Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet propose l'étude de matrices à coefficients prenant les valeurs 0 ou 1. Il est constitué de quatre parties abordant des aspects différents : propriétés algébriques et topologiques, matrices de permutation et génération aléatoire de telles matrices.

Ce sujet permet de parcourir de nombreux points du programme de mathématique de PSI notamment les nouveaux thèmes introduits en 2014 : probabilités et informatique.

La notion de compacité posée à la question **I.A.3)** est hors programme. Le barème n'en a pas tenu compte et les élèves ayant su répondre à la question ont eu leurs points comptabilisés dans la partie II où l'hypothèse de fermé borné était utile.

Analyse globale des résultats

Les correcteurs ont pu constater que les candidats maitrisent les bases de la programmation en Python ainsi que les calculs élémentaires de probabilité. Il était donc assez facile d'obtenir des points dans la partie IV.

En revanche certaines notions mathématiques sont moins bien maitrisées : cardinalité, convexité, projection, diagonalisation... De manière moins surprenante, les questions de topologie posent problème à de nombreux candidats.

Le sujet est d'une longueur et d'une difficulté raisonnable. À l'exception de la question **IV.B.6b)**, toutes les questions ont été correctement traitées par au moins un candidat. Néanmoins, certaines ont été très peu abordées (typiquement la fin des parties III et IV) ou très mal (partie II surtout).

Enfin, de nombreux candidats ne portent aucune attention à la présentation de leurs copies. Celles-ci sont parfois difficilement lisibles ce qui fait courir un risque de mauvaise compréhension par les correcteurs.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le jury souhaite insister sur un certain nombre de points qui ont souvent posé problème aux candidats.

- Les candidats doivent faire un effort de présentation des copies.
- Les candidats cherchent parfois des rédactions inutilement compliquées alors qu'une démonstration sobre permet d'obtenir un résultat juste et convainquant.
- La diagonalisation est très mal maitrisée : matrice déjà diagonale, matrice déjà triangulaire avec unique valeur sur la diagonale, matrice symétrique réelle, confusion sur les conditions nécessaires et suffisantes, difficulté à calculer un polynôme caractéristique d'une matrice 2×2...
- La notion d'ensemble fini a semblé être d'une difficulté et d'une abstraction inaccessibles à la plupart avec souvent une confusion entre cardinal et dimension. Rares sont les candidats qui s'appuient sur la non existence d'une injection d'un ensemble infini dans un ensemble fini.

- La démonstration de l'existence d'un max ou d'un min pose souvent problème, d'autant plus qu'il y a souvent confusion avec sup et inf.
- Beaucoup de candidats croient qu'une projection orthogonale a une matrice orthogonale ou se trompent sur le lien entre matrices orthogonales et symétriques.
- Il faut bien lire les questions et ne pas confondre « valeurs propres communes » et « vecteurs propres communs ».
- L'inégalité triangulaire et les majorations de valeur absolues sont très mal maitrisées.

Le jury a apprécié les points suivants.

- L'informatique et la syntaxe Python sont bien, voire très bien, maitrisées.
- Les probabilités sont généralement bien maitrisées, par exemple pour l'écriture des événements avec intersections et réunions, et justifications avec incompatibilité ou indépendance. Les lois usuelles aussi. Quelques copies sont néanmoins d'une faiblesse étonnante.
- Les correcteurs ont pris plaisir à lire quelques excellentes copies.

Conclusion

Le sujet était d'une longueur et d'une difficulté raisonnable. Il a permis de mettre en évidence les sujets maitrisés par une majorité de candidats (programmation Python, probabilités de base) ainsi que les notions posant problème (topologie, cardinalité, projection, recherche d'extrema, diagonalisation).

De nombreuses erreurs choquantes pourraient être évitées si les candidats avaient en tête quelques exemples et contre-exemples simples sur les notions essentielles du programme. Il leur serait alors plus facile de généraliser (passer en dimension infinie par exemple) ou de comprendre la difficulté (ou la simplicité) des cas proposés.

Centrale 2016 - PSI 1
un corrigé

1 Généralités

A. Propriétés élémentaires

1.A.1 $\mathcal{X}_n$ est en bijection avec $\{0,1\}^{(n^2)}$. C'est donc un ensemble fini et

$$\mathrm{card}(\mathcal{X}_n) = 2^{(n^2)}$$

1.A.2 On procède par récurrence pour montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n,\ |\det(M)| < n!$$

- <u>Initialisation</u> : soit $M \in \mathcal{Y}_2$. On a $\det(M) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1} \in [-1,1]$ (car $m_{1,1}m_{2,2}, m_{1,2}m_{2,1} \in [0,1]$). On a donc $|\det(M)| \leq 1 < 2$. Le résultat est donc vrai au rang 1.
- <u>Hérédité</u> : supposons le résultat vrai à un rang $n \geq 1$. Soit $M \in \mathcal{Y}_{n+1}$. Un développement par rapport à la dernière colonne donne

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} m_{i,n+1} \det(M_{n+1,i}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,n+1} |\det(M_{n+1,i})|$$

où $M_{n+1,i}$ est obtenue à partir de M en supprimant ligne i et colonne $n+1$ et est donc dans $\mathcal{Y}_n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$|\det(M)| \leq n! \sum_{i=1}^{n+1} m_{i,n+1} \leq (n+1)!$$

La dernière inégalité n'est une égalité que si la dernière colonne vaut $(1,\dots,1)$ mais dans ce cas $|\det(M)| = 0 < (n+1)!$. On a donc le résultat au rang $n+1$.

On en déduit le résultat demandé qui est moins fort que celui prouvé.

1.A.3 On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\| = \sup\{|m_{i,j}|/\ 1 \leq i,j \leq n\}$ (cela ne change rien puisque l'on travaille en dimension finie où le choix de la norme est indifférent). On a alors

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n,\ \|M\| \leq 1$$

et $\mathcal{Y}_n$ est bornée.
Soit (M_p) une suite convergente d'éléments de $\mathcal{Y}_n$. En notant M la limite, $M_{i,j}$ est la limite le la suite de terme général $(M_p)_{i,j} \in [0,1]$ et on a donc $M_{i,j} \in [0,1]$. Ceci montre que $M \in \mathcal{Y}_n$ et que cet ensemble est fermé. Finalement,

$$\mathcal{Y}_n \text{ est un compact de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soient $A, B \in \mathcal{Y}_n$ et $\lambda \in [0,1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. On a

$$\forall i,j \in [|1,n|],\ M_{i,j} = \lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} \in [0,1]$$

car $[0,1]$ est convexe. Ainsi $M \in \mathcal{Y}_n$ et

$$\mathcal{Y}_n \text{ est un convexe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

1.A.4 Soient $M \in \mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre associée. On a $MX = \lambda X$. Il existe un entier i tel que $|x_i| = \max\{|x_k|/\ 0 \le k \le n\}$. On a

$$\lambda x_i = (MX)_i = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} x_k$$

et donc

$$|\lambda|.|x_i| \le \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}|x_k| \le |x_i| \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \le n|x_i|$$

Comme $|x_i| > 0$ car $X \neq 0$, on en déduit que $|\lambda| \le n$. Ainsi

$$\forall M \in \mathcal{Y}_n,\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M),\ |\lambda| \le n$$

La matrice J_n dont tous les coefficients valent 1 est dans $\mathcal{Y}_n$ et n est valeur propre de J_n (vecteur propre associé $(1, \dots, 1)$).

B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

1.B.1 Soit $M \in \mathcal{X}_2$. Si M a 0 ou 1 coefficient non nul, elle est non inversible (de rang 0 ou 1). Si elle en a quatre, elle n'est pas inversible non plus (deux colonnes égales). Il reste à traiter le cas où il y a 2 ou 3 coefficients non nuls. On trouve que

$$\mathcal{X}'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Les polynômes caractéristiques de ces matrices sont (dans l'ordre)

$$(X-1)^2,\ X^2-1,\ (X-1)^2,\ X^2-X-1,\ X^2-X-1,\ (X-1)^2$$

Quand ce polynôme a deux racines distinctes, la matrice est diagonalisable (et possède deux sous-espaces propres de dimension 1). Quand il a une racine double, la matrice n'est diagonalisable que si elle est scalaire. Quand il n'y a pas de racine réelle, on a une matrice non diagonalisable. Les éléments diagonalisables de $\mathcal{X}'_2$ sont donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.B.2 On a

$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les éléments de la base canonique s'expriment donc comme combinaisons d'éléments de $\mathcal{X}'_2$ et $\mathcal{X}'_2$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De même, on veut montrer que pour $n \ge 3$, toute matrice $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme combinaison linéaires d'éléments de $\mathcal{X}'_n$. Soient donc $i, j \in [|1, n|]$.

