MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux problèmes et d'un exercice indépendants.

Problème 1 : Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et $\mathrm{tr}(M)$ la trace de la matrice M.

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right).$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}.$$

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on sait que B est une racine carrée de A.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geqslant 0$.
7. Etudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

   et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

8. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

9. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S.

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

On note $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère également la partie C_P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$C_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+\}.$$

10. Vérifier que $I_n \in C_P$. Montrer que si $M \in C_P$, alors M est une matrice inversible et on a :

$$\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in C_P.$$

La question précédente implique que l'on peut définir la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C_P par :

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_k = \frac{1}{2}(U_{k-1} + SU_{k-1}^{-1}).$$

On considère également la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $V_k = P^{-1}U_kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_k en fonction de D et V_{k-1}. En déduire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

où f_k est la fonction définie dans la partie I de cet exercice.

On considère l'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(B) = \sqrt{\mathrm{tr}(BB^T)}.$$

On admet que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.
13. En déduire à l'aide de la question 5 que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité :

$$N(R - U_k) \leqslant \frac{\mathrm{tr}(S) + n}{2^k}.$$

14. Conclure que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers R.

Problème 2 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n+1$, le pion a une chance sur deux se retrouver en $x+1$ et une chance sur deux de se retrouver en $x-1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = 0\}$.

L'événement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = 0\}$ est vide.

Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0, \\ P(T = n) & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

Partie I – Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Que représente la variable aléatoire S_n ?
2. Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
5. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.
6. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II – Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

7. Montrer que $R_p \geqslant 1$.

8. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right).$$

9. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = (1 - x^2)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III – Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

10. Calculer q_1 et q_2.
11. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

12. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) g(x) = f(x) - 1.$$

13. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.
14. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
15. En utilisant les questions 11 et 13, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.
16. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

Exercice : Calcul d'intégrale

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ existe. On admet alors que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Montrer que : $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. On note, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos \alpha t}{t^2} e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que I est réelle.

   (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$. On admet l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} \mathrm{d}x$.

   Montrer que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos Bx}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\cos AB}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t.$$

   (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos Bx}{x^2} \mathrm{d}x$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque.

   (d) En déduire le calcul de l'intégrale I.