PC Balzac 2023-24

Devoir surveillé de mathématiques n° 5 – Corrigé

Problème 1 : Puissances de matrices et limites de suites de matrices *(D'après CCINP PSI 2023)*

> **Extrait du rapport**
>
> Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble, mais on regrette la présence trop importante de ratures et de surcharges ou encore d'abréviations qui nuisent à la lisibilité. Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours.
> Notons également que l'honnêteté intellectuelle est évaluée dans les copies. En particulier dans les démonstrations où le résultat est donné dans l'énoncé, donner le résultat réellement obtenu peut permettre de gagner quelques points là où tenter le bluff pour tomber à tout prix sur le résultat de l'énoncé n'en vaudra aucun.

Partie I – Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

1. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b)$ est symétrique réelle donc $\boxed{M(a,b) \text{ est diagonalisable}}$ d'après le théorème spectral.

> **Extrait du rapport**
>
> Certains candidats ont mené toute l'étude du polynôme caractéristique pour y répondre. Ils auraient gagné du temps en lisant les questions suivantes qui aidaient à détailler cette démarche.

2. $M(a,b)V = ((n-1)a+b)V$ et $V \neq 0$ donc
$\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } M(a,b) \text{ associé à la valeur propre } (n-1)a+b.}$

3. $$P_{1,0}(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i}{=} \begin{vmatrix} X-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ X-(n-1) & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ X-(n-1) & \cdots & -1 & X \end{vmatrix}$$
$$\underset{\forall i \geqslant 2, L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} \begin{vmatrix} X-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & X+1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X+1 \end{vmatrix}$$
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux donc $\boxed{P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}.}$
Autre méthode :
D'après la question précédente, $n-1$ est valeur propre de $M(1,0)$ donc $(X-(n-1))$ divise $P_{1,0}$.
$M(1,0)+I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 (non nulle, toutes les lignes sont proportionnelles).
Par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(M(1,0)+I_n)) = n-1$ donc -1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$, donc $(X+1)^{n-1}$ divise $P_{1,0}$.
Puisque $P_{1,0}$ est de degré n et unitaire, on a bien $\boxed{P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}.}$

4. Soit $a \neq 0$. $P_{a,b}(X) = \det(XI_n - M(a,b)) = \det(XI_n - bI_n - aM(1,0))$
   $= \det((X-b)I_n - aM(1,0)) = a^n \det(\frac{(X-b)}{a} I_n - M(1,0))$ *(car* $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$*.)*
   $\boxed{P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right).}$
   Ainsi, λ est racine de $P_{a,b}$ de multiplicité $m \Leftrightarrow \dfrac{\lambda - b}{a}$ est racine de $P_{1,0}$ de multiplicité m.
   D'après la question précédente les racines de $P_{1,0}$ sont $n-1$ (de multiplicité 1) et -1 (de multiplicité $n-1$).
   $\boxed{\text{Les valeurs propres de } M(a,b) \text{ sont donc } (n-1)a+b \text{ (simple) et } b-a \text{ (multiplicité } n-1).}$

   Extrait du rapport

   certains candidats ont refait les mêmes calculs qu'en question 3 alors que l'énoncé les amenaient à utiliser le résultat de la question 3.

5. Si $a = 0$, $M(0,b) = bI_n$ et $X - b$ annule $M(0,b)$ donc $\mathcal{Q}_{0,b} = (X-b)^2$ également.
   On suppose $a \neq 0$.
   $\mathcal{Q}_{a,b}(M(a,b)) = (M(a,b) - (b-a)I_n)(M(a,b) - (b+(n-1)a)I_n)$
   $= a(M_{1,0} + I_n))a(M(1,0) - (n-1)I_n) = a^2(JM(1,0) - (n-1)J) = 0$ *(en notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1).*
   donc $\boxed{\mathcal{Q}_{a,b} \text{ annule } M(a,b).}$
   Si $a \neq 0$, $M(a,b)$ est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc est diagonalisable.
   Si $a = 0$, $M(0,b) = bI_n$ est diagonale donc diagonalisable.
   $\boxed{\text{Pour tous complexes } a \text{ et } b, M(a,b) \text{ est diagonalisable.}}$

   Extrait du rapport

   Le cas particulier $a = 0$ est souvent oublié.