- Si $i \neq j$, $E_{i,j} = (I_n + E_{i,j}) - I_n$ est une décomposition convenable.
- Si $i \neq j$ alors la matrice M obtenue à partir de I_n en permutant les lignes i et j est dans $\mathcal{X}'_n$ et $I_n - M = E_{i,i} + E_{j,j} - E_{i,j} - E_{j,i}$. $E_{i,i} + E_{j,j} = I_n - M + E_{i,j} + E_{j,i}$ est donc combinaison d'éléments de $\mathcal{X}'_n$ avec le premier cas. On a alors

$$E_{i,i} - E_{j,j} = (E_{i,i} + E_{k,k}) - (E_{j,j} + E_{k,k})$$

  qui est aussi combinaison d'éléments de $\mathcal{X}'_n$ (on peut choisir $k \notin \{i, j\}$ puisque $n \ge 3$).
- Ainsi, pour $i \in [|1, n|]$, $E_{i,i} = \frac{1}{2}((E_{i,i} + E_{j,j}) + (E_{i,i} - E_{j,j}))$ est combinaison d'éléments de $\mathcal{X}'_n$ (on peut choisir $j \neq i$).

2 Deux problèmes d'optimisation

A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

2.A.1 On remarque que

$$(M|N) = \sum_{i=1}^{n} (M^T N)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{j,i} N_{j,i}$$

Cette application correspond ainsi au produit scalaire canonique en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{(n^2)}$. On trouve d'ailleurs, avec cette formule, facilement les propriétés du produit scalaire (symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable, défini positif).

2.A.2 L'application $M \mapsto \|A - M\|$ est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur le compact $\mathcal{Y}_n$. En notant $M \in \mathcal{Y}_n$ un élément où elle atteint son minimum, on a alors

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n,\ \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

2.A.3 La matrice M doit être dans $\mathcal{Y}_n$, c'est à dire avoir des coefficients dans $[0,1]$ et minimiser la quantité

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$

Elle minimise donc chacune des quantités (indépendantes les unes des autres) $(a_{i,j} - m_{i,j})^2$ et minimise donc $|a_{i,j} - m_{i,j}|$. On a donc

$$m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } a_{i,j} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } a_{i,j} > 1 \\ 0 & \text{si } a_{i,j} < 0 \end{cases}$$

Il y a unicité de M car pour tout y, $x \mapsto |y - x|$ atteint son minimum sur $[0,1]$ en un unique point.

B. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

2.B.1 Le déterminant est une application multilinéaire en dimension finie et donc continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur tout compact. C'est en particulier le cas sur $\mathcal{Y}_n$ et sur $\mathcal{X}_n$ (toute partie finie est évidemment compacte puisque fermée et bornée). On pose

$$x_n = \max_{M \in \mathcal{X}_n} \det(M) \ \text{ et } \ y_n = \max_{M \in \mathcal{Y}_n} \det(M)$$

2.B.2 Soit $k \geq 2$. Soit $M \in \mathcal{Y}_k$; notons $M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (définition par blocs). On a évidemment $M' \in \mathcal{Y}_{k+1}$ et $\det(M') = \det(M)$ (déterminant bloc diagonal). Ainsi

$$\det(M) = \det(M') \leq y_{k+1}$$

En passant au maximum, on en déduit que

$$y_k \leq y_{k+1}$$

2.B.3 La matrice M a tous ses coefficients égaux sauf ceux sur la diagonale qui valent 1. On effectue l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ ce qui permet de factoriser le déterminant par $n-1$. On soustrait alors la première colonne à toutes les autres. Ces opérations laissent le déterminant invariant et donnent un déterminant triangulaire de coefficients diagonaux $1, -1, \dots, -1$. On a aindi

$$\det(M) = (n-1)(-1)^{n-1}$$

En particulier, $y_{2n+1} \geq 2n$ et $y_{2n+1} \to +\infty$. Par croissance de la suite (y_k), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$$

2.B.4 Un développement par rapport à la colonne j donne

$$\det(N) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} n_{k,j} \det(N_{k,j})$$

où $N_{k,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de N en enlevant colonne j et ligne k. Si $(-1)^{i+j}\det(N_{i,j}) \geq 0$, on pose $n'_{i,j} = 1$ et sinon on pose $n'_{i,j} = 0$. Par ailleurs, on pose $n'_{u,v} = n_{u,v}$ si $(u,v) \neq (i,j)$.
N et N' ayant même colonne j, $\det(N_{k,j}) = \det(N'_{k,j})$ pour tout k.
Par choix de $n'_{i,j}$, on a $(-1)^{i+j}\det(N_{i,j})n_{i,j} \leq (-1)^{i+j}\det(N'_{i,j})n'_{i,j}$.
Enfin, $(-1)^{k+j}\det(N_{k,j})n_{k,j} = (-1)^{k+j}\det(N'_{k,j})n'_{k,j}$ pour $k \neq i$. Ainsi,

$$\det(N) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} n_{k,j} \det(N_{k,j}) \leq \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} n'_{k,j} \det(N'_{k,j}) = \det(N')$$

et bien sûr $N' \in \mathcal{Y}_n$.
En répétant ce processus pour tous les couples (i,j), on trouve une matrice $M \in \mathcal{X}_n$ telle que $\det(N) \leq \det(M)$. On a ainsi

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n,\ \det(N) \leq x_n$$

En passant au maximum, on trouve que $y_n \leq x_n$. Comme $\mathcal{X}_n \subset \mathcal{Y}_n$, l'inégalité inverse est évidente et finalement

$$x_n = y_n$$

3 Matrices de permutations

A. Description de $\mathcal{P}_n$

3.A.1 On dit que u est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ si

$$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ (u(x)|u(y)) = (x|y) \tag{1}$$

Montrons que ceci équivaut à

$$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \ \text{ et } \ Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(u) \in O_n(\mathbb{R}) \tag{2}$$

- Supposons (1) vérifiée. En particulier, $(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ et $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$. $Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(u)$ s'interprétant aussi comme matrice de passage entre $(e_1, \dots, e_n)$ et $(u(e_1), \dots, u(e_n))$, c'est une matrice de passage entre b.o.n. et donc unematrice orthogonale.
- Supposons (2) vérifiée. Les colonnes de $Mat_{(e_1,\dots,e_n)}(u)$ forment alors une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ et cette matrice s'interprère comme matrice de passage entre b.o.n. On en déduit que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$. Soient alors $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$(u(x)|u(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) | \sum_{i=1}^{n} y_i u(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x|y)$$

3.A.2 Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $M^T M = I_n$. Le déterminant étant un morphisme multiplicatif invariant par transposition, on en déduit que $\det(M)^2 = 1$ et on a donc

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}),\ \det(M) \in \{1, -1\}$$

La réciproque est fausse comme le montre la matrice $\text{diag}(2, 1/2, 1, \dots, 1)$ qui est de déterminant 1 mais non orthogonale (première colonne non normée).

3.A.3 On doit prouver une double inclusion.

- Soit $M \in \mathcal{P}_n$. Chaque colonne de P est un des e_i (car il y a un unique 1 et des 0) et pour tout i, il existe $s(i)$ tel que la colonne i de P soit $e_{s(i)}$. De plus, deux colonnes sont différentes (car il y a un unique 1 et des 0 sur chaque ligne). Les $s(i)$ sont donc deux à deux distincts et s est une permutation de $[|1, n|]$. Les colonnes de P forment donc une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. On a aussi $P \in \mathcal{X}_n$.
- Supposons réciproquement que $M \in O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{X}_n$. Chaque colonne de P est normée et composée de 0 et de 1. Il faut donc qu'il y a ait un unique 1 sur chaque colonne (et des zéros ailleurs). De plus, $M^T \in O_n(\mathbb{R})$ et on a la même propriété sur les lignes. Ainsi, $M \in \mathcal{P}_n$.

