^{\leqslant 0} + x}{2} \leqslant \frac{1+x}{2}, \text{ d'où } \mathcal{P}(1).$$

Soit $k \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$
D'après la question 1, $0 \leqslant \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1$ donc $\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) \in [0,1]$. Par hypothèse de récurrence, $f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1+x}{2^k}$ d'où $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1+x}{2^{k+1}}$, d'où $\mathcal{P}(k+1)$.
On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } |f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}.}$

> **Extrait du rapport**
>
> L'initialisation est souvent mal vérifiée.

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. telle que A admet une racine carrée B.
Alors $\det(A) = \det(B^2) = \det(B)^2$. Puisque $\det(B) \in \mathbb{R}$, $\boxed{\det(A) \geqslant 0.}$

7. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on suppose qu'il existe $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Or $B^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   Puisque $a+d \neq 0$ (car $b(a+d) = 1$) alors $c = 0$ (car $c(a+d) = 0$) puis $a^2 = d^2 = 0$ donc $a = d = 0$, ce qui est impossible car $a+d \neq 0$.
   Ainsi, A n'admet pas de racine carrée et $\det(A) = 0 \geqslant 0$.
   $\boxed{\text{Il existe des matrices de déterminant positif n'ayant pas de racine carrée.}}$ (*La réciproque de la propriété précédente est donc fausse)*

8. S est une matrice symétrique à coefficients réels,
   $\boxed{\text{elle est donc diagonalisable d'après le théorème spectral.}}$

> **Extrait du rapport**
>
> Il est fondamental de préciser que la matrice est à coefficients réels pour utiliser le théorème spectral.

9. $R^T = (P\Delta P^{-1})^T = (P\Delta P^T)^T$ car P est orthogonale
   $= (P^T)^T \Delta^T P^T = P\Delta P^T = R$ donc $\boxed{R \text{ est symétrique}}$
   $R^2 = (P\Delta P^{-1})(P\Delta P^{-1}) = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$ donc $\boxed{R \text{ est une racine carrée de } S.}$

> **Extrait du rapport**
>
> La démonstration que R est une matrice symétrique est souvent fausse. Des candidats ne mentionnent pas que la matrice P est orthogonale ou ne connaissent pas les propriétés de la transposition.

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

10. $P^{-1} I_n P = I_n \in \mathcal{D}_n^+$ donc $\boxed{I_n \in C_P.}$
    Soit $M \in C_P$ alors $N = P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+$. Or toute matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls est inversible, donc N est inversible, puis $\boxed{M = PNP^{-1} \text{ est inversible}}$ comme produit de matrices inversibles.
    $P^{-1}\frac{1}{2}(M + SM^{-1})P = \frac{1}{2}(P^{-1}MP + P^{-1}PDP^{-1}M^{-1}P) = \frac{1}{2}(P^{-1}MP + D(P^{-1}MP)^{-1})$
    On note $P^{-1}MP = Diag(a_1, \ldots, a_n)$ avec les $a_i > 0$.
    Alors $(P^{-1}MP)^{-1} = Diag(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$ puis $D(P^{-1}MP)^{-1} = Diag(\lambda_1/a_1, \ldots, \lambda_n/a_n)$
    enfin $P^{-1}\frac{1}{2}(M + SM^{-1})P = Diag(\frac{a_1 + \lambda_1/a1}{2}, \ldots, \frac{a_n + \lambda_n/a_n}{2})$
    $\forall i \in [\![1, n]\!], \frac{a_i + \lambda_i/ai}{2} > 0$ (car $a_i > 0$ et $\lambda_i \geqslant 0$)
    donc $P^{-1}\frac{1}{2}(M + SM^{-1})P \in \mathcal{D}_n^+$
    puis $\boxed{\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_P.}$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remplaçant M par U_{k-1} dans les calculs de la question précédente, on a $V_k = \frac{1}{2}(P^{-1}U_{k-1}P + D(P^{-1}U_{k-1}P)^{-1})$
    $\boxed{V_k = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1}).}$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: « $V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$ »

$V_0 = P^{-1}U_0P = P^{-1}I_nP = I_n$

et $\begin{pmatrix} f_0(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_0(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

d'où $\mathcal{P}(0)$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$.

