Devoir surveillé de mathématiques n° 6 – Corrigé

Exercice 1 : Fonction de Bessel *(D'après CCINP PSI 2023)*

Extrait du rapport

Les copies sont assez bien présentées dans l'ensemble, mais on regrette la présence trop importante de ratures et de surcharges ou encore d'abréviations qui nuisent à la lisibilité. Il est conseillé d'utiliser systématiquement un brouillon avant de se lancer dans la rédaction. On rappelle que les abréviations n'ont pas leur place dans une copie de concours.
Notons également que l'honnêteté intellectuelle est évaluée dans les copies. En particulier dans les démonstrations où le résultat est donné dans l'énoncé, donner le résultat réellement obtenu peut permettre de gagner quelques points là où tenter le bluff pour tomber à tout prix sur le résultat de l'énoncé n'en vaudra aucun.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \cos(x\sin(t))$ est continue par morceaux sur le segment $[0,\pi]$ donc l'intégrale définissant $f(x)$ converge.
   $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

   Extrait du rapport

   La question est théoriquement simple et les réponses sont souvent compliquées. La plupart des candidats ne savent pas vraiment ce qu'ils cherchent et donnent une réponse souvent disproportionnée dans le meilleur des cas (ils montrent par exemple la continuité de f par théorème d'intégrales dépendant d'un paramètre), fausse sinon.

2. On note $g(x,t) = \cos(x\sin(t))$.
   Soit $t \in [0,\pi]$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t))$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t))$
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux donc intégrables sur $[0,\pi]$.
   Domination ; Soit $x \in \mathbb{R}, t \in [0,\pi]$. $|\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)| \leqslant 1$ et $t \mapsto 1$ est continue par morceaux donc intégrable sur $[0,\pi]$
   Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre,
   $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t)\mathrm{d}t \text{ et } f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t.}$

   Extrait du rapport

   L'existence du théorème qu'il fallait utiliser ici est souvent connue mais la mise en œuvre est plus délicate. Certains candidats n'ont pas cherché à justifier le résultat. Quelques fois, le calcul de la dérivée est faux.

3. h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par composition et produit, en particulier $\boxed{\dfrac{\partial h}{\partial t} \text{ existe}}$.

et $\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)).}$

Extrait du rapport

Les candidats manquent souvent de précaution en parlant de dérivabilité pour une fonction de deux variables. Certains calculs sont inexacts.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Par linéarité de l'intégrale,
$xf''(x)+f'(x)+xf(x) = \displaystyle\int_0^\pi (-x\sin^2(t)\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_0^\pi x(1-\sin^2(t))\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_0^\pi x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t = [h(x,t)]_{t=0}^{\pi} = h(x,\pi) - h(x,0) = 0 - 0 = 0.$
donc $\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (\mathbf{E}).}$

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (\mathbf{E})$$

5. Soit $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]-R,R[$ et on peut dériver terme à terme :
$\forall x \in]-R,R[, \ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$.
y est solution de $(\mathbf{E})$ donc
$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$
i.e. $\sum_{n=\cancel{2}\,1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$
d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 0$
puis $a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1})x^n = 0$
Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, $\boxed{a_1 = 0}$
et $\forall n \geqslant 1, (n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ d'où $\forall n \geqslant 1, a_{n+1} = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$ puis

$\boxed{\forall n \geqslant 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}.}$

Extrait du rapport

Question classique mais, malgré tout, les candidats dérapent facilement dans la réorganisation des termes de la série et les réindexations nécessaires, ce qui conduit malheureusement parfois à des coups de bluff.

6. cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

   On a donc, pour $x \in \mathbb{R}, t \in [0, \pi], \cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}$

   Soit $x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!} \mathrm{d}t$

   On pose $u_n(t) = (-1)^n \dfrac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur le segment $[0, \pi]$ par continuité de sin.

   Pour tout $t \in [0, \pi]$, $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ donc $\|u_n\|_{\infty,[0,\pi]} \leqslant \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. Or $\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (développement en série entière de $\mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$) donc $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, \pi]$.

   Par le théorème d'intégration de la somme d'une série de fonctions sur un segment,

   $$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n}(t)}{(2n)!} \mathrm{d}t$$

   $$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) \mathrm{d}t$$

   $$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} x^{2n}.}$$

   Le résultat étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

   > **Extrait du rapport**
   >
   > Le développement en série entière du cosinus est souvent bien connu mais peu précisent le rayon de convergence et l'interversion série intégrale est rarement correctement justifiée.

7. D'après les questions précédentes, f est solution de $(\mathbf{E})$ et est développable en série entière.

   $f(0) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(0) \mathrm{d}t = \pi$.