On a en fait montré que $\mathcal{P}_n$ est composé des matrices de permutation. Son cardinal est égal à $n!$.

B. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

3.B.1 La j colonne de P_σ est $e_{\sigma(j)}$. u_σ est donc caractérisé par

$$\forall j \in [|1, n|],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

On en déduit, pour

•

sigma,$\sigma' \in S_n$, que

$$\forall j,\ u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma\circ\sigma'(j)}$$

Un endomorphisme étant caractérisé par son action sur une base, on trouve que $u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma\circ\sigma'}$ ce qui donne matriciellement

$$P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$$

$k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$ ne peut être injective puisque son ensemble de départ est infini alors que son ensemble d'arrivée est fini. Il existe donc $i < j$ tel que $\sigma^i = \sigma^j$ c'est à dire (en composant $i$fois par l'inverse de σ) que $\text{Id}_{\{1,\dots,n\}} = \sigma^{j-i}$. Comme $j - i > 0$, on a montré que

$$\exists\, N \geq 1 /\ \sigma^N = \text{Id}_{\{1,\dots,n\}}$$

3.B.2 Soit $M \in \mathcal{P}_n$. On a vu en **3.1.3** qu'il existe $s \in S_n$ telle que $M = P_s$. Comme il existe $N \geq 1$ tel que $s^N = \text{Id}$, on trouve

$$M^N = P_{s^N} = P_{\text{Id}} = I_n$$

et $X^N - 1$ annule M. Ce polynôme étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (les racines N-ièmes de l'unité), M est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$).

3.B.3 Il y a autant d'éléments dans $\mathcal{P}_n$ que dans S_n, c'est à dire $n!$. On a

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Les vecteurs propres communs à ces deux matrices sont ceux de de la seconde (tout vecteur non nul est propre pour I_2) et ce sont les multiples non nuls de $(1,1)$ et $(1,-1)$.
Passons au cas $n=3$. On a cette fois

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Les sous-espaces propres de la seconde matrice sont $A = \text{Vect}((1,1,1),(0,0,1))$ et $B = \text{Vect}((1,-1,0))$.
Les sous-espaces propres de la troisième matrice sont $C = \text{Vect}((1,1,1),(0,1,0))$ et $D = \text{Vect}((1,0,-1))$.
Un vecteur propre commun à toutes les matrices est donc dans $A \cap C$ ou $A \cap D$ ou $B \cap C$ ou $B \cap D$. Deux de ces espaces sont égaux à $\{0\}$ et deux autres égaux à $\text{Vect}(1,1,1)$. Un vecteur propre commun à tous les éléments de $\mathcal{P}_3$ est donc un multiple non nul de $(1,1,1)$.
Réciproquement, $(1,1,1)$ est propre pour chaque élément de $\mathcal{P}_3$ et il en est donc de même pour tous ses multiples non nuls.

3.B.4 (a) Soit $\sigma \in S_n$. On a immédiatement

$$u_\sigma(\{0\}) = \{0\} \quad \text{et} \quad u_\sigma(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$$

De plus $u_\sigma(e_1 + \cdots + e_n) = e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(n)} = e_1 + \cdots + e_n$ et donc

$$u_\sigma(\text{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)) \subset \text{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)$$

Soit $x \in H = D^\perp$. Pour tout $y \in D$, on a $u_\sigma(y) = y$ (on vient de le voir) et donc (comme u_σ est une isométrie vectorielle puisqu'elle transforme une b.o.n. en b.o.n.)

$$(u_\sigma(x)|y) = (u_\sigma(x)|u_\sigma(y)) = (x|y) = 0$$

Ceci montre que $u_\sigma(x) \in D^\perp = H$ et on a donc

$$u_\sigma(H) \subset H$$

(b) Comme V est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ non contenu dans D, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_n$ non tous égaux tels que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$.
Les x_i n'étant pas tous égaux, il existe $i < j$ tels que $x_i \neq x_j$. Soit s l'application qui échange i et j et laisse les autres éléments invariants. Comme $s \in S_n$, on a $u_s(x) \in V$ et donc $x - u_s(x) \in V$. Ceci donne $(x_i - x_j)(e_i - e_j) \in V$ et comme $x_i \neq x_j$, $e_i - e_j \in V$.
Soit alors $k \notin \{i,j\}$. Utilisons l'application σ qui permute i et k et laisse les autre éléments invariants (et donc en particulier j). On a $u_\sigma(e_i - e_j) = e_k - e_j \in V$. On a donc montré que

$$\exists\, j \in [|1,n|] /\ \forall k \neq j,\ e_k - e_j \in V$$

(c) La famille $(e_k - e_j)_{k \neq j}$ est libre, et composée de $n-1$ éléments tous dans H (orthogonaux à $e_1 + \cdots + e_n$). Comme $\dim(H) = n-1$, cette famille est une base de H. On a donc $H \subset V$. Or, H est un hyperplan et les seuls sous-espaces qui contiennent H sont donc H et $\mathbb{R}^n$.
On vient de voir qu'un sous-espace qui est laissé stable par tous les u_σ est soit inclus dans D et donc égal à $\{0\}$ ou D, soit égal à H ou $\mathbb{R}^n$. C'est la réciproque voulue.

C. Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

Avec l'hypothèse faite, les matrices M^k ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs. Or $\mathbb{N}$ est infini. Comme en **3.B.1**, on va donc avoir deux puissances égales et trouver $N \geq 1$ tel que $M^N = 1$. On a alors $M{-1} = M^{N-1}$ qui est à coefficients dans $\mathbb{N}$ (comme toutes les M^k pour $k \in \mathbb{N}$ et par récurrence).
Notons $M^{-1} = (n_{i,j})$ et $M = (m_{i,j})$. Comme $MM^{-1} = I_n$, on a

$$\forall i, j, \ \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j} = \delta_{i,j}$$

Les quantités $m_{i,k}n_{k,j}$ étant entières naturelles, la somme ne peut valoir 0 que si toutes les quantités sont nulles et ne peut valoir 1 que si elle sont toutes nulles sauf une qui vaut 1.
Pour chaque i, on trouve donc $s(i)$ tel que $m_{i,s(i)} = n_{s(i),i} = 1$. On a alors, en utilisant $(MN)_{j,s(i)} = 0$ pour $j \neq s(i)$:

$$\forall i, \ \forall j \neq s(i), \ \forall k \in [|1, n|], \ m_{j,k} n_{k,s(i)} = 0$$

et donc, en particulier $k = i$, $m_{j,i} = 0$. Sur la colonne i, tous les termes sont nuls sauf celui en position $s(i)$ qui vaut 1. Comme M est inversible, les $s(i)$ sont ainsi seux à deux distincts (sinon deux colonnes sont égales) et $s \in S_n$ et $M = P_s$.
Réciproquement, les P_σ sont à coefficients entiers naturels et les coefficients de toutes les puissances de P_σ valent 0 ou 1 et sont donc dans un ensemble fini.

4 Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

A. Génération par une colonne aléatoire

4.A.1 La probabilité que les X_i soient égales est

$$\mathbb{P}((X_1 = 0 \cap \cdots \cap X_n = 0) \cup (X_1 = 1 \cap \cdots \cap X_n = 1))$$

Par incompatibilité des événements de la réunion et indépendance des X_i, cette probabilité vaut

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) + \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n + (1-p)^n$$

4.A.2 Le cours indique que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p, c'est à dire que

$$\forall k \in [|0, n|], \ \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Justifions ce résultat. Les X_i étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, $X_1 + \cdots + X_n$ est à valeurs dans $[|0, n|]$. De plus

$$(X_1 + \cdots + X_n = k) = \bigcup_{j_1 + \cdots + j_n = k} \mathbb{P}(X_1 = j_1 \cap \cdots \cap X_n = j_n)$$

Comme en question précédente (incompatibilité puis indépendance)

$$(X_1 + \cdots + X_n = k) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = k} \mathbb{P}(X_1 = j_1) \ldots \mathbb{P}(X_n = j_n) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puisque k des valeurs j_i valent 1 et $n - k$ valent 0. Il y a autant de termes dans la somme que de façon de répartir les 1, c'est à dire $\binom{n}{k}$. Ceci donne la formule annoncée.