Alors $V_{k+1} = \dfrac{1}{2}(V_k + DV_k^{-1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(f_k(\lambda_1) + \dfrac{\lambda_1}{f_k(\lambda_1)}) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \dfrac{1}{2}(f_k(\lambda_n) + \dfrac{\lambda_n}{f_k(\lambda_n)}) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_{k+1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_{k+1}(\lambda_n) \end{pmatrix}$ par définition de f_{k+1}, d'où $\mathcal{P}(k+1)$.

On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}}$

12. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$(R - U_k)(R - U_k)^T = (R - U_k)^2$ car les matrices sont symétriques.
Or $R = P\Delta P^{-1}$ et $U_k = PV_kP^{-1}$ d'où $R - U_k = P(\Delta - V_k)P^{-1}$ puis $(R - U_k)^2 = P(\Delta - V_k)^2P^{-1}$
$(R - U_k)^2$ et $(\Delta - V_k)^2$ étant semblables, elles sont la même trace, donc $\boxed{N(R - U_k) = N(\Delta - V_k).}$

Extrait du rapport

Il faut mentionner que deux matrices semblables ont la même trace ou une autre propriété analogue.

13. $\Delta - V_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$

donc $N^2(R - U_k) = N^2(\Delta - V_k) = \operatorname{tr}((\Delta - V_k)^2)) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i))^2$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i))^2 + \sum_{i \neq j} \underbrace{\underbrace{(\sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i))}_{\leqslant 0}\underbrace{(\sqrt{\lambda_j} - f_k(\lambda_j))}_{\leqslant 0}}_{\geqslant 0}$$

donc $N^2(R - U_k) \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i)\right)^2$

puis $N(R - U_k) \leqslant \left|\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i)\right| = \sum\limits_{i=1}^{n} f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i}$

$\leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1 + \lambda_i}{2^k}$ d'après la question 5

$$= \frac{n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{2^k}$$

d'où $\boxed{N(R - U_k) \leqslant \frac{\mathrm{tr}(S) + n}{2^k}.}$

14. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant N(R - U_k) \leqslant \frac{\mathrm{tr}(S) + n}{2^k}$. (car N est une norme donc positive)

    Le dernier terme est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc $\frac{\mathrm{tr}(S) + n}{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

    Par le théorème d'encadrement, $N(R - U_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

    Par définition de la convergence d'une suite vectorielle, $\boxed{\text{la suite } (U_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } R.}$

Problème 2 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ *(D'après CCINP PC 2020)*

Extrait du rapport

L'exercice est globalement bien réussi par les candidats, à l'exception des deux dernières questions qui étaient plus difficiles.
Les candidats doivent faire attention à la manipulation des inégalités. Les correcteurs ont observé beaucoup d'erreurs, notamment lorsque les expressions comportaient des fonctions trigonométriques ou des valeurs absolues.
Attention à ne pas confondre un évènement avec sa probabilité.
La somme d'une suite de probabilité (p_n) n'est pas égale à 1 en général.

Partie I – Calcul de p_n

1. S_n représente la position du pion à l'étape n.

    Extrait du rapport

    Certains candidats ont utilisé des expressions maladroites comme « distance parcourue ».

2. $S_0 = 0$ donc $\boxed{p_0 = 1}$

    $S_1 = X_1$ donc $(S_1 = 0)$ est impossible, $\boxed{p_1 = 0}$.

    $p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) = P((X_1 = 1, X_2 = -1) \cup (X_1 = -1, X_2 = 1))$
    $= P(X_1 = 1, X_2 = -1) + P(X_1 = -1, X_2 = 1)$ car les événements sont incompatibles.
    $= P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = -1)$ car X_1 et X_2 sont indépendantes
    $= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}$

    $\boxed{p_2 = \frac{1}{2}.}$

    Extrait du rapport

    La plupart des candidats a donné les bonnes probabilités. Cependant, une part importante n'a pas mené rigoureusement le calcul de p_2 en utilisant notamment l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2.

3. On suppose n impair. S_n est alors la somme d'un nombre impair de termes impairs (tous les X_k valent ± 1), donc S_n ne prend que des valeurs impaires et $\boxed{p_n = P(S_n) = 0.}$
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$Y_k(\Omega) = \{\frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2}\} = \{0, 1\}$ et $P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ donc
$\boxed{Y_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$

Extrait du rapport

Certains candidats semblent penser que X_k suit une loi de Bernoulli, ce qui n'est pas le cas. Il ne faut pas oublier de justifier que Y_k ne prend que les valeurs 0 et 1.