6. Posons la division euclidienne $X^k = A\mathcal{Q}_{a,b} + R$ avec $\deg(R) < \deg(\mathcal{Q}(a,b)) = 2$ donc $\boxed{R = \alpha_k X + \beta_k.}$
   On évalue en les racines de $\mathcal{Q}(a,b)$, *i.e.* en $b-a$ et en $b+(n-1)a$.
   On trouve donc $(b-a)^k = \alpha_k(b-a) + \beta_k$ et $(b+(n-1)a)^k = \alpha_k(b+(n-1)a) + \beta_k$.
   Il vient $\boxed{\alpha_k = \dfrac{1}{na}((b+(n-1))a)^k - (b-a)^k)}$ et
   $\boxed{\beta_k = \dfrac{1}{na}((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)).}$
   Puisque $M(a,b)^k = A\mathcal{Q}_{a,b}(M(a,b)) + R(M(a,b)) = R(M(a,b))$ car $\mathcal{Q}_{a,b}$ annule $M(a,b)$, on a $\boxed{M(a,b)^k = \alpha_k M(a,b) + \beta_k I_n}$ avec les valeurs de α_k et β_k obtenues ci-dessus.

   Extrait du rapport

   les candidats qui abordent cette question sont ceux qui connaissent la méthode et les calculs à mener. Ceux-là parviennent généralement à donner le bon résultat. Certains tentent maladroitement de "poser" une division euclidienne sans savoir de quoi il s'agit.

7. Supposons que $|b-a|<1$ et $|b+(n-1)a|<1$, alors $(b-a)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $(b+(n-1)a)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $\beta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

   Par opérations sur les limites, $\boxed{M(a,b)^k = \alpha_k M(a,b) + \beta_k I_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_n.}$

Partie II – Limite des puissances d'une matrice

8. D'après la matrice T, $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$.

   Par homogénéité de la norme, $\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|u(e_1)\|$. Puisque $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_1|^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_1)\| = 0.}$

   Il suit que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0_{\mathbb{R}^n}.}$

   Extrait du rapport

   Beaucoup d'erreurs de rédaction sont signalées, notamment lorsque le candidat ne distingue pas les égalités vectorielles des égalités en normes. Sur de nombreuses copies on lit que $\|e_1\| = 1$.

9. D'après la matrice T, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ tels que $u(e_{i+1}) = \sum\limits_{j=1}^{i} \alpha_j e_j + \lambda_{i+1} e_{i+1}$.

   ainsi $\boxed{\text{il existe } x \in \mathrm{Vect}(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]} \text{ tel que } u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.}$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(k)$: « $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$. »

   Ce qui précède prouve $\mathcal{P}(1)$.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(k)$ alors

   $$u^{k+1}(e_{i+1}) = u(u^k(e_{i+1})) = u(\lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)) = \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x)$$

   $$= \lambda_{i+1}^k (\lambda_{i+1} e_{i+1} + x) + \sum_{m=1}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m} u^m(x) \text{ d'où } \mathcal{P}(k+1)$$

   En conclusion, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).}$

10. On a $x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ donc il existe des complexes $x_1, \dots, x_i$ tels que $x = \sum\limits_{j=1}^{i} x_i e_i$.

    Par linéarité de u, $u^k(x) = \sum\limits_{j=1}^{i} x_i u^k(e_i)$. On on a supposé que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_i) = O$.

    Par opérations sur les limites, on a donc aussi :

    $$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(x) = O.}$$

    Une première conséquence est que la suite $(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|u^k(x)\| \leqslant M$.

    On montre le résultat demandé en revenant à la définion de limite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé : on a les majorations suivantes (inégalité triangulaire).

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

Or, $\lim_{m \to +\infty} u^m(x) = 0$ donc, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geqslant N,\ \|u^m(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $k > N$, on coupe la somme en 2. On sait que $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^n$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| &= \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leqslant M} + \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leqslant \varepsilon} \\
&\leqslant M \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \varepsilon \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\
&\leqslant M \sum_{n=k-N}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n \\
&\leqslant \frac{M}{1 - |\lambda_{i+1}|} |\lambda_{i+1}|^{k-N} + \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}
\end{aligned}$$