4.A.3 $X_{i,j}$ est une variable de Bernoulli (prend la valeur 0 ou 1) de paramètre $\mathbb{P}(X_i X_j) = 1$. Deux cas sont possibles

$$\forall i \neq j,\ \mathbb{P}(X_i X_j = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1) = p^2$$

$$\forall i,\ \mathbb{P}(X_i X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = p$$

4.A.4 (a) On a

$$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega)_{i,j} = X_i(\omega)X_j(\omega) \in \{0, 1\}$$

Ainsi, M est à valeurs dans $\mathcal{X}_x$.

(b) On a de façon immédiate

$$\forall A \in \mathcal{X}_n,\ \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \in \{0, \dots, n\}$$

puisque l'on somme des 0 ou 1.
$M(\omega)$ étant un produit de matrice de rang 1, son rang est inférieur à 1 (toutes ses colonnes sont des multiples de $U(\omega)$). Distinguons deux cas.

- Si $U(\omega) = 0$ alors $M(\omega) = 0$ est diagonale (et donc diagonalisable).
- Sinon, il existe i tel que $X_i(\omega) = 1$ et $M(\Omega)_{i,i} = 1$. $M(\omega)$ est ainsi de rang 1 (non nulle et de rang ≤ 1). 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$. On vérifie que $U(\omega)$ est vecteur propre associé à $\mathrm{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 > 0$. On a donc un second sous-espace propre de dimension au moins 1. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on a finalement deux sous-espaces propres : celui associé à 0 de dimension $n-1$ et celui associé à $\mathrm{Tr}(M(\omega)) > 0$ de dimension 1. $M(\omega)$ est donc diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(0, \dots, 0, \mathrm{Tr}(M(\omega)))$.

(c) On a

$$M(\omega)^2 = (U(\omega)U(\omega)^T)(U(\omega)U(\omega)^T) = U(\omega)(U(\omega)^T U(\omega))U(\omega)^T$$

Le produit intermédiaire est un scalaire égal à $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2$ et donc

$$M(\omega)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2\right) M(\omega)$$

- Si $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale, c'est une matrice de projecteur et donc égale à son carré. Ainsi, $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 \in \{0, 1\}$ (1 si $M(\omega) \neq 0$ et 0 si $M(\omega) = 0$ auquel cas les $X_i(\omega)$ sont tous nuls). Dans le premier cas, les $X_i(\omega)$ valent tous 0 sauf l'un qui vaut 1 et donc $S(\omega) = 1$. Dans le second il sont tous nuls et $S(\omega) = 0$.
- Réciproquement, si $S(\omega) = 0$ alors les $X_i(\omega)$ sont tous nuls et donc $M(\omega) = 0$ qui est la matrice de projection orthogonale sur $\{0\}$.
  Si $S(\omega) = 1$ alors les $X_i(\omega)$ valent tous 0 sauf l'un qui vaut 1 et alors $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = 1$ ce qui indique que $M(\omega)$ est une matrice de projection. L'image de $M(\omega)$ est égale à $\mathrm{Vect}(U(\omega))$ (vu plus haut) qui est de dimension 1 (car $U(\omega) \neq 0$). Si $(V|U(\omega)) = 0$ alors $U(\omega)^T V = 0$ et $M(\omega)V = 0$. Le noyau de $M(\omega)$ contient donc $\mathrm{Vect}(U(\omega))^\perp$ et il y a égalité par dimension (théorème du rang). $M(\omega)$ est la matrice d'une projection orthogonale.

4.A.5 On a $\mathrm{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = S(\omega)$ (car $X_i = X_i^2$). $\mathrm{Tr}(M)$ suit donc une loi binomiale de paramètres n et p et

$$\mathbb{E}(\mathrm{Tr}(M)) = np,\ \mathbb{V}(\mathrm{Tr}(M)) = np(1-p)$$

Le rang de $M(\omega)$ valant 0 ou 1, $\text{rg}(M)$ est une variable de Bernoulli de paramètre

$$1 - \mathbb{P}(\text{rg}(M) = 0) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 0\right) = 1 - (1-p)^n$$

et on a donc

$$\mathbb{E}(\text{rg}(M)) = 1 - (1-p)^n, \ \mathbb{V}(\text{rg}(M)) = (1 - (1-p)^n)(1-p)^n$$

4.A.6 On a vu plus haut que $M^2 = SM$. Une récurrence immédiate donne

$$\forall k \geq 1, \ M^k = S^{k-1}M$$

et on a bien sûr $M^0 = I_n$.
La suite $(M(\omega)^k)$ convergera ssi $M(\omega) = 0$ ou $S(\omega) \in]-1,1]$, c'est à dire en fait ssi $M(\omega) = 0$ ou $S(\omega) \in \{0,1\}$ ce qui équivaut à $S(\omega) \in \{0,1\}$. La probabilité de convergence est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((\text{Tr}(M) = 0) \ \cup \ (\text{Tr}(M) = 1)) &= \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 0) + \mathbb{P}(\text{Tr}(M) = 1) \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \\ &= (1-p)^{n-1}(1-p+np) \end{aligned}$$

S'il y a convergence alors la limite est $M(\omega)$ si $S(\omega) = 1$ et 0 si $S(\omega) = 0$. Dans tous les cas, la limite est $M(\omega)$ (nulle dans le second cas) et comme $S(\omega) \in \{0,1\}$, c'est une matrice de projection orthogonale.

4.A.7 On a vu plus haut que $M(\omega)$ possédait deux valeurs propres distinctes si et seulement si $U(\omega) \neq 0$, c'est à dire ssi $S(\omega) \neq 0$. La probabilité que M possède deux valeurs propres distinctes est donc

$$\mathbb{P}(S \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - (1-p)^n$$

B. Génération par remplissage aléatoire

4.B.1 (a)
```
def Somme(M):
    n=len(M)
    s=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            s=s+M[i,j]
    return(s)
```

(b)
```
def Bernoulli(p):
    if random()<=p:
        return(1)
    else:
        return(0)
```

(c)
```
def Modifie(M,p):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]==0:
                M[i,j]=Bernoulli(p)
```

(d) On commence par écrire une fonction `EstRemplie` qui prend en argument une matrice carrée et renvoie `True` si et seulement si ses coefficients sont tous non nuls. On se permet une interruption prématurée de boucle `for` par utilisation d'un `return` dans la boucle pour plus de lisibilité (une boucle conditionnelle est en fait plus naturelle).

```
def EstRemplie(M):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]==0:
                return(False)
    return(True)
```

On gère alors un compteur et on itère en l'incrémentant tant que les modifications n'amènent pas la matrice avec que des 1.

```
def simulation(n,p):
    M=zeros((n,n))
    k=0
    while not(EstRemplie(M)):
        Modifie(M,p)
        k=k+1
    return(k)
```

4.B.2 N_1 est la somme des coefficients de M_1. C'est donc une somme de $m = n^2$ variables qui suivent des lois de Bernoulli de même paramètre p et qui sont indépendantes. Ainsi

$$N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$$

Si $(N_1 = i)$ avec $i \in [|0, m|]$, on effectue $m - i$ nouvelles expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p et pour $\mathbb{P}_{(N_1=i)}$, N_2 suit une loi $\mathcal{B}(m - i, p)$.
La loi de N_2 conditionnée par $(N_1 = i)$ dépend donc de i et les variables N_1 et N_2 ne sont pas indépendantes.

4.B.3 i et j étant fixés, on effectue une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p et $T_{i,j}$ est le rang du premier succès. On sait alors que

$$T_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

c'est à dire que $T_{i,j}$ sui une loi géométrique de paramètre p.

4.B.4 On a ainsi

$$\mathbb{P}(T_{i,j} \geq k) = \sum_{l=k}^{\infty} \mathbb{P}(T_{i,j} = l) = \sum_{l=k}^{\infty} p(1-p)^{l-1} = (1-p)^{k-1}$$

On peut obtenir le résultat en constatant que $(T_{i,j} \geq k)$ correspond à $k - 1$ échecs consécutifs.