5. Soit $n > 0$.
Z_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre $\frac{1}{2}$ donc $\boxed{Z_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2}).}$
$Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k + 1}{2} = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} 1) = \frac{S_n + n}{2}$
puis $\boxed{S_n = 2Z_n - n.}$

Extrait du rapport

Attention à ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance mutuelle pour les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$. Certains candidats ont exprimé Z_n en fonction de S_n, ce qui ne répondait pas à la seconde partie de la question (qui demandait d'exprimer S_n en fonction de Z_n).

6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$.
$(S_n = 0) = (2Z_n - n = 0) = (Z_n = \frac{n}{2}) = (Z_n = m)$.
Puisque $Z_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, $P(Z_n = m) = \binom{n}{m}(\frac{1}{2})^m(\frac{1}{2})^{n-m} = \binom{n}{m}\frac{1}{2^n}$
Puisque $n = 2m$, $\boxed{p_{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}}$

Partie II – Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7. Les valeurs étant des probabilités, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |p_n| \leqslant 1$
Donc $R_p \geqslant R(\sum 1.x^n)$, *i.e.* $\boxed{R_p \geqslant 1.}$

Extrait du rapport

Lorsque l'on utilise la règle de d'Alembert pour les séries numériques, il ne faut pas s'arrêter après avoir calculé la limite du quotient : il faut ajouter une phrase de conclusion pour faire le lien avec le rayon de convergence.
De nombreux candidats ont indiqué que la somme des p_n est égale à 1, ce qui est faux.

8. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
$\frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) = \frac{1}{m!} \prod_{k=1}^{m} (k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{m! 2^m} \prod_{k=1}^{m} (2k - 1)$

$= \dfrac{1}{m!2^m}\dfrac{(2m)!}{\prod\limits_{k=1}^{m}(2k)}$ *(le produit des nombres impairs de 1 à $2m-1$ est égal au produit de tous les nombres entre 1 et $2m$ divisé par le produit des nombres pairs de 1 à $2m$).*

$= \dfrac{1}{m!2^m}\dfrac{(2m)!}{2^m\prod\limits_{k=1}^{m}k} = \dfrac{1}{2^m2^m}\dfrac{(2m)!}{m!m!} = \binom{2m}{m}\dfrac{1}{4^m}$

$$\boxed{p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2}-k+1\right).}$$

9. D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} p_{2m}x^{2m}$

$= \sum\limits_{m=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^m}{m!}\prod\limits_{k=1}^{m}\left(-\dfrac{1}{2}-k+1\right)x^{2m} = \sum\limits_{m=0}^{+\infty}\dfrac{1}{m!}\prod\limits_{k=1}^{m}\left(-\dfrac{1}{2}-k+1\right)(-x^2)^m = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

donc $\boxed{\alpha = -\dfrac{1}{2}.}$

Partie III – Loi de la variable aléatoire T

10. T est le plus petit entier naturel non nul n tel que $S_n = 0$. On a vu que $(S_n = 0)$ est impossible si n est impair donc $(T = 1)$ est impossible, $\boxed{q_1 = 0}$

Par définition, $(T = 2) = (S_2 = 0)$ donc $\boxed{q_2 = p_2 = \dfrac{1}{2}.}$

Extrait du rapport

La plupart des candidats a donné les bonnes probabilités, mais leur justification manque souvent de rigueur.

11. Puisque $\|x \mapsto x^n\|_{\infty,[-1,1]} = 1$, on a $\|g_n\|_{\infty,[-1,1]} = |q_n| = q_n$.

Or $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n + P(T = +\infty) = 1$ donc $\sum q_n$ converge.

Ainsi, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n \text{ converge normalement sur } [-1,1].}$

$\sum g_n$ converge donc simplement sur $[-1,1]$. Or $R_q = \sup\{r \geqslant 0 | \sum q_n r^n \text{ converge }\}$ donc $\boxed{R_q \geqslant 1.}$

Extrait du rapport

La plupart des candidats pense à majorer le terme général de la série par q_n. Cependant, il ne suffit pas d'indiquer que q_n est une probabilité pour justifier que la série de terme général q_n est convergente. De plus, une partie des candidats a utilisé le fait que la somme des q_n est égale à 1, ce que l'on ne peut pas savoir à ce stade de l'exercice.