   Or si $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est une fonction vérifiant ces 3 mêmes conditions, on a $a_0 = y(0) = \pi$, ainsi que $a_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$. La suite (a_n) est alors définie de façon unique (suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec les deux premiers termes fixés), et y est donc unique, par uncitié du développement en série entière. Il existe donc au plus une fonction y vérifiant ces trois conditions.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est l'unique solution développable en série entière de } (\mathbf{E}) \text{ vérifiant } f(0) = \pi.}$

   > **Extrait du rapport**
   >
   > Peu de réponses, très peu de bonnes réponses. Les candidats invoquent par réflexe le théorème d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, ou encore l'unicité d'une série entière sans préciser dans quel contexte cette phrase a du sens.

8. D'après ce qui précède, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{W_n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ avec la suite (a_n) qui vérifie $a_0 = \pi$, et $\forall n \geqslant 2, a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$.

On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $a_{2n} = \pi \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$ »

$\pi \dfrac{(-1)^0}{2^0(0!)^2} = \pi = a_0$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ alors $a_{2n+2} = -\dfrac{a_{2n}}{((2n+2)^2} = -\dfrac{a_{2n}}{2^2(n+1)^2}$

$= -\pi \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2 2^2(n+1)^2} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}$ d'où $\mathcal{P}(n+1)$ puis $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

On en déduit, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \pi \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \dfrac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.}$

Extrait du rapport

Question également peu abordée et rarement bien traitée, des confusions apparaissant notamment entre les indices.

Exercice 2 *(D'après E3A PC 2021)*

Extrait du rapport

— Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur), les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre.

— Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que ", " par une récurrence immédiate ", etc... rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.

— Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

— Dans certaines copies on trouve beaucoup trop d'abréviations CVU, CVS, CSTP (comparaison de séries à termes positifs) voire des symboles mathématiques en guise d'abréviation...

— La rédaction est souvent inadmissible : les flèches (voir rien du tout) remplacent les phrases, les résultats ne sont pas encadrés, les théorèmes ont des noms aléatoires (lorsqu'ils en ont).

— Certains candidats recopient simplement le résultat demandé en guise de réponse en espérant que cela passe.

— Les convergences d'intégrales et de séries ne sont justifiées que si cela est explicitement demandé.

1. La suite $(u_n) = ((-1)^{n+1} \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{>0})$ est alternée.

   La suite $(|u_n|) = (\dfrac{1}{n})$ est décroissante et converge vers 0.

   Par le théorème spécial des séries alternées, $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge.}}$

Extrait du rapport

Attention à ne pas oublier les hypothèses précises d'application du critère spécial des séries alternées.

2. (a) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^{2n}(1-x)$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[0,1]$ et intégrable sur $[0,1]$ (fonction polynomiale) donc sur $[0,1[$.

— $\forall x \in [0,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = (1-x)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n \underbrace{=}_{|x^2|<2} \dfrac{1-x}{1-x^2} = \dfrac{1-x}{(1+x)(1-x)}$.

$\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, continue par morceaux.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n} - x^{2n+1}\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

Or $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2} > 0$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}.}$$

Extrait du rapport

Cela ne doit pas être à l'examinateur de faire le choix des hypothèses énoncées en vrac pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
Beaucoup de candidats tentent de prouver la convergence uniforme de la série sur [0, 1] alors que la non continuité de la fonction somme aurait dû les en dissuader.
Enfin, calculer la somme d'une série géométrique relève trop souvent de l'exploit...

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2N+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Les convergences des séries ont été prouvées dans les deux dernières questions.

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2n}(1-x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ et

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2N+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(2).}$

3. On sait que le rayon de convergence de la série entière vaut 1 (développement de $\ln(1+x)$), donc la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$.

D'après la première question, la série converge pour $x = 1$.

pour $x = -1$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est définie sur }]-1, 1].}$

Par la question précédente, $\boxed{\varphi(1) = \ln(2).}$

Extrait du rapport

Trop peu d'étudiants reconnaissent une série entière et répondent à la question. On a trop souvent trouvé $D =]-1, 1[$, sans que le candidat soit géné lorsqu'on lui demande de calculer $\varphi(1)$!

4. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \mathrm{d}x = [\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_0^1.$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).}$$

Extrait du rapport

Rappelons que l'intégration par parties n'est pas la panacée du calcul intégral. On retrouve ensuite les mêmes problèmes que pour la question 2.

(b) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge absolument d'après la question 2a

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (-1)^n x^{2n} (1-x)$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux donc intégrable sur $[0, 1]$, donc sur $[0, 1[$.

— Soit $x \in [0, 1[$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} (1-x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n \underbrace{=}_{|-x^2|<1} \frac{1-x}{1+x^2}.$

$\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x^2}$.

— $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x$ converge d'après la question 2a.