4.B.5 S_r est le nombre de coefficients valant 1 après r étapes. $(S_r = l)$ signifie que $(T_{i,j} < r + 1)$ pour exactement l couples (i, j) et $(T_{i,j} \geq r + 1)$ pour les $m - l$ autres. Il y a $\binom{m}{l}$ façons de choisir l couples. Par indépendance des $T_{i,j}$ (et incompatibilité des situations pour deux choix différents des couples) et commes ces $T_{i,j}$ suivent tous la même loi (celle de $T_{1,1}$) on a donc

$$\mathbb{P}(S_r = l) = \binom{m}{l} \mathbb{P}(T_{1,1} < r + 1)^l \mathbb{P}(T_{1,1} \geq r + 1)^{m-l} = \binom{m}{l} (1 - (1-p)^r)^l (1-p)^{r(m-l)}$$

4.B.6 (a) On effectue un grand nombre de simulations et on calcule la moyenne des résultats obtenus. Avec 1000 simulation, cela donne la fonction suivante.

```
def esperance(n,p):
    s=0
    for i in range(1000):
        s=s+simulation(n,p)
    return(s/1000)
```

(b) On a

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N \geq k)$$

L'événement $(N \geq k)$ signifie qu'au bout de $k-1$ étapes, tout n'était pas rempli et équivaut à $(S_{k-1} < m)$. Sa probabilité est $1 - \mathbb{P}(S_k = m)$ et avec la question précédente,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (1 - q^k)^m)$$

I Généralités

IA - ***Propriétés élémentaires***

I.A.1) L'application φ de $\mathcal{X}_n$ dans $\{0,1\}^{n^2}$ qui envoie $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{X}_n$ sur $\varphi(A)=(a_{1,1},\dots,a_{1,n},a_{2,1},\dots,a_{n,n})$ est une bijection et donc comme $\{0,1\}^{n^2}$ est un ensemble fini de cardinal 2^{n^2}, $\mathcal{X}_n$ est une ensemble fini de cardinal 2^{n^2}.

I.A.2) Si $M=(m_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{X}_n$ alors on a

$$|\det(M)| = |\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}| \leqslant \sum_{\sigma\in S_n}|\varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}|$$

Or, $|\varepsilon(\sigma)m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}| = |m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}|\leqslant 1$ donc $|\det(M)|\leqslant\sum_{\sigma\in S_n}1=n!$.
S'il y a égalité alors nécessairement $m_{\sigma(1),1}\dots m_{\sigma(n),n}=1$ pour tout $\sigma\in S_n$ ce qui implique que $m_{i,j}=1$ pour tout indice $i,j\in\{1,\dots,n\}$ mais dans ce cas M est la matrice constituée uniquement de 1, et son déterminant est donc $0\neq n!$, il n'y a donc pas égalité.

I.A.3) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{Y}_n$. Pour tout $t\in[0,1]$, pour tout indice $i,j\in\{1,\dots,n\}$,

$$0\leqslant[(1-t)A+tB]_{i,j}=(1-t)A_{i,j}+tB_{i,j}\leqslant(1-t)+t=1$$

car $0\leqslant A_{i,j},B_{i,j}\leqslant 1$ et donc $(1-t)A+tB\in\mathcal{Y}_n$, ce qui prouve que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe.
On sait que $\|M\|_\infty=\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|M_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par définition $\mathcal{Y}_n$ est inclus dans la boule de centre la matrice nulle et de rayon 1 donc $\mathcal{Y}_n$ est une partie bornée.
Si (M_k) est une suite d'éléments de $\mathcal{Y}_n$ qui converge vers M alors

- pour tout indice $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $(M_k)_{i,j}\in[0,1]$ et $(M_k)_{i,j}$ tend vers $M_{i,j}$ donc $M_{i,j}\in[0,1]$
- on en déduit que $M\in\mathcal{Y}_n$ et le caractérisation séquentielle des fermés prouve alors que $\mathcal{Y}_n$ est une partie fermée.

Par conséquent $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A.4) Soit $M\in\mathcal{Y}_n$ et λ une valeur propre complexe de M. Il existe $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre de M pour λ. Notons i_0 un indice tel que $|x_{i_0}|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, comme $X\neq 0$ (c'est un vecteur propre !) on sait que $x_{i_0}\neq 0$ et

- $MX=\lambda X$ par définition de X.
- En identifiant le coefficient de la ligne i_0, on obtient $\sum_{j=1}^n m_{i_0,j}x_j=\lambda x_{i_0}$ donc $|\lambda x_{i_0}|\leqslant\sum_{j=1}^n|m_{i_0,j}x_j|\leqslant\sum_{j=1}^n|1\times x_{i_0}|=n|x_{i_0}|$ et ainsi $|\lambda|\leqslant n$.

En notant M la matrice qui ne contient que des 1, on peut observer que n est une valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

IB - ***Étude de*** $\mathcal{X}'_n=\mathcal{X}_n\cap GL_n(\mathbb{R})$

I.A.1) On a directement

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_2=\ &\Big\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\\ &\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\Big\}\end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{X}'_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

et l'on obtient facilement,

Matrice	Diagonalisabilité	Matrice	Diagonalisabilité
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	diagonalisable car symétrique réelle	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	diagonale !
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	diagonalisable car symétrique réelle	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	non diagonalisable car 1 vp de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique et E_1 de dim 1
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	diagonalisable car symétrique réelle	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	non diagonalisable car 1 vp de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique et E_1 de dim 1

I.A.2) Si on appelle E'_2 le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{X}'_2$ alors

- $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E'_2$ et $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E'_2$
- $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + E_{2,1} + E_{1,2} \in E'_2$ et $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + E_{2,1} + E_{1,2} \in E'_2$

donc E'_2 contient les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $E'_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ainsi $\mathcal{X}'_2$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Dans le cas général, pour $n \geqslant 3$, notons $E'_n = \mathrm{Vect}(\mathcal{X}'_n)$

- Pour $i \neq j$, $I_n \in \mathcal{X}'_n, I_n + E_{i,j} \in \mathcal{X}'_n$ donc $E_{i,j} = I_n + E_{i,j} - I_n \in E'_n$
- La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{X}_n$ et son déterminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

donc $M \in E'_n$ et donc $E_{1,1} = M - E_{1,2} - \ldots - E_{1n} - E_{2,1} - \ldots - E_{n,1} \in E'_n$

- de même $E_{2,2}, \ldots, E_{n,n} \in E'_n$ et finalement tous les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dans E'_n donc $E'_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{X}'_n$ engendre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II Deux problème d'optimisation

IIA - ***Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$***

II.A.1) L'application ϕ définie par $(M, N) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tMN)$ est une application bilinéaire (par linéarité de la trace et de la transposition) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$(M|N) = \mathrm{tr}({}^tMN) = \mathrm{tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{tr}({}^tNM) = (N|M)$$

ce qui que ϕ est symétrique. Si $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$(M|N) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tMM)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2 \geqslant 0$$

et il y a égalité si et seulement si $m_{j,i} = 0$ pour tous les indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. par conséquent, ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A.2) On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{Y}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & N & \longmapsto & \|A-N\| \end{array}$$

vérifie d'après la double inégalité triangulaire, pour tout $N, N' \in \mathcal{Y}_n$,

$$|\varphi(N)-\varphi(N')| = |\|A-N\|-\|A-N'\|| \leqslant \|A-N-(A-N')\| = \|N-N'\|$$

ainsi φ est 1-lipschitzienne donc continue sur le fermé borné $\mathcal{Y}_n$, on sait alors que φ atteint son minimum et si on note $M \in \mathcal{Y}_n$ tel que $\varphi(M) = \min(\varphi)$ alors

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n, \|A-M\| \leqslant \|A-N\|$$

II.A.3) Supposons par l'absurde que les matrices M et M' conviennent avec $M \neq M'$.

- Comme $M' \in \mathcal{Y}_n$, $\|A-M\| \leqslant \|A-M'\|$ et comme $M \in \mathcal{Y}_n$, $\|A-M'\| \leqslant \|A-M\|$ donc $\|A-M'\| = \|A-M\|$
- Par convexité de $\mathcal{Y}_n$, la matrice $\frac{M+M'}{2} \in \mathcal{Y}_n$ et d'après l'égalité de la médiane

$$\begin{aligned} \left\|A-\tfrac{M+M'}{2}\right\|^2 &= \left\|\tfrac{1}{2}(A-M)+\tfrac{1}{2}(A-M')\right\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\|A-M\|^2+\tfrac{1}{2}\|A-M'\|^2-\|M-M'\|^2 \\ &= \|A-M\|^2-\|M-M'\|^2 \\ &< \|A-M\|^2 \end{aligned}$$

ce qui est absurde car $\|A-M\| \leqslant \|A-\frac{M+M'}{2}\|$. Ainsi l'unicité de la matrice M est démontrée.