12. $f \times g$ est le produit de deux fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$ (au moins, car $R_p \geqslant 1$ et $R_q \geqslant 1$), donc est développable en série entière sur $]-1,1[$ (au moins) et, par produit de Cauchy :

Soit $x \in]-1,1[$. $f(x)g(x) = (\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^n)(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n x^n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}x^n = p_0q_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}x^n$

$= p_0q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n$ (d'après le résultat admis dans l'énoncé)

$= p_0q_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n - p_0.$

Or $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$

donc $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n - 1$

i.e. $\boxed{f(x)g(x) = f(x) - 1}$

Extrait du rapport

Pour appliquer le théorème relatif au produit de Cauchy, il faut commencer par vérifier ses hypothèses. Beaucoup de candidats ont eu des difficultés à gérer le terme d'indice 0 dans la somme.

13. Soit $x \in]-1, 1[$.

D'après la question 9, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Par la question précédente, $\dfrac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$.

En multipliant par $\sqrt{1-x^2}$, on a bien $\boxed{g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}}$

$u \mapsto (1+u)^{1/2}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence égal à 1.

$|-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ donc le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ vaut 1.

Soit $x \in]-1, 1[$. $g(x) = 1 - (1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - k)(-x^2)^n$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - k) x^{2n}.}$$

Extrait du rapport

Il est surprenant que certains candidats déterminent une expression de $g(x)$ sans avoir trouvé l'expression de $f(x)$ auparavant. Les correcteurs ont observé de nombreuses erreurs de signes dans le développement en série entière de la fonction g.

14. $\forall x \in]-1, 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n$.

Par unicité du développement en série entière, on obtient avec la question précédente :

$$\boxed{q_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - k) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, q_{2n+1} = 0.}$$

Extrait du rapport

Certains candidats utilisent l'expression « par identification » qui n'est pas satisfaisante : il est préférable de citer l'unicité du développement en série entière. De plus, il faut ensuite faire attention à distinguer les indices pairs et les indices impairs.

15. D'après la question 11, $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$. Or, les fonctions g_n sont polynomiales donc continues sur $[-1, 1]$.

Ainsi, par le théorème de continuité des séries de fonctions, g est continue sur $[-1,1]$ donc $g(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} g(1)$, *i.e.* $g(1) = \lim\limits_{x\to 1} 1 - \sqrt{1-x^2}$ (d'après la question 13)
donc $g(1) = 1$.
Or $g(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(T=n) = 1 - P(T=+\infty)$
d'où $\boxed{P(T=+\infty) = 0. \text{ Il est presque sûr que le pion revienne à l'origine.}}$

16. g est continue sur $[-1,1]$ d'après la question précédente, dérivable sur $]-1,1[$ (somme de de série entière dérivable sur son intervalle ouvert de convergence).
$\forall x \in]-1,1[, g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$.
D'après le théorème de limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1 (le taux d'accroissement en 1 tend vers $+\infty$).
Or, on sait que T admet une espérance finie si et seulement si sa fonction génératrice est dérivable en 1.
donc $\boxed{T \text{ n'admet pas d'espérance finie.}}$

Exercice : Calcul d'intégrale *(D'après E3A MP 2015 – Math 1)*

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
$\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, l'intégrale est donc faussement impropre en 0.
On procède par intégration par parties pour justifier la convergence de l'intégrale en $+\infty$.
On pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -\cos(x)$.
$u \times v(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -\cos(1)$ et $u \times v(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0). On obtient bien deux limites finies.
Par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$.
Or $\forall x \geqslant 1, |\dfrac{\cos x}{x^2}| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ donc $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ également.
Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ converge
On en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \text{ existe.}}$

Extrait du rapport

Pour un nombre non négligeable d'élèves, tendre vers 0 suffit pour avoir l'intégrabilité !

Extrait du rapport CCINP PC 2020

Le théorème d'intégration par parties permet de montrer que deux intégrales sont de même nature, mais il ne permet pas d'écrire une égalité tant que l'on ne s'est pas assuré de la convergence d'une des deux intégrales en jeu.

2. (a) Soit $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

$$1 - \cos \alpha t \underset{t\to 0}{=} 1 - (1 - \frac{\alpha^2 t^2}{2}) + o(t^2) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\alpha^2 t^2}{2}$$

donc $\dfrac{1-\cos\alpha t}{t^2}e^{-itx} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\alpha^2 t^2}{2t^2}\times 1 = \dfrac{\alpha^2}{2}$ donc $\dfrac{1-\cos\alpha t}{t^2}e^{-itx} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{\alpha^2}{2}$ (limite finie)

donc $\boxed{\text{l'application } t\mapsto \dfrac{1-\cos\alpha t}{t^2}e^{-itx} \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$

(b) L'application $f : t\mapsto \dfrac{1-\cos\alpha t}{t^2}e^{-itx}$ ainsi prolongée est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.