Par intégration terme à terme, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x$

i.e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\int_0^1 x^{2n} (1-x) \mathrm{d}x \right) = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} \mathrm{d}x.$

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).}$$

Exercice 3 *(D'après CCINP MP 2023 – Math 1)*

1. Soit $g : x \mapsto e^{-x} - x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1) < 0$, donc <u>$g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</u>

De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de la bijection, g établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-\infty} g(x)[=]-\infty,+\infty[$.
Or $0 \in]-\infty,+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$,
donc $\boxed{\text{l'équation } e^{-x}=x \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}.}$
On la note α.

2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. (x,y) est un point critique de $f \Leftrightarrow \nabla f(x,y)=0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y-e^{-x}=0 \\ -2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x/2 \\ x-e^{-x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(\alpha,\alpha/2)$ d'après la question précédente.
$\boxed{f \text{ possède un unique point critique } (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2.}$

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2+e^{-x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-2$.
Or $e^{-x_0}=x_0$, donc $H=H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} 2+x_0 & -2 \\ -2 & 4\end{pmatrix}$
$\det H=4+4x_0>0$ car $x_0=e^{-x_0}>0$ donc $\boxed{f \text{ admet un extremum local en } (x_0,y_0).}$
et $\operatorname{tr} H=6+x_0>0$ donc $\boxed{\text{il s'agit d'un minimum local.}}$

Exercice 4 *(D'après CCINP MP 2021)*

Extrait des rapports CCINP MP 2021 et 2023

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.

1. La fonction ln est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0, \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$
donc $\boxed{\ln \text{ est concave sur }]0,+\infty[.}$

Ainsi, pour tous $a, b \in]0, +\infty[$, $t \in [0,1]$, $\ln(ta + (1-t)b) \geqslant t\ln(a) + (1-t)\ln(b)$. On choisit $t = \dfrac{1}{2}$.

$\ln(\dfrac{1}{2}(a+b)) \geqslant \dfrac{1}{2}\ln(a) + \dfrac{1}{2}\ln(b) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{b}) = \ln(\sqrt{ab})$.

Par croissance de l'exponentielle, $\boxed{\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}.}$

2. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2 y} = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{xy^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

$\boxed{f \text{ admet } (1,1) \text{ comme unique point critique sur l'ouvert }]0,+\infty[^2.}$

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert, si elle admet un extremum global, il ne peut être situé qu'en un point critique.
On a $f(1,1) = 3$.

D'après le résultat admis, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{3}(x + y + \dfrac{1}{xy}) \geqslant \sqrt[3]{x \times y \times \dfrac{1}{xy}} = 1$

donc $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, f(x,y) \geqslant 3$.

$\boxed{f \text{ admet un minimum global en } (1,1) \text{, égal à } 3.}$

Exercice 5 : La constante d'Euler *(D'après CCINP PC 2022)*

Partie I – Construction de la constante d'Euler

1. Soit $n \geqslant 2$. $\Delta_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n-1) = \dfrac{1}{n} + \ln(\dfrac{n-1}{n})$

$= \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$

$\boxed{\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}.}$

Extrait du rapport

De nombreux candidats additionnent des équivalents.

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann. Par équivalence à une suite de signe constant, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 2} \Delta_n \text{ est convergente.}}$

Extrait du rapport

Il ne faut pas oublier de mentionner le signe du terme général de la série pour utiliser une règle de comparaison.

3. Par le lien suite-série, la série $\sum \Delta_n = \sum u_n - u_{n-1}$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Par la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$

Partie II – Expression intégrale de la constante d'Euler

II.1 – Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

4. Soit $t\in]0,+\infty[$. On pose $n_0=\lfloor t\rfloor+1\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\geqslant n_0$, $n>\lfloor t\rfloor\geqslant t$ donc $\boxed{\exists n_0\in\mathbb{N}^*|\forall n\in\mathbb{N}^* nn\geqslant n_0\Rightarrow f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t).}$

5. Soit $t>0$, n_0 défini comme à la question précédente.

   Alors pour $n\geqslant n_0$, $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)=e^{n\ln(1-\frac{t}{n})}\ln(t)$

   Or $n\ln(1-\frac{t}{n})\underset{n\to+\infty}{=}n(-\frac{t}{n}+o(\frac{1}{n}))=-t+o(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-t$.
   Par composition de limites, $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{-t}\ln(t)$.

   $\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ converge simplement vers } t\mapsto e^{-t}\ln(t)\text{ sur }]0,+\infty[.}$

   > **Extrait du rapport**
   >
   > Beaucoup de candidats utilisent une composition maladroite d'un équivalent et de la fonction exponentielle.