Il reste à expliciter la matrice M. On commence par l'observation suivante, si $P(x) = (a-x)^2+b$ alors le minimum de $P(x)$ lorsque $x \in [0,1]$ est atteint pour $x = 0$ si $a < 0$, $x = a$ si $a \in]0,1[$ et $x = 1$ si $a > 1$ (cela se voit en faisant trois études de fonction). Pour $N \in \mathcal{Y}_n$, $\|A-N\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{i,j}-n_{i,j})^2$, donc si on note

$$m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} < 0 \\ a_{i,j} & \text{si } 0 < a_{i,j} < 1 \\ 1 & \text{si } a_{i,j} > 1 \end{cases}$$

alors en effectuant le remplacement successivement de $n_{1,1}$ puis de $n_{1,2}$, jusquà $n_{n,n}$ suivant ce principe, on obtient l'inégalité $\|A-M\|^2 \leqslant \|A-N\|^2$ et donc M est bien la matrice cherchée.

IIB - ***Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$***

II.B.1) L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{Y}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & N & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

est continue car polynômiale et donc comme $\mathcal{Y}_n$ est une partie fermée et bornée, $\varphi(\mathcal{Y}_n)$ possède un maximum. Comme l'ensemble $\mathcal{X}_n$ est fini, il est immédiat que la fonction déterminant possède un maximum sur cet ensemble.

II.B.2) Notons $Y_n \in \mathcal{Y}_n$ telle que $y_n = \det(Y_n)$. On a dans ce cas

- $Y'_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_{n+1}$
- $\det(Y'_{n+1}) = \det(Y_n) = y_n \leqslant y_{n+1}$ ce qui prouve que la suite $(y_k)_{k\geqslant 2}$ est croissante.

II.B.3) En reprenant les notations de l'énoncé, mais en notant J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient que des 1

$$\det(J_n-I_n) = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & (1) & \\ & (1) & \ddots & \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & & & \\ \vdots & \ddots & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ n-1 & & & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & (1) & \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Posons $P_n = J_n - I_n$, de sorte que $P_n \in \mathcal{Y}_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(M_{2p+1}) = 2p \leqslant y_{2p+1}$ donc $\lim_{p\to+\infty} y_{2p+1} = +\infty$, comme la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante elle possède une limite, nécessairement la même que celle de la suite extraite $(y_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ ce qui permet de conclure.

II.B.4) Soient $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$. Fixons $1 \leqslant i,j \leqslant n$ et supposons que $n_{i,j} \in]0,1[$. Si nous développons le déterminant de N suivant la ligne i alors $\det(N) = (-1)^{i+j} n_{i,j} + \sum_{k\neq j} (-1)^{i+k} a_{i,k} \Delta_{i,k}$ où $\Delta_{r,s}$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de N en enlevant la ligne r et la colonne s. Le déterminant de N s'écrit donc $an_{i,j} + b$ avec a et b deux constantes. Si $a \geqslant 0$ alors en remplaçant $n_{i,j}$ par 1, on obtient un déterminant plus grand car $an_{i,j} + b \leqslant a + b$ et si $a < 0$ alors en remplaçant $n_{i,j}$ par 0, on obtient un déterminant plus grand car $an_{i,j} + b \leqslant b$. Procédons ainsi, à partir de la matrice M, successivement, pour les coefficients $m_{1,}, \ldots m_{1,n}, \ldots, m_{n,n}$ et notons M' la matrice obtenue. Il est clair que $M' \in \mathcal{X}_n$ et par construction $\det(M) = y_n \leq \det(M') \leqslant x_n$. Or, si $N \in \mathcal{X}_n$ vérifie $\det(N) = x_n$, comme $N \in \mathcal{Y}_n$ on a $\det(N) = x_n \leqslant y_n$ et finalement $x_n = y_n$.

III Matrices de permutations

IIIA - ***Description de*** $\mathcal{P}_n$

III.A.1) Nous allons établir l'équivalence entre les deux définitions suivantes d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.

i) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

ii) La matrice de f dans la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ (notée $\mathcal{B}$) est orthogonale i.e. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$

On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et on pose $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. L'implication $i \Longrightarrow ii$ résulte du fait que si x et y sont représentés dans $\mathcal{B}$ par les matrices colonnes X et Y alors l'égalité $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ s'écrit matriciellement ${}^tX{}^tAAY = {}^tXY$, lorsque $x = e_i$ et $y = e_j$ cette égalité devient $({}^tAA)_{i,j} = \delta_{i,j}$ et donc ${}^tAA = I_n$ de sorte que $A \in O_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors avec les mêmes notations $(f(x)|f(y)) = {}^tX{}^tAAY = {}^tXY = (x|y)$ et donc $i)$ est vérifié.

III.A.2) Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tMM = I_n$ donc $1 = \det(I_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM)\det(M) = \det(M)^2$ ce qui impose que $\det(M) = \pm 1$. La réciproque est fausse, par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1 mais ${}^tMM \neq I_2$.

III.A.3) Soit $P \in \mathcal{P}_n$. La matrice $P \in \mathcal{X}_n$ et $[{}^tPP]_{i,j} = \sum_{k=1}^n P_{k,i}P_{k,j}$, or pour chaque indice k, il n'y a qu'un seul terme non nul sur la ligne k donc si $i \neq j$ alors pour tous les indices k, $P_{k,i}P_{k,j} = 0$ et donc $\sum_{k=1}^n P_{k,i}P_{k,j} = 0$. Lorsque $i = j$, l colonne j comporte un seul terme non nul qui vaut 1 donc $[{}^tPP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n P_{k,i}^2 = 1$ et par suite ${}^tPP = I_n$. La matrice $P \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $P \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tPP = I_n$ et les coefficients de P sont égaux à 0 ou à 1.

- Pour chaque indice i, $[{}^tPP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n P_{k,i}^2 = 1$ donc un seul des termes vaut 1 et les autres sont nuls, la colonne i contient un seul terme non nul qui vaut 1.
- On a également $P{}^tP = I_n$ et donc pour chaque indice i, $[P{}^tP]_{i,i} = \sum_{k=1}^n P_{i,k}^2 = 1$ donc un seul des termes vaut 1 et les autres sont nuls, la ligne i contient un seul terme non nul qui vaut 1. Ainsi $P \in \mathcal{P}_n$.

Par double inclusion, $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$.
Nous allons pour déterminer le cardinal de $\mathcal{P}_n$ montrer que $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma / \sigma \in S_n\}$. Si $\sigma \in S_n$ alors $P_\sigma \in \mathcal{X}_n$ et

$$({}^tP_\sigma P_\sigma)_{i,j} = \sum_{k=1}^n P_{\sigma\,k,j} P_{\sigma\,k,i} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)}\delta_{k,\sigma(j)} = \delta_{i,j}$$

donc ${}^tP_\sigma P_\sigma = I_n$ et $P_\sigma \in \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_n$.
Si $P \in \mathcal{P}_n$ alors notons $\varphi(j)$ l'indice de l'unique terme non nul (donc égal à 1) de P dans la colonne j. La fonction φ est injective car si $j \neq j'$ alors la ligne $\varphi(j)$ contient un seul terme non nul (celui de la colonne j) et donc $\varphi(j') \neq \varphi(j)$.
La fonction φ est une injection de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ donc une bijection, ainsi $\varphi \in S_n$ et $P = P_\varphi$ ce qui termine la preuve de l'égalité $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma / \sigma \in S_n\}$.
L'application $\sigma \longmapsto P_\sigma$ est une bijection de S_n dans $\mathcal{P}_n$ donc$\mathcal{P}_n$ a le même cardinal que S_n c'est à dire $n!$.

