PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n$^{\text{o}}$ 5
Samedi 9 mars 2024
Durée : 4 heures

***

Documents et calculatrices interdits.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation.

Les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Vous traiterez au choix un des deux sujets suivants :

— le sujet 1 (CCINP/E3A) constitué de trois problèmes/exercices indépendants.

— le sujet 2 (CentraleSupélec) constitué d'un problème unique.

$\boxed{\text{SUJET 1}}$

Problème 1 : Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note alors $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ est muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;
2. la suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
3. pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I – Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a,b)$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a,b) = bI_n + aM(1,0).$$

1. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que dans ce cas $M(a,b)$ est diagonalisable.
2. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ et déterminer la valeur propre associée à V.
3. Montrer que $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^{n-1}$.
4. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.
5. On définit le polynôme $\mathcal{Q}_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par $\mathcal{Q}_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$. Montrer que $\mathcal{Q}_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a = 0$ et $a \neq 0$).

6. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $\mathcal{Q}_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n.
7. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $\big(M(a,b)^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

Partie II – Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u. On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $calB$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

On suppose (sauf à la **Q12**) que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1)$.

On suppose qu'il existe $i \in [\![1; n-1]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1; i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0$.

9. Montrer qu'il existe $x \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]}$ tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

10. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\| = 0$. En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.
11. Montrer alors que $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0$.
12. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Partie III – Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est une matrice à **diagonale strictement dominante.** On admet que dans ce cas A est inversible.

On définit ensuite $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$,

— si $i \geqslant j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$;

— si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$.

Ainsi, $A = M - F$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-A$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A.

Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X.

13. Justifier que M est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose $B = M^{-1}F$. On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

14. Montrer que $X = BX + M^{-1}Y$.

Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B. On note $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.

Par convention, si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors $\sum\limits_{j=n+1}^{n} u_j = \sum\limits_{j=1}^{0} u_j = 0$.

15. Montrer que $FV = \lambda MV$. En déduire que :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j\right).$$

16. Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1;n]\!]$ tel que $|v_{i_0}| = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$. En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right).$$

17. En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$.

18. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

et conclure.

Exercice 2 : Produit scalaire et isométrie

Soit E un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une base de E et $\theta \in]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathcal{B}$: $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :

$$\Phi(\vec{i}, \vec{j}) = \Phi(\vec{j}, \vec{i}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{i}, \vec{i}) = \Phi(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables.

1. Soit $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.
2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.
4. Déterminer un vecteur $\vec{k}$ de E tel que $(\vec{i}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{j}, \vec{k}) > 0$.
5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

Exercice 3 : Ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On note $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à 2 lignes et 2 colonnes et à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathcal{M}_2$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2$.

$\mathcal{D}_2$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{A}_2$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2$.

On rappelle que $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{M}_2$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2$.

1. Déterminer une base de $\mathcal{S}_2$ et une base de $\mathcal{A}_2$ et en déduire les dimensions de $\mathcal{S}_2$ et de $\mathcal{A}_2$.
2. (a) Justifier que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ constitué de matrices diagonalisables.

   (b) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_2$ diagonalisable qui ne soit pas dans $\mathcal{S}_2$.

   (c) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_2$ non diagonalisable.
3. En utilisant les résultats de la question précédente :

   (a) Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ contenu dans $\mathcal{D}_2$.

   (b) Déterminer si $\mathcal{D}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$.

   (c) Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$.
4. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 | (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2 | (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

   (a) Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2$.

   (b) Montrer que $\Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset F$. *(On pourra considérer les polynômes caractéristiques et leurs discriminants)*

   (c) $\mathcal{D}_2$ est-il un ouvert de $\mathcal{M}_2$? Un fermé de $\mathcal{M}_2$? Justifier.

   (On pourra considérer les suites (A_n) et (B_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} 1/n & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

SUJET 2

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n ;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$;
- $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0, 1]$;
- $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$ et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;
- M^T la transposée d'une matrice M.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$ à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$ définis ci-dessus. La partie 3 étudie le cas particulier des matrices de permutation. La partie 4 étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans $\{0, 1\}$.

I Généralités

I.A. Propriétés élémentaires

I.A.1 Justifier que $\mathcal{X}_n$ est un ensemble fini et déterminer son cardinal.

I.A.2 Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n$, $\det(M) \leqslant n!$ et qu'il n'y a pas égalité.