Or $\forall t\in\mathbb{R}^*, |\dfrac{1-\cos\alpha t}{t^2}e^{-itx}| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$ et $t\mapsto \dfrac{2}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ et $-\infty$ d'après le critère de Riemann.

On en déduit que $\boxed{f \text{ ainsi prolongée est intégrable sur } \mathbb{R}.}$

Extrait du rapport

Beaucoup affirment que l'on a un $o(1/x^2)$ en $+\infty$ ou écrivent une inégalité avec $e^{\breve{}itx}$, ce qui permet bien sûr de conclure !

(note du professeur : au cas où ce ne serait pas clair, ce commentaire est ironique, il n'y a pas de $o(1/x^2)$ et on ne peut pas écrire des inégalités avec des complexes)

3. (a) $\mathrm{Im}(I) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha t}{t^2}\sin(tx)\mathrm{d}t.$

La fonction $t\mapsto \dfrac{1-\cos\alpha t}{t^2}\sin(tx)$ est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}$ donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle.

Ainsi, $\mathrm{Im}(I)=0$ donc $\boxed{I \text{ est réelle.}}$

(b) Soit $A>0$ et $B>0$. On admet l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x$.

Soit $u : x\mapsto \dfrac{1}{x}$ et $v : x\mapsto -\cos(Bx)$. $u\times v$ admet des limites finies en A (par continuité) et en $+\infty$ (produit d'une fonction bornée et d'une fonction tendant vers 0).

On a admis la convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x$.

On a donc par intégration par parties :

$$\int_A^{+\infty}\frac{\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = [-\frac{\cos Bx}{x}]_A^{+\infty} - \int_A^{+\infty}\frac{B\sin(Bx)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\cos AB}{A} - B\int_A^{+\infty}\frac{\sin(Bx)}{x}\mathrm{d}x$$

On applique le changement de variable $t=Bx$ dans la dernière intégrale.

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin(Bx)}{x}\mathrm{d}x = \int_{AB}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t/B}(\mathrm{d}t/B) = \int_{AB}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

On obtient bien $\boxed{\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\cos AB}{A} - B\int_{AB}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.}$

Extrait du rapport

A beaucoup plu car la réponse était donnée (mais ils traitent rarement la convergence du crochet dans l'IPP)

(c) On suppose $B>0$.

$$\int_A^{+\infty}\frac{1-\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = \int_A^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int_A^{+\infty}\frac{\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = [-\frac{1}{x}]_A^{+\infty} - \frac{\cos AB}{A} + B\int_{AB}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$= \dfrac{1-\cos AB}{A} + B\displaystyle\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$

$1-\cos AB \underset{A\to 0}{\sim} \dfrac{A^2B^2}{2}$ donc $\dfrac{1-\cos AB}{A} \underset{A\to 0}{\sim} \dfrac{AB^2}{2} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0.$

Ainsi, $\displaystyle\int_{A}^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} B\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = B\frac{\pi}{2}$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{B\pi}{2}.}$

Si $B < 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-Bx)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{B\pi}{2}$ d'après ce qui précède car $-B > 0$;

Si $B = 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}x = 0$

On a donc $\boxed{\forall B\in\mathbb{R}, \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{|B|\pi}{2}.}$

Extrait du rapport

Beaucoup utilisent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ sans se poser de question…

(d) $I = \mathrm{Re}(I) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha t}{t^2}\cos(tx)\mathrm{d}t$ car I est réelle

$= 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha t}{t^2}\cos(tx)\mathrm{d}t$ par parité

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \cos\alpha t\cos(tx)}{t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx) - \frac{1}{2}(\cos t(x+\alpha) + \cos t(x-\alpha))}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(tx) - \cos t(x+\alpha) - \cos t(x-\alpha)}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-2(1-\cos(tx)) + (1-\cos t(x+\alpha)) + (1-\cos t(x-\alpha)}{t^2})\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}(-2|x| + |x+\alpha| + |x-\alpha|)$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2}(|x+\alpha| + |x-\alpha| - 2|x|)}$$