6. Soit $n\in\mathbb{N}^*, t>0$.
   Si $t\geqslant n$, $|fn(t)|=0\leqslant e^{-t}|\ln(t)|$

   Si $t<n$, on applique l'inégalité de convexité $\ln(1+x)\leqslant x$, pour $x>-1$. *(Ici $-\frac{t}{n}>-1$ car $0\leqslant t<n$)*

   $\ln(1-\frac{t}{n})\leqslant-\frac{t}{n}$

   puis $n\ln(1-\frac{t}{n})\leqslant -t$. Par croissance de la fonction exponentielle, $0\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}$

   Enfin $0\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n|\ln(t)|\leqslant e^{-t}|\ln(t)|$

   d'où $\boxed{|f_n(t)|\leqslant e^{-t}|\ln(t)|.}$

   > **Extrait du rapport**
   >
   > Beaucoup d'étudiants ne remarquent pas qu'il y a deux cas à distinguer. Pour utiliser l'inégalité rappelée dans l'énoncé, il faut vérifier que la quantité à laquelle on l'applique se trouve bien dans l'intervalle de validité de l'inégalité.

7. $f:t\mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
   $e^{-t}\ln(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\ln(t)$. ln est une fonction de référence intégrable en 0 donc f également par équivalence.

   $t^2f(t)=t^2e^{-t}\ln(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ par croissances comparées. Ainsi, $f(t)\underset{t\to+\infty}{=}o(\frac{1}{t^2})$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc f également par domination.

   En conclusion, $\boxed{f:t\mapsto e^{-t}\ln(t)\text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Extrait du rapport

Il ne faut pas oublier de mentionner la continuité (par morceaux) de la fonction.

II.2 – Convergence d'une suite d'intégrales

8. f_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Sur $[n, +\infty[$, $f_n = 0$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$ converge.
$f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$ et ln est intégrable en 0, donc f_n également par équivalence, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t$ converge.
En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$

Extrait du rapport

Il faut bien lire la question : beaucoup de candidats utilisent à tort le théorème de convergence dominée dans cette question.

9. D'après les résultats de la sous-partie **II.1** :

   — la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$

   — $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t > 0, |f_n(t)| \leqslant |f(t)|$ avec $|f|$ intégrable sur $]0, +\infty[$

   Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

   $$\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.}$$

10. On utilise le théorème d'intégration par parties avec les fonctions $g : u \mapsto \ln(1-u)$ et $h : u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{n+1}$.
$g \times h(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$ (par continuité) et $g \times h(u) \xrightarrow[u\to 1]{} 0$
car $\dfrac{1}{n+1}(u^{n+1}-1)\ln(1-u) = \dfrac{1}{n+1}(u-1)(\sum\limits_{k=0}^{n} u^k)\ln(1-u) \underset{u\to 1}{\sim} (u-1)\ln(1-u) \xrightarrow[u\to 1]{} 0$
car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées.
Par intégration par parties, J_n est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{n+1}(-\frac{1}{1-u})\mathrm{d}u$ converge, *i.e.* si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$ converge (par linéarité).
Or $u \mapsto \dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue par morceaux sur $[0, 1[$ et
$\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1} = \dfrac{(u-1)(\sum\limits_{k=0}^{n} u^k)}{u-1} \xrightarrow[u\to 1]{} n+1$ donc l'intégrale est faussement impropre en 1, ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$ converge puis $\boxed{J_n \text{ est convergente}}$
En appliquant l'intégration par parties, on a :
$$J_n = [\frac{1}{n+1}(u^{n+1}-1)\ln(1-u)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{n+1}(-\frac{1}{1-u})\mathrm{d}u$$

puis $\boxed{J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u.}$

et $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u^k\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u^k\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$

On en conclut $\boxed{J_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.}$

Extrait du rapport

Presque aucun candidat ne rédige correctement le théorème d'intégration par parties en vérifiant préalablement ses hypothèses et en écrivant la relation entre les intégrales seulement une fois que l'on est assuré que les intégrales en jeu convergent.

11. On applique le changement de variable $u = 1 - \frac{t}{n}$.

$$I_n = \int_1^0 u^n \ln(n(1-u))(-n\mathrm{d}u) = n(\int_0^1 u^n(\ln(n) + \ln(1-u))\mathrm{d}u$$

$$= n(\ln(n)\int_0^1 u^n\mathrm{d}u + \int_0^1 u^n\ln(1-u)\mathrm{d}u) = n(\ln(n)\frac{1}{n+1} + J_n)$$

$$\boxed{I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = \frac{n}{n+1}(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}) = -\frac{n}{n+1}(u_n + \frac{1}{n+1})$$

Or $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par opérations sur les limites $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\gamma$.

Or $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$

Par unicité de la limite, $\boxed{\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.}$