IIIB - ***Quelques propriétés des éléments de*** $\mathcal{P}_n$

III.B.1) Soient σ et σ' deux éléments de S_n. Pour $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

$$[P_\sigma P_{\sigma'}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{i,k}[P_{\sigma'}]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma\circ\sigma'(j)} = [P_{\sigma\circ\sigma'}]_{i,j}$$

donc $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$. Comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini et comme S_n est un ensemble fini l'application $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{Z} \to S_n \\ k \longmapsto \sigma^k \end{array}\right.$ n'est pas injective. Il existe donc deux entiers $n_1 < n_2$ qui ont la même image i.e. tels que $\sigma^{n_1} = \sigma^{n_2}$ donc $\sigma^N = id_{\{1,\dots,n\}}$ avec $N = n_2 - n_1$.

III.B.2) Soit σ un élément de S_n. Il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^N = id_{\{1,\dots,n\}}$ et donc $P_\sigma^N = P_{\sigma^N} = I_n$, le polynôme $X^N - 1 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_N} = (X-\omega)$ est un polynôme annulateur, scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc P_σ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, comme $\mathcal{P}_n = \{P_\sigma / \sigma \in S_n\}$ on en déduit que tous les éléments de $\mathcal{P}_n$ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

III.B.3) Les élements de $\mathcal{P}_2$ sont $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un calcul donne $\chi_A(X) = X^2 - 1$, et $E_1(A) = \mathbb{R}(1,1)$, $E_{-1}(A) = \mathbb{R}(1,-1)$ sont stables [1] par A et I_2.

Les éléments de $\mathcal{P}_3$ sont I_3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les vecteurs propres communs à toutes ces matrices revient à déterminer les sous-espaces stables de dimensions 1. Le polynôme caractéristique de E est $X^3 - 1$, ces sev propres sont $\mathbb{R}(1,1,1)$, $\mathbb{R}(1,j,j^2)$ et $\mathbb{R}(1,j^2,j)$. Le sous-espace $\mathbb{R}(1,1,1)$ est stable par toutes les autres matrices, $\mathbb{R}(1,j,j^2)$ n'est pas stable par A et $\mathbb{R}(1,j^2,j)$ non plus.

III.B.4) On doit démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$ sont $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et l'hyperplan H orhogonal à D.

a) Les sous-espaces $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$ sont clairement stables par tous les u_σ. On a directement pour tout $\sigma \in S_n$,

$$u_\sigma(e_1 + e_2 + \dots + e_n) = e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)} + \dots + e_{\sigma(n)} = e_1 + e_2 + \dots + e_n$$

donc D est une droite stable par tous les u_σ, et comme les u_σ sont des automorphismes orthogonaux (car$P_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$), $D^\perp$ est un sous-espace stable par tous les u_σ.

b) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, non contenu dans D et stable par tous les u_σ. Notons $v = (v_1,\dots,v_n)$ un vecteur de V qui n'appartient pas à D. Il existe donc deux indices $i < j$ tel que $v_i \neq v_j$. Notons $\tau_{i,j}$ la transposition d'indice i,j,

- $u_{\tau_{i,j}}(v) = (v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n) \in V$ car V est stable par l'endomorphisme $u_{\tau_{i,j}}$.
- $v - u_{\tau_{i,j}}(v) = (v_i - v_j)(e_i - e_j)$ appartient donc à V et $v \neq v_j$ donc $e_i - e_j \in V$

Puis pour $k \in \{1,\dots,n\}$ avec $k \neq j$, $u_{\tau_{k,i}}(e_i - e_j) = e_k - e_j \in V$ car V est stable par l'endomorphisme $u_{\tau_{k,i}}$. ainsi les $n-1$ vecteurs $e_k - e_j$ ($k \in \{1,\dots,n\}$, $k \neq j$) appartiennent à V.

c) Ainsi $H = \mathrm{Vect}(e_1 - e_j,\dots,e_{j-1} - e_j, e_{j+1} - e_j,\dots,e_n - e_j) \subset V$, or H est de dimension $n-1$, donc $H = V$ ou $V = \mathbb{R}^n$. Les $e_k - e_j$ sont orthogonaux à $e_1 + \dots + e_n$ donc $H = D^\perp$. Par conséquent

- $\{0\}$ et D sont stables par tous les u_σ
- si V est stable non contenu dans D alors $V = D^\perp$ ou $D = \mathbb{R}^n$

de sorte que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ, $\sigma \in S_n$ sont $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\mathbb{R}^n$, la droite D engendrée par $e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et l'hyperplan H orhogonal à D.

III.B.5) **Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$** Comme l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini, l'ensemble des valeurs prisent par M^k lorsque $k \in \mathbb{N}$ est fini. Il existe donc $k_1 < k_2$ tels que $M^{k_1} = M^{k_2}$, comme M est inversible on en déduit que $M^K = I_n$ avec $K = k_2 - k_1$, et donc $M^{-1} = M^{K-1}$ est à coefficients entiers naturels.

- $[M^{-1}M]_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} [M^{-1}]_{i,k}[M]_{k,i} = 1$, $[M^{-1}]_{i,k}$ et $[M]_{k,i}$ sont des entiers naturels, il existe donc un unique indice k tel que $[M^{-1}]_{i,k}[M]_{k,i} = 1$ i.e. tel que $[M^{-1}]_{i,k} = [M]_{k,i} = 1$, notons k_i cet indice.

1. On a identifié $\mathbb{R}^2$ avec $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

• Pour $j \neq i$, $[M^{-1}M]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}[M^{-1}]_{i,k}[M]_{k,j} = 0$, $[M^{-1}]_{i,k}$ et $[M]_{k,j}$ sont des entiers naturels, donc d'une part $[M]_{k_i,j} = [M^{-1}]_{i,k_i}[M]_{k_i,j} = 0$ et donc la ligne k_i ne M possède qu'un unique terme non nul et d'autre part $[M^{-1}]_{i,k_j} = [M^{-1}]_{i,k_j}[M]_{k_j,j} = 0$ donc $k_j \neq k_i$.

• L'application $i \longmapsto k_i$ est injective de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même donc bijective et donc chaque ligne de M contient un et un seul terme non nul qui vaut 1.

• En raisonnant à partir de $MM^{-1} = I_n$ on obtiendrait que chaque colonne de M contient un et un seul terme non nul qui vaut 1. Par conséquent $M \in \mathcal{P}_n$ est donc une matrice permutation.

Si M est une matrice de permutation alors la suite $(M^k)_k$ est périodique, à valeurs dans $\mathcal{P}_n$ donc l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de M est fini.

IV Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

IVA - ***Génération par une colonne alétoire***

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisés $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et suivant une même loi de bernoulli de paramètre p.

IV.A.1) Directement $[X_1 = \dots = X_n] = [X_1 = 0,\dots,X_n = 0] \cup [X_1 = 1,\dots,X_n = 1]$, la réunion étant disjointe et les variables X_i étant mutuellement indépendantes,

$$\begin{aligned}
P([X_1 = \dots = X_n]) &= P([X_1 = 0,\dots,X_n = 0]) + P([X_1 = 1,\dots,X_n = 1]) \\
&= P(X_1 = 0)\dots P(X_n = 0) + P(X_1 = 1)\dots P(X_n = 1) \\
&= q^n + p^n
\end{aligned}$$

IV.A.2) Directement, en suivant la démonstration de votre cours favori $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

IV.A.3) Soient i et j dans $\{1,\dots,n\}$. Lorsque $i \neq j$, la variable aléatoire $X_{i,j}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ c'est donc une variable de Bernoulli, et $P(X_{i,j} = 1) = P(X_i = 1, X_j = 1) = p^2$ donc $X_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$, lorsque $i = j$, $X_{i,j} = X_i^2 = X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

IV.A.4) Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)^t(U(\omega))$. L'application $M : \left\{ \begin{array}{l} \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \omega \longmapsto M(\omega) \end{array} \right.$ est ainsi une variable aléatoire.

a) Si $\omega \in \Omega$, alors pour i et j dans $\{1,\dots,n\}$, $M(\omega)_{i,j} = X_i(\omega)X_j(\omega) = X_{i,j}(\omega) \in \{0,1\}$ donc $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

b) Les colonnes de $M(\omega) = (X_1(\omega)U(\omega),\dots,X_n(\omega)U(\omega))$ sont colinéaires à $U(\omega)$ donc $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$. Comme la matrice $M(\omega)$ est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable.

c) Déjà, si $\omega \in \Omega$, alors $\mathrm{tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i(\omega)^2}_{=X_i} = S(\omega) \in \{0,\dots,n\}$. Si $\omega \in \Omega$, alors $M(\omega)^2 = U(\omega)^t(U(\omega))U(\omega)^t(U(\omega))$ or, ${}^t(U(\omega))U(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i(\omega)^2} = S(\omega)$ donc $M(\omega)^2 = S(\omega)U(\omega)^t(U(\omega)) = S(\omega)M(\omega)$.