I.A.3 Démontrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A.4 Soit $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Montrer que $|\lambda| \leqslant n$ et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

I.B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

I.B.1 Faire la liste des éléments de $\mathcal{X}'_2$. Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

I.B.2 Démontrer que $\mathcal{X}'_2$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que, pour $n \geqslant 2$, $\mathcal{X}'_n$ engendre l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

II Deux problèmes d'optimisation

II.A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on note

$$(M|N) = \mathrm{Tr}(M^T N)$$

II.A.1 Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter $(M|N)$ en fonction des coefficients de M et N.
On notera $\|M\|$ la norme euclidienne associée.

II.A.2 On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prouver qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{Y}_n$ telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n,\ \|A - M\| \leqslant \|A - N\|$$

II.A.3 Justifier l'unicité de la matrice M ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de A.

II.B. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

II.B.1 Justifier que le déterminant possède un maximum sur $\mathcal{X}_n$ (noté x_n) et un maximum sur $\mathcal{Y}_n$ (noté y_n).

II.B.2 Démontrer que la suite $(y_k)_{k\geqslant 2}$ est croissante.

II.B.3 Soit $J \in \mathcal{X}_n$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose $M = J - I_n$. Calculer $\det(M)$ et en déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k = +\infty$.

II.B.4 Soit $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0, 1[$. Démontrer qu'en remplaçant $n_{i,j}$ soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice N' de $\mathcal{Y}_n$ telle que $\det(N) \leqslant \det(N')$. En déduire que $x_n = y_n$.

III Matrices de permutations

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.

On note S_n l'ensemble des bijections de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dans lui même (appelées *permutations*).

Pour tout $\sigma \in S_n$, on note P_σ la matrice de $\mathcal{P}_n$ dont le coefficient ligne i, colonne j vaut 1 si $i = \sigma(j)$ et 0 sinon. On dit que P_σ est la *matrice de permutation* associée à σ.

On note u_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P_σ.

III.A. Description de $\mathcal{P}_n$

III.A.1 Donner deux définitions d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et démontrer leur équivalence.

III.A.2 Démontrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors son déterminant vaut 1 ou -1. Que penser de la réciproque ?

III.A.3 Démontrer que $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$ et déterminer son cardinal.

III.B. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

III.B.1 Soient $\sigma, \sigma' \in S_n$. Démontrer que $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.
Justifier que l'application $k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ n'est pas injective. En déduire qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\sigma^N = \mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$ (application identité de $\{1, \ldots, n\}$).

III.B.2 Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

III.B.3 Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

III.B.4 On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$, sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + \cdots + e_n$ et l'hyperplan H orthogonal à D.

(a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les u_σ.

(b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Démontrer qu'il existe un couple $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ avec $i \neq j$ tel que $e_i - e_j \in V$, puis que les $n-1$ vecteurs $e_k - e_j$ ($k \in \{1,\dots,n\}$, $k \neq j$) appartiennent à V.

(c) Conclure.

III.C. Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice M de $GL_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

Démontrer que M^{-1} est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et en déduire que M est une matrice de permutation. Que dire de la réciproque ?

IV Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

IV.A. Génération par une colonne aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p.

IV.A.1 Calculer la probabilité que $X_1,\dots,X_n$ soient égales.

IV.A.2 Quelle est la loi de $S = X_1 + \cdots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

IV.A.3 Soient $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.

IV.A.4 i $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)U(\omega)^T$. L'application $M \ : \ \omega \in \Omega \mapsto M(\omega)$ est ainsi une variable aléatoire.

(a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

(b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{Tr}(M(\omega)) \in \{0,\dots,n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$.

(c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0,1\}$.

IV.A.5 Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{Tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

IV.A.6 Exprimer M^k en fonction de S et M. Quelle est la probabiité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

IV.A.7 Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

IV.B. Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de M_k de la manière suivante

- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;

- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, PP)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geqslant 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

IV.B.1 Dans toute cette question on utilise le langage Python. `M` désigne une matrice carrée d'ordre n. Ses lignes et colonnes sont numérotées de 0 à $n-1$. L'expression `M[i,j]` permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j et `len(M)` donne l'ordre de la matrice `M`.

(a) Ecrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice `M`.

(b) Ecrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $1 - p$. On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle $[0, 1[$ selon la loi uniforme.

(c) A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `Modifie(M,p)` qui modifie aléatoirement la matrice `M` selon le principe décrit plus haut.

(d) Ecrire une fonction `Simulation(n,p)` qui renvoie le plus petit entier k tel que M_k est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre n (qui peut être obtenue par `zeros((n,n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les M_k.

IV.B.2 Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

IV.B.3 Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus, $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

IV.B.4 Pour un entier $k \geqslant 1$, donner la valeur de $\mathbb{P}(T_{i,j} \geqslant k)$.

IV.B.5 Soient $r \geqslant 1$ un entier et $S_r = N_1 + \cdots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

IV.B.6 On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

(a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.

(b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m.