Or $\lim_{k \to +\infty} |\lambda_{i+1}|^{k-N} = 0$ donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour tout $k \geqslant N'$, on ait $|\lambda_{i+1}|^{k-N} \leqslant \varepsilon$.
En reportant dans la majoration précédente, on a trouvé N' tel que pour tout entier $k \geqslant N'$, on ait :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leqslant \varepsilon \frac{M+1}{1 - |\lambda_{i+1}|} = C\varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement avec $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{C}$, on a bien démontré que :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0.}$$

On a alors, en utilisant (**Q9**) et $|\lambda_{i+1}| < 1$:

$$\|u^k(e_{i+1})\| = \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et par le théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{k \to +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0.}$

11. D'après les deux questions précédentes, $u^k(e_1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et si, pour tout $j \in [\![1,i]\!]$, $u^k(e_j) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, alors $u^k(e_{i+1}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

    Ceci assure par récurrence forte que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u^k(e_i) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

    Or les coordonnées de $u^k(e_i)$ forment la i-ème colonne de T^k.

    Donc toutes les colonnes de T^k tendent vers 0.

    Ainsi $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0.}$

12. Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable. Ainsi, il existe T triangulaire supérieure telle que $A = PTP^{-1}$. Puisque $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(T)$, on peut appliquer à T les résultats précédents et donc $T^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.

    Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PT^kP^{-1}$. Par continuité du produit matriciel $\boxed{A^k \text{ tend vers } P \times 0 \times P^{-1} = 0.}$

Partie III – Application à la méthode de Gauss-Seidel

13. M est triangulaire inférieure. Donc $\det(M) = \prod\limits_{i=1}^{n} m_{i,i} = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Or, A étant à diagonale strictement dominante, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > 0$ donc $a_{i,i} \neq 0$ donc $\det(M) \neq 0$.
    $\boxed{M \text{ est donc inversible.}}$

    Extrait du rapport

    On observe également beaucoup d'arguments faux, comme les matrices triangulaires donc inversibles, ou encore que les coefficients diagonaux de A sont non nuls parce que A est inversible.

14. $BX+M^{-1}Y = M^{-1}FX+M^{-1}AX = M^{-1}(F+A)X = M^{-1}MX$ donc $\boxed{X = BX + M^{-1}Y.}$

15. $BV = \lambda V$ donc $M^{-1}FV = \lambda V$. En multipliant à gauche par M, $\boxed{FV = \lambda MV.}$

    Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $[FV]_i = \sum\limits_{j=1}^{n} f_{i,j}v_j = \sum\limits_{j=1}^{i} f_{i,j}v_j + \sum\limits_{j=i+1}^{n} f_{i,j}v_j = -\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j$.

    $[MV]_i = \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}v_j = \sum\limits_{j=1}^{i} m_{i,j}v_j + \sum\limits_{j=i+1}^{n} m_{i,j}v_j = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j}v_j = a_{i,i}v_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j$

    En reprenant l'égalité $FV = \lambda MV$ à l'indice i, on a donc $-\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j = \lambda(a_{i,i}v_i + \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j)$

    d'où $\boxed{\lambda a_{i,i}v_i = -\left(\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j + \lambda \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j\right).}$

16. V est un vecteur propre donc il est non nul. Ainsi $\max |v_j| > 0$.

    $\boxed{\text{Il existe } i_0 \in [\![1;n]\!] \text{ tel que } |v_{i_0}| = \max\limits_{j\in[\![1;n]\!]} |v_j| \text{ et } v_{i_0} \neq 0.}$

    On reprend la question précédente avec $i = i_0$.

    $$\lambda a_{i_0,i_0}v_{i_0} = -\left(\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}v_j\right).$$

    Par inégalité triangulaire

    $$|\lambda a_{i_0,i_0}||v_{i_0}| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}||v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}||v_j|\right).$$

    On divise par $|v_{i_0}| > 0$:

$|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|\dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|} + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|}\right).$

Par définition de $v_{i,0}$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leqslant 1$

Tous les termes étant positifs, $\boxed{|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)}.$

17. Si $\lambda = 0$, $|\lambda| < 1$. On suppose maintenant $\lambda \neq 0$.

    A étant à diagonale strictement dominante, $|a_{i_0,i_0}| > \sum_{j=1}^{i_0} |a_{i_0,j}| + \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$

    d'où (puisque $|\lambda| > 0$) $|\lambda a_{i_0,i_0}| > |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$

    donc $|\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| < |\lambda a_{i_0,i_0}| - |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$

    Avec la question précédente $|\lambda a_{i_0,i_0}| < \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda a_{i_0,i_0}| - |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$

    d'où $(1 - |\lambda|) \underbrace{\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|}_{\geqslant 0} > 0$ donc $1 - |\lambda| > 0$ puis $\boxed{|\lambda| < 1}$.