• Si $U(\omega) = 0$ alors $M(\omega) = 0$ et donc $M(\omega)$ est une projection orthogonale et $\mathrm{tr}(S(\omega) = 0$. Réciproquement si $S(\omega) = 0$ alors $X_1 = \dots = X_n = 0$ et donc $M(\omega) = 0$ est bien une projection orthogonale.

• Si $U(\omega) \neq 0$ alors $M(\omega) \neq 0$. Dans ce cas, $M(\omega)$ est un projecteur ssi $M(\omega)^2 = S(\omega)M(\omega) = M(\omega)$ ssi $S(\omega) = 1$, et comme $M(\omega)$ est une matrice symétrique, la projection est orthogonale.

Bilan, $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si $S(\omega) \in \{0,1\}$

IV.A.5) Comme $\mathrm{tr}(M) = S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ on a $E(\mathrm{tr}(M)) = np$ et $V(\mathrm{tr}(M)) = npq$. La variable aléatoire [2] $X = \mathrm{rg}(M)$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $[X = 1] = [\mathrm{tr}(S) \neq 0] = [X_1 = 0,\dots,X_n = 0]^c$ donc $P(X = 1) = 1 - q^n$ de sorte que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^n)$ et par suite $E(X) = 1 - q^n$, $V(X) = q^n(1 - q^n)$.

2. doit-on considérer comme une évidence que c'est une variable aléatoire ?

IV.A.6) Comme $M^2 = SM$, on obtient successivement $M^3 = SM^2 = \mathrm{tr}(S)^2 M$, …, $M^k S^{k-1} M$ (pour $k \geqslant 1$).
Si $M = 0$ alors la suite $(M^k)_k$ converge et si $M \neq 0$ alors suite $(M^k)_k$ converge si et seulement si la suite $(S^k)_k$ converge et comme $S \in \{0, \dots, n\}$, la suite $(S^k)_k$ converge si et seulement si $S \in \{0, 1\}$ et le cas $S = 0$ correspond au cas $M = 0$.
La suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $S \in \{0, 1\}$ et

$$P(S \in \{0,1\}) = P(S = 0) + P(S = 1) = q^n + npq^{n-1}$$

Dans ce cas M est une matrice de projecteur donc la limite de la suite $(M^k)_k$ est M qui est une matrice de projecteur.

IV.A.7) Vu ce qui précède, la matrice M possède deux valeurs propres distinctes si et seulement si $\mathrm{tr}(M) = S \neq 0$ et donc la probabilité cherchée est

$$P(S \neq 0) = 1 - P(S = 0) = 1 - q^n$$

IVB - ***Génération par remplissage aléatoire***

IV.B.1) a) Avec deux boucles imbriquées, classiquement

```
def Somme(M):
    n=len(M)
    S=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            S+=M[i,j]
    return S
```

b) Lorsque l'on effectue un tirage uniforme dans $[0, 1]$, la probabilité que ce tirage soit dans l'intervalle $[0, p]$ est p ce qui justifie l'algorithme

```
def Bernoulli(p):
    assert 0<=p<=1
    a=random.rand() #pour que cela fonction avec le module chargé
    if a<=p:
        return 1
    else:
        return 0
```

c) On parcours les éléments de M et lorsque le coefficient est nul on effectue un tirage pour savoir si la valeur du coefficient est modifiée ou pas.

```
def Modifie(M,p):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j]==0:
                M[i,j]=Bernoulli(p)
    return M
```

d) On utilise une boucle *while*, il n'y a aucune assurance de terminaison, mais la probabilité théorique que cela ne termine pas est nulle.

```python
def Simulation(n,p):
    M=zeros((n,n),dtype=int) #pour avoir des entiers
    k=0
    while Somme(M)!=n*n:
        M=Modifie(M,p)
        k+=1
    return k
```

e) La variable N_1 est le nombre de tirages favorables lorsque l'on effectue n^2 tirages de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendants donc $N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n^2, p)$.
La loi conditionnelle de N_2 sachant $N_1 = i$ (avec $i \in \{0, \ldots, n^2\}$ est la loi du nombre de tirages favorables lorsque l'on effectue $n^2 - i$ tirages de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendants et donc

$$P(N_2 = k | N_1 = i) = \binom{n^2 - i}{k} p^k q^{n^2 - i - k}$$

Puis,

$$\frac{P(N_2 = k | N_1 = i)}{P(N_1 = i)} = \frac{\binom{n^2-i}{k} p^k q^{n^2-i-k}}{\binom{n^2}{i} p^i q^{n^2-i}} = \frac{\binom{n^2-i}{k}}{\binom{n^2}{i}} p^{k-i} q^{-k}$$

Si les variables N_2 et N_1 sont indépendantes alors cette quantité ne doit dépendre que de k, or pour $k = 0$ et $i = 0$ on trouve 1 et pour $k = 0$ et $i = 1$ on trouve $\frac{1}{pn^2}$ et pour $k = 0$ et $i = 2$ on trouve $\frac{2}{n^2(n^2-1)p^2}$ et ces trois égalités ne peuvent pas avoir lieues simultanément car si $pn^2 = 1$ alors $n^2(n^2 - 1)p^2 = pn^2 - p = 1 - p = q \neq 2$. Les variables aléatoires N_1 et N_2 ne sont pas indépendantes.

f) La loi de $T_{i,j}$ est la loi du premier succés dans une succession de tirages de Bernoulli mutuellement indépendants, de paramètre p donc $T_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. En particulier, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T_{i,j} = k) = q^{k-1}p$.

g) Pour un entier $k \geqslant 1$, donner la valeur de $P(T_{i,j} \geqslant k)$. Il s'agit d'un calcul classique,

$$P(T_{i,j} \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} q^{i-1}p = q^{k-1} \sum_{i=0}^{+\infty} q^i p = q^{k-1} \frac{p}{1-q} = q^{k-1}$$

h) Soient $r \geqslant 1$ un entier. Le nombre $S_r = N_1 + \ldots + N_r$ représente le nombre de 1 dans la matrice M.
Notons I_k une partie de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k. La probabilité de l'événement

$$E_k = \bigcap_{(i,j) \in I_k} [T_{i,j} < r + 1] \cap \bigcap_{(i,j) \notin I_r} [T_{i,j} \geqslant r + 1]$$

se calcule facilement par indépendance des événements et vaut $P(T_{1,1} < r+1)^k P(T_{1,1} \geqslant r+1)^{n^2-k} = (q^r)^{n^2-k}(1-q^r)^k$.
Or $[S_r = k] = \bigcup_{\substack{I_k \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I_k| = k}} E_k$ donc

$$P(S_r = k) = \binom{n^2}{k} (q^r)^{n^2-k} (1 - q^r)^k$$

et finalement $S_r \hookrightarrow \mathcal{B}(n^2, 1 - q^r)$.

i) a) Un façon de procéder est d'effectuer un grand nombre de simulation pour calculer N et de faire la moyenne, la loi des grands nombres nous assure que l'on aura une estimation de l'espérance. Avec python et les fonctions précédentes on obtient

```
#valeur théorique 6.005 à 10-3 près
>>> L=[Simulation(5,0.5) for i in range(1000)]
>>> sum(L)/len(L)
 6.0469999999999997
>>> L=[Simulation(5,0.5) for i in range(10000)]
sum(L)/len(L)
>>> 5.9767000000000001
>>> L=[Simulation(5,0.5) for i in range(100000)]
sum(L)/len(L)
>>> 6.0066600000000001
```

b) C'est un calcul assez technique,

$$\begin{array}{lll} E(N) & = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) & \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N \geqslant k) & \text{propriété du cours} \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_{k-1} < n^2) & \text{car } [S_{k-1} < n^2] = [N \geqslant k] \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - P(S_{k-1} = n^2) & \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - (1 - q^{k-1})^m & \\ & = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} q^{(k-1)i} & \\ & = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{(k-1)i} & \text{Fubini hors programme} \\ & = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i} & \end{array}$$