

Programme de colles – Semaine 18 – du 11/03 au 15/03

Espaces vectoriels normés

- Topologie d'un espace vectoriel normé
 - Point intérieur à une partie. Ouvert d'un espace normé. Une boule ouverte est un ouvert. Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.
 - Fermé d'un espace normé. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés. Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.
 - Point adhérent à une partie, adhérence. Caractérisation séquentielle.
 - Partie dense.
 - Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
- Limite et continuité en un point
 - Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle.
 - Opérations algébriques sur les limites, composition.
 - Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
- Continuité sur une partie
 - Opérations algébriques, composition.
 - Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
 - Si f est une application continue de E dans \mathbb{R} alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.
 - Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie
 - Équivalence des normes en dimension finie (admis)
 - La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
 - Théorème des bornes atteintes (admis).
 - Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales. Exemples du déterminant, du produit matriciel.

Calcul différentiel

- Dérivabilité des fonctions vectorielles
 - Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
 - Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans \mathbb{R}^n .
Dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire, et f, g, f_1, \dots, f_p à valeurs vectorielles. Application au produit scalaire et au déterminant. Dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles.

- Fonction de classe \mathcal{C}^k , de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle.
- Fonctions de plusieurs variables
 - Dérivée en un point selon un vecteur. Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Une fonction de classe \mathcal{C}^1 est continue. Différentielle de f en a .
 - Règle de la chaîne. Dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$. Application au calcul des dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_n) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n))$. Cas particulier des coordonnées polaires. Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.
 - Gradient d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$.
 - Dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe \mathcal{C}^2 . Théorème de Schwarz (admis).