    $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(B), |\lambda| < 1$ donc $\boxed{\lim_{k \to +\infty} B^k = 0}$ d'après la partie II.

18. $B^0 = I_n$ donc $X_0 - X = B^0(X_0 - X)$.

    Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $X_k - X = B^k(X_0 - X)$

    Alors $X_{k+1} - X = BX_k + M^{-1}Y - X = M^{-1}FX_k + M^{-1}AX - X$

    $= M^{-1}FX_k + M^{-1}(M-F)X - X = M^{-1}F(X_k - X) + X - X = B(X_k - X) = BB^k(X_0 - X)$

    par hypothèse de récurrence, d'où $X_{k+1} - XB^{k+1}(X_0 - X)$

    En conclusion de la récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)}$

    Puisque $B^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, par continuité du produit matriciel, $X_k - X \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \times (X_0 - X) = 0$

    donc $\boxed{X_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} X.}$

Exercice 2 : Produit scalaire et isométrie *(D'après E3A PSI 2020)*

Extrait du rapport

Dans ce petit exercice de géométrie euclidienne en dimension 2, on pouvait faire des dessins pour voir ce qui se passait. Il semble que beaucoup de candidats ont manipulé des calculs sans aucune réalité.
Rappelons que la décomposition canonique d'un trinôme du second degré peut souvent être efficace, à condition ici de savoir que $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$...

1. Soit $X = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ et $Y = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$ deux vecteurs de E.

   Par bilinéarité de Φ, $\Phi(X, Y) = x_1y_1\Phi(\vec{i}, \vec{i}) + x_1y_2\Phi(\vec{i}, \vec{j}) + x_2y_1\Phi(\vec{j}, \vec{i}) + x_2y_2\Phi(\vec{j}, \vec{j})$

   $\boxed{\Phi(X, Y) = \cos\theta(x_1y_2 + x_2y_1) + x_1y_1 + x_2y_2.}$

2. Par hypothèse de l'énoncé, Φ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Il suffit donc de prouver qu'elle est définie positive.
   Soit $X = x_1\vec{i}+x_2\vec{j} \in E$. $\Phi(X,X) = 2x_1x_2\cos\theta+x_1^2+x_2^2 = x_1^2+2x_1x_2\cos\theta+x_2^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$
   $= (x_1+x_2\cos\theta)^2+(x_2\sin\theta)^2 \geqslant 0$ donc $\underline{\Phi \text{ est positive.}}$
   On suppose $\Phi(X,X) = 0$. Puisqu'il s'agit d'une somme de deux termes positifs, $x_1+x_2\cos\theta = 0$ et $x_2\sin\theta = 0$. Or $\theta \in]0,\pi[$ donc $\sin\theta > 0$ puis $x_2 = 0$ puis $x_1 = 0$ donc $X = \vec{0}$, ainsi $\underline{\Phi \text{ est définie.}}$
   En conclusion, $\boxed{\Phi \text{ définit bien un produit scalaire sur } E.}$
3. Soit $X = x_1\vec{i}+x_2\vec{j} \in E$. $\|f(X)\|^2 = \Phi(f(X),f(X))$
   Or $f(X) = -x_2\vec{i}+(x_1+2\cos\theta x_2)\vec{j}$,
   donc $\Phi(f(X),f(X)) = (-x_2)^2+(x_1+2\cos\theta x_2)^2+2(-x_2)(x_1+2\cos\theta x_2)\cos\theta$
   $= x_2^2+x_1^2+4\cos\theta x_1x_2+4\cos^2\theta x_2^2-2x_1x_2\cos\theta-4\cos^2\theta x_2^2$
   $= x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\cos\theta = \Phi(X,X)$.
   Ainsi, $\forall X \in E, \|f(X)\|^2 = \|X\|^2$ et f est un endomorphisme de E.
   $\boxed{f \text{ est une isométrie pour le produit scalaire } \Phi.}$
4. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille libre $(\vec{i},\vec{j})$.
   $\vec{i}$ est déjà unitaire par hypothèse ($\Phi(\vec{i},\vec{i}) = 1$).
   Soit $\vec{u} = \vec{j}+\lambda\vec{i}$ tel que $\vec{u} \perp \vec{i}$, alors $\Phi(\vec{j},\vec{i})+\lambda\Phi(\vec{i},\vec{i}) = 0$ donc $\lambda = -\Phi(\vec{j},\vec{i}) = -\cos\theta$ puis $\vec{u} = \vec{j}-\cos\theta\vec{i}$.
   On pose ensuite $\vec{k} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.
   $\|\vec{u}\|^2 = (-\cos\theta)^2+1^2+2(-\cos\theta)\times 1\times\cos\theta = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$. Puisque $\sin\theta > 0$,
   $\boxed{\vec{k} = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{i}+\dfrac{1}{\sin\theta}\vec{j}.}$
5. D'après ce qui précède, $\vec{j} = \cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{k}$.
   D'après la matrice C, $f(\vec{i}) = \vec{j} = \cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{k}$.
   et $f(\vec{k}) = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}f(\vec{i})+\dfrac{1}{\sin\theta}f(\vec{j}) = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\vec{j}+\dfrac{1}{\sin\theta}(-\vec{i}+2\cos\theta\vec{j})$
   $= -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{k})-\dfrac{1}{\sin\theta}\vec{i}+2\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{k})$
   $= \dfrac{-\cos^2\theta-1+2\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{i}+(-\cos\theta+2\cos\theta)\vec{k} = -\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}\vec{i}+\cos\theta\vec{k}$
   $= -\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\vec{i}+\cos\theta\vec{k} = -\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{k}$.
   $\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (\vec{i},\vec{k}) \text{ est donc } \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}$
   Il s'agit de la matrice de rotation plane d'angle θ. La base $(\vec{i},\vec{k})$ étant orthonormée, $\boxed{f \text{ est la rotation vectorielle plane d'angle } \theta.}$
6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que f^m est la rotation vectorielle plane d'angle $m\theta$.
   Ainsi, $f^m = \mathrm{id}_E \Leftrightarrow m\theta \equiv 0[2\pi]$, *i.e.* $\theta = \dfrac{2k\pi}{m}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $\theta \in]0,\pi[$. $\dfrac{2k\pi}{m} \in]0,\pi[\Leftrightarrow k > 0$ et $k < \dfrac{m}{2}$
   $\boxed{\text{On a donc } f^m = \mathrm{id}_E \text{ si et seulement si } \theta = \dfrac{2k\pi}{m}, \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k < \dfrac{m}{2}.}$

Exercice 3 : Ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *(D'après E3A PSI 2018 – Math 1)*

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$.
   $M \in \mathcal{S}_2 \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow M = aE_{1,1} + b(E_{1,2} + E_{2,1} + dE_{2,2}$ (où les $E_{i,j}$ sont les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2$)
   $\Leftrightarrow M \in \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2})$.
   $\mathcal{B}_S = (E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2})$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{S}_2$.
   $aE_{1,1} + b(E_{1,2} + E_{2,1} + dE_{2,2} = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = d = 0$ donc $\mathcal{B}_S$ est libre
   $\boxed{\mathcal{B}_S = (E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}) \text{ est une base de } \mathcal{S}_2 \text{ donc } \dim \mathcal{S}_2 = 3}$.
   $M \in \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow a = 0; d = 0; b = -c \Leftrightarrow M = b(E_{1,2} - E_{2,1})$
   $\Leftrightarrow M \in \text{Vect}(E_{1,2} - E_{2,1})$.
   $\mathcal{B}_A = (E_{1,2} - E_{2,1})$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{A}_2$ constituée d'un unique vecteur non nul.
   $\boxed{\mathcal{B}_A = (E_{1,2} - E_{2,1}) \text{ est une base de } \mathcal{A}_2 \text{ donc } \dim \mathcal{A}_2 = 1}$.
2. (a) $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{M}_2$. La matrice nulle est symétrique.
   Soit $M, N \in \mathcal{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda M + N)^T = \lambda M^T + N^T = \lambda M + N$ car M et N sont symétriques, donc $\lambda M + N \in \mathcal{S}_2$.
   Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2.}$
   D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable donc $\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est constitué de matrices diagonalisables.}}$

   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux. A possède donc 2 valeurs propres distinctes (1 et 3) et $A \in \mathcal{M}_2$, donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable et } A \text{ n'est pas symétrique.}}$

   (c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = x^2 + 1$ donc χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$
3. (a) D'après la question précédente, toutes les matrices de $\mathcal{M}_2$ ne sont pas diagonalisables. Ainsi, un sous-espace de $\mathcal{M}_2$ inclus dans $\mathcal{D}_2$ est inclus strictement dans $\mathcal{M}_2$ donc sa dimension est strictement inférieure à $\dim \mathcal{M}_2 = 4$, *i.e.* inférieure ou égale à 3.
   On a montré que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_2$ inclus dans $\mathcal{D}_2$, de dimension 3.
   Ainsi, $\boxed{\text{la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2 \text{ contenu dans } \mathcal{D}_2 \text{ est 3.}}$

   (b) On suppose que $\mathcal{D}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$. D'après la question précédente, on a alors $\dim \mathcal{D}_2 = 3$.
   On a $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{D}_2$, et $\dim \mathcal{S}_2 = \dim \mathcal{D}_2$ donc $\mathcal{S}_2 = \mathcal{D}_2$. Or on a montré qu'il existe des matrices de $\mathcal{D}_2$ qui ne sont pas symétriques, donc $\mathcal{S}_2 \neq \mathcal{D}_2$. On aboutit à une contradiction donc $\boxed{\mathcal{D}_2 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2.}$

   (c) Un sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{D}_2$ contient nécessairement $\mathcal{S}_2$. Or, puisque $\dim \mathcal{S}_2 = 3$, un sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{S}_2$ ne peut être que de dimension 3 (et c'est alors $\mathcal{S}_2$ puisqu'il le contient et a même dimension) ou 4 (et c'est alors $\mathcal{M}_2$). On a déjà vu qu'il y a des matrices non symétriques et diagonalisables, il ne peut donc pas s'agir de $\mathcal{S}_2$.

On a bien $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{M}_2$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'unique sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2 \text{ contenant } \mathcal{D}_2 \text{ est } \mathcal{M}_2.}$

4. (a) Les applications $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto a$, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto b$, ...sont linéaires sur un espace de dimension finie, elles sont donc continues. L'application $(a, b, c, d) \mapsto (a-d)^2 + 4bc$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^4$.
Par composition, $f : M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto (a-d)^2 + 4bc$ est continue de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}$.
Or $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_2 | f(M) > 0\}$ et $F = \big(M \in \mathcal{M}_2 | f(M) \geqslant 0\big)$.
On a bien prouvé que $\boxed{\Omega \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_2 \text{ et } F \text{ un fermé de } \mathcal{M}_2.}$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. $\chi_M(X) = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc$.
Le discriminant de χ_M est
$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2 + 2d + d^2 - 4ad - 4bc = a^2 - 2ad + d^2 - 4bc = (a-d)^2 + 4bc = f(M)$.
Soit $M \in \mathcal{D}_2$, alors χ_M est scindé donc $\Delta \geqslant 0$, donc $M \in F$.
On a bien $\boxed{\mathcal{D}_2 \subset F.}$
Soit $M \in \Omega$ alors $\Delta > 0$ donc χ_M est scindé à racines simples, donc $M \in \mathcal{D}_2$. On a alors $\boxed{\Omega \subset \mathcal{D}_2.}$

(c) On considère les suites (A_n) et (B_n) suggérées dans l'énoncé.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
0 est valeur propre double de A_n, mais A_n est non nulle donc non semblable à $0_2 = Diag(0, 0)$, donc $A_n \notin \mathcal{D}_2$. Or $\lim A_n = 0_2$ est diagonale donc diagonalisable. Ainsi, il existe une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_2^c$ convergeant vers une matrice de $\mathcal{D}_2$, donc $\mathcal{D}_2^c$ n'est pas fermé, et $\boxed{\mathcal{D}_2 \text{ n'est pas un ouvert de } \mathcal{M}_2.}$
B_n possède deux valeurs propres distinctes : $1/n$ et 0 donc $B_n \in \mathcal{D}_2$. Mais $\lim B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable pour les mêmes raisons que A_n. Ainsi, il existe une suite à valeurs dans $\mathcal{D}_2$ convergeant vers une limite qui n'appartient pas à $\mathcal{D}_2$ donc $\boxed{\mathcal{D}_2 \text{ n'est pas un fermé de } \mathcal{M}_